Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

fortgeführt von

C. W. Borchardt, K. Weierstrass, L. Kronecker,
L. Fuchs, K. Hensel, L. Schlesinger

gegenwärtig herausgegeben von

Helmut Hasse und Hans Rohrbach

unter Mitwirkung von

W. Brödel, M. Deuring, O. Haupt,
G. Köthe, W. Schmeidler

Band 192
In 4 Heften

Walter de Gruyter & Co.
vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.
Berlin 1953

Archiv-Nr. 180353
Satz von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 35
Druck von Buchkunst, Berlin W 35
Printed in Germany

Inhaltsverzeichnis des Bandes 192

Seite

Ara, Rahmat und **M. Pinl,** Zur integrallosen Darstellung reeller isotroper Kurven 204

Baer, Reinhold, Direkte Faktoren endlicher Gruppen 167

Brauer, Alfred, Über die Lage der charakteristischen Wurzeln einer Matrix 113

Fladt, Kuno, Über die Transformationen der Hauptgruppe in der nichteuklidischen Geometrie und die komplexe Trigonometrie 129

Grothendieck, Alexandre, Sur certains espaces de fonctions holomorphes. I. 35

— —, Sur certains espaces de fonctions holomorphes. II. 77

Günther, Alfred, Über transzendente $\mathfrak{p}$-adische Zahlen. I. 155

Kanold, Hans-Joachim, Einige neuere Bedingungen für die Existenz ungerader vollkommener Zahlen 24

Kochendörffer, Rudolf, Zur Theorie der Rédeischen schiefen Produkte 96

Koecher, Max, Über Dirichlet-Reihen mit Funktionalgleichung 1

Krull, Wolfgang, Zur Theorie der kommutativen Integritätsbereiche 230

Ohmann, D., Isoperimetrische und verwandte Extremalprobleme für beschränkte ebene Punktmengen 65

— —, Einige dem Vierscheitelsatz verwandte Sätze über Eilinien 74

Pinl, M. siehe **Ara, Rahmat**

Richert, Hans-Egon, Über quadratfreie Zahlen mit genau r Primfaktoren in einer arithmetischen Progression 180

Rohrbach, Hans und **Bodo Volkmann,** Zur Theorie der asymptotischen Dichte 102

Volkmann, Bodo siehe **Rohrbach, Hans**

Zulauf, Achim, Über den dritten Hardy-Littlewoodschen Satz zur Goldbachschen Vermutung 117

— —, Über die Darstellung natürlicher Zahlen als Summen von Primzahlen aus gegebenen Restklassen und Quadraten mit gegebenen Koeffizienten. I. 210

Ausgabedaten der Hefte von Bd. 192

Heft 1 ausgegeben am 28. Oktober 1953

Heft 2 ausgegeben am 7. Dezember 1953

Heft 3/4 ausgegeben am 5. Januar 1954

Über Dirichlet-Reihen mit Funktionalgleichung.[1])

Von *Max Koecher* aus Göttingen.

Einleitung. Ergebnisse.

Die Riemannsche Zetafunktion ist bisher auf zweierlei Weise verallgemeinert worden, einmal von Epstein auf mehrfache Summen, andererseits von Dedekind auf algebraische Zahlkörper und von Hey auf hyperkomplexe Systeme. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich in ihrem ersten Teil mit einer über die Epsteinsche Zetafunktion hinausgehenden Verallgemeinerung, die zuerst von Siegel ([5]/II, 400) in etwas anderer Form formuliert wurde. Ist $\mathfrak{S}^{(m)}$ die Matrix einer positiven quadratischen Form, so definiert man die Epsteinsche Zetafunktion durch

$$\zeta_1(\mathfrak{S}, s) = \frac{1}{2} \sum_{\mathfrak{g}} \frac{1}{(\mathfrak{g}'\mathfrak{S}\mathfrak{g})^s}, \quad \operatorname{Re} s > \frac{m}{2},$$

wobei die m-fache Summe über alle Gitterpunkte $\mathfrak{g}$ (mit Ausnahme des Nullpunktes) des m-dimensionalen Raumes zu erstrecken ist. Die Theorie der quadratischen Formen legt nun nahe, die Reihe

$$(1) \qquad \zeta_n(\mathfrak{S}^{(m)}, s) = \sum_{\mathfrak{A}} |\mathfrak{A}'\mathfrak{S}\mathfrak{A}|^{-s}, \quad m \geqq n,$$

zu untersuchen, bei der die Matrizen $\mathfrak{A}^{(m,n)}$ alle ganzen Matrizen vom Rang n durchlaufen, die sich nicht nur durch einen rechtsseitigen unimodularen Faktor unterscheiden. Die Reihe ist für $\operatorname{Re} s > m/2$ absolut konvergent und stellt daher in dieser Halbebene eine analytische Funktion in s dar. Wie in dem bekannten Fall $n = 1$ gelingt es auch hier, die Fortsetzbarkeit für alle komplexen s und eine Funktionalgleichung zu beweisen. Ist nämlich

$$(2) \qquad R_n(\mathfrak{S}, s) = \pi^{n\left(\frac{n-1}{4} - s\right)} \Gamma(s)\, \Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right) \cdots \Gamma\left(s - \frac{n-1}{2}\right) \zeta_n(\mathfrak{S}, s),$$

so gilt

$$R_n(\mathfrak{S}, s) = |\mathfrak{S}|^{-\frac{n}{2}} R_n\left(\mathfrak{S}^{-1}, \frac{m}{2} - s\right).$$

$\zeta_n(\mathfrak{S}, s)$ ist in der ganzen Ebene bis auf eine endliche Anzahl von Polen erster Ordnung regulär. Eine Möglichkeit zum Beweis der Funktionalgleichung der Epsteinschen Zetafunktion bildet die Integraldarstellung von $R_1(\mathfrak{S}, s)$ mit Hilfe einer Thetareihe. Diese Methode wird nun auf $R_n(\mathfrak{S}, s)$ übertragen werden, dabei wird als verbindende Integralformel aber nicht die Integraldarstellung der Gammafunktion, sondern eine etwas allgemeinere Formel von Siegel verwendet werden. Die Schwierigkeiten, die im Beweis im Unterschied zu $n = 1$ neu auftreten, können durch eine Induktion nach n behoben

[1]) Die Arbeit wurde von der Math. Naturw. Fakultät der Universität Göttingen (D. 7) als Dissertation angenommen. Berichterstatter: Prof. Dr. *M. Deuring*.

werden. Das liegt daran, daß die Residuen der Pole von $R_n(\mathfrak{S}, s)$ gleich $R_r\left(\mathfrak{S}, \frac{n}{2}\right)$, $0 < r < n$, sind. Im Beweis, zu dem die Reduktionstheorie der quadratischen Formen wertvolle Hilfsmittel liefert, ergibt sich fast ohne Rechnung die Formel von Minkowski für das Volumen des Raumes der positiven reduzierten Matrizen bis zur Determinantenfläche $|\mathfrak{S}| = 1$.

Es zeigt sich nun, daß die Methoden völlig ausreichen, die Heckesche Theorie ([9]) über den Zusammenhang zwischen Modulformen und Dirichlet-Reihen mit gewissen Funktionalgleichungen auf die von Siegel ([4]) eingeführten Modulformen n-ten Grades wenigstens in einer Richtung zu übertragen. Dasselbe Problem wurde in neuester Zeit von Maaß ([8]) für $n = 2$ behandelt, jedoch werden seine Methoden hier nicht verwendet. Aus der Fourier-Entwicklung einer Modulform n-ten Grades vom Gewicht k

$$\varphi(\mathfrak{Z}) = \sum_{\mathfrak{T} \geqq 0} A(\mathfrak{T})\, e^{2\pi i \sigma(\mathfrak{T}\mathfrak{Z})}, \quad \mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}' = \mathfrak{X} + i\mathfrak{Y}, \quad \mathfrak{Y} > 0, \quad \varphi(i\mathfrak{Y}) = f(\mathfrak{Y}),$$

bei der über alle halbganzen symmetrischen Matrizen $\mathfrak{T}^{(n)}$ mit $\mathfrak{x}'\mathfrak{T}\mathfrak{x} \geqq 0$ zu summieren ist, entnimmt man die Koeffizienten für $|\mathfrak{T}| \neq 0$ und bildet

$$D_n(f; s) = 2^{-ns} \sum_{\mathfrak{T} > 0} a(\mathfrak{T})\, |\mathfrak{T}|^{-s}, \quad a(\mathfrak{T}) = \frac{A(\mathfrak{T})}{E(\mathfrak{T})}.$$

Die Summation ist hier nur über ein volles System von nicht äquivalenten Matrizen zu erstrecken. $E(\mathfrak{T})$ bedeutet dabei die Anzahl der Einheiten von $\mathfrak{T}$. Bildet man nun $R_n(f; s)$ nach (2) mit $D_n(f; s)$ an Stelle von $\zeta_n(\mathfrak{S}, s)$, so wird die Funktionalgleichung

$$R_n(f; s) = (-1)^{\frac{nk}{2}} R_n(f; k - s)$$

bewiesen werden. Neue wesentliche Schwierigkeiten treten dabei nicht auf. Man hätte beide Fälle zusammen behandeln können, jedoch wäre dann die Schreibweise zu kompliziert geworden. Die zum ersten Fall analogen Teile des Beweises sind daher nur skizziert worden.

Im Anschluß daran wird die Frage nach der Charakterisierung einer Modulform n-ten Grades durch die zugeordnete Dirichlet-Reihe behandelt. Man erhält im Gegensatz zur Heckeschen Theorie im allgemeinen Falle keine eineindeutige Zuordnung.

Für wertvolle Hinweise bin ich Fräulein Professor Dr. Hel Braun zu großem Dank verpflichtet.

§ 1. Matrizen. Einführung allgemeiner Zetafunktionen.

Es werden zuerst einige Bezeichnungen zusammengestellt. Mit deutschen Buchstaben werden Matrizen bezeichnet, dabei sind kleine deutsche Buchstaben für Spalten vorbehalten. In $\mathfrak{A}^{(m,n)}$ bedeuten die oberen Indizes, daß die Matrix $\mathfrak{A}$ aus m Zeilen und n Spalten besteht. *Ein* oberer Index, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{(m)}$, besagt, daß $\mathfrak{A}$ eine quadratische Matrix von m Zeilen ist. Für Diagonalmatrizen steht die Abkürzung

$$[a_1, a_2, \cdots, a_n] = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

mit $\mathfrak{E}$ wird die Einheitsmatrix und mit $\mathfrak{N}$ bzw. $\mathfrak{n}$ eine Nullmatrix bzw. Nullspalte bezeichnet. Die Schreibweise

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}), \quad \begin{pmatrix} \mathfrak{P} \\ \mathfrak{Q} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_1 & \mathfrak{A}_2 \\ \mathfrak{A}_3 & \mathfrak{A}_4 \end{pmatrix}$$

gibt die Zerlegung einer Matrix in „Kästchen". $r(\mathfrak{A})$ sei der Rang, $|\mathfrak{A}|$ die Determinante, $\|\mathfrak{A}\|$ ihr absoluter Betrag und $\sigma(\mathfrak{A})$ die Spur der Matrix $\mathfrak{A}$:

$$\sigma(\mathfrak{A}) = \sum_k a_{kk}, \text{ wenn } \mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{(m)} = (a_{kl}).$$

Für die Spur gelten die Rechenregeln:

$$\sigma(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = \sigma(\mathfrak{A}) + \sigma(\mathfrak{B}), \ \sigma(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \sigma(\mathfrak{B}\mathfrak{A}), \ \sigma(\mathfrak{A}') = \sigma(\mathfrak{A}).$$

Dabei bedeutet $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ das Matrizenprodukt von $\mathfrak{A}^{(m,n)}$ mit $\mathfrak{B}^{(p,q)}$, wobei die notwendige Voraussetzung $n = p$ nicht immer besonders erwähnt wird. Mit $\mathfrak{A}'$ wird die transponierte und mit $\mathfrak{A}^{-1}$ die inverse Matrix von $\mathfrak{A}$ bezeichnet. Matrizen mit der Eigenschaft $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}$ heißen *symmetrisch*. $\mathfrak{A}$ heißt *ganz*, wenn alle Elemente von $\mathfrak{A}$ ganze rationale Zahlen sind. Ist $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}^{-1}$ ganz, d. h. $|\mathfrak{U}| = \pm 1$, so heißt $\mathfrak{U}$ *unimodular*, $|\mathfrak{U}| = 1$ wird als *eigentlich unimodular* bezeichnet. Die unimodularen Matrizen bilden bei Multiplikation eine Gruppe U_m, die eigentlich unimodularen Matrizen eine Untergruppe V_m und die unimodularen Matrizen der Form:

$$\mathfrak{U}^{(m)} = \begin{pmatrix} \mathfrak{U}_1 & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{E}^{(r)} \end{pmatrix}, \ \mathfrak{U}_1 \in U_{m-r}, \ \mathfrak{B}^{(m-r,r)} \text{ ganz},$$

eine Untergruppe $U_m(r) \leqq U_m$.

Zwei Matrizen $\mathfrak{A}^{(m,n)}$ und $\mathfrak{B}^{(m,n)}$ heißen *rechts* (*links*) *assoziiert*, wenn eine Gleichung $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}\mathfrak{U}$ ($\mathfrak{A} = \mathfrak{V}\mathfrak{B}$) mit $\mathfrak{U} \in U_n$ ($\mathfrak{V} \in U_m$) besteht und sie heißen *r-valent*, wenn $\mathfrak{A} = \mathfrak{W}\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{W} \in U_m(r)$ gilt. Zur Abkürzung wird die Bezeichnung von Siegel Verwendung finden:

$$\mathfrak{S}[\mathfrak{A}] = \mathfrak{A}'\mathfrak{S}\mathfrak{A} = [\mathfrak{A}']\,\mathfrak{S}.$$

Zwei symmetrische Matrizen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ nennt man dann *äquivalent*, $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{T}$, wenn $\mathfrak{S}[\mathfrak{U}] = \mathfrak{T}$ mit unimodularem $\mathfrak{U}$ erfüllbar ist. Ein volles System von nicht äquivalenten Matrizen wird stets mit $\{\mathfrak{T}\}$ bezeichnet werden. Sind zwei unimodulare Matrizen r-valent, so stimmen sie in den letzten r Zeilen überein; man sieht leicht, daß von dieser Aussage die Umkehrung gilt. Es werden später folgende Hilfssätze über Matrizen benötigt:

Hilfssatz 1. *Zu jeder ganzen Matrix $\mathfrak{A}$ gibt es zwei eigentlich unimodulare Matrizen $\mathfrak{V}_1$ und $\mathfrak{V}_2$ mit*

$$\mathfrak{A}^{(m,n)} = \mathfrak{V}_1^{(m)} \begin{pmatrix} \mathfrak{D} & \mathfrak{N} \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{N} \end{pmatrix} \mathfrak{V}_2^{(n)}, \quad \mathfrak{D} = [d_1, \ldots, d_r],$$

und $r = r(\mathfrak{A})$. Bei $0 < d_1 | d_2 \cdots | d_r$ sind die d_i eindeutig bestimmt.

Einen Beweis dieses bekannten Satzes findet man etwa bei B. L. v. d. Waerden, Moderne Algebra, Band 2, Seite 108ff.

Hilfssatz 2. *Durchläuft $\mathfrak{A}_1^{(m,r)}$ ein volles System von nicht rechts assoziierten Matrizen vom Rang r und $\mathfrak{V}^{(n)}$ ein volles System von nicht r-valenten unimodularen Matrizen, so erhält man in*

$$\mathfrak{A}^{(m,n)} = \left(\mathfrak{N}^{(m,n-r)} \mathfrak{A}_1^{(m,r)}\right) \mathfrak{V}^{(n)}, \ \mathfrak{A}_1 \text{ ganz}, \tag{1.1}$$

alle ganzen $\mathfrak{A}$ vom Rang r genau einmal, $m \geqq n$.

Beweis. Ist $r(\mathfrak{A}) = n$, so ist nichts zu beweisen. Sei also $r(\mathfrak{A}) = r < n$. Nach Hilfssatz 1 kann man $\mathfrak{A}$ sicher in der angegebenen Form mit $\mathfrak{V}$ aus U_n schreiben und dabei ist $r(\mathfrak{A}_1) = r$. Für alle $\mathfrak{V}$ aus $U_n(r)$ ergibt aber (1.1) dieselbe Matrix $\mathfrak{A}$, wie man sich leicht ausrechnet. Da andererseits in jedem System von nicht r-valenten unimodularen Matrizen die Matrizen

$$\begin{pmatrix} * & * \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{U} \end{pmatrix}, \ \mathfrak{U} \in U_r,$$

vorkommen (denn r-valente Matrizen unterscheiden sich nur in den ersten $n-r$ Zeilen), liefert (1. 1) sicher alle verschiedenen ganzen Matrizen. Wären nun zwei Matrizen gleich, d. h.

$$(\mathfrak{N}\mathfrak{A}_1)\,\mathfrak{B} = (\mathfrak{N}\mathfrak{B}_1)\,\mathfrak{W},\ (\mathfrak{N}\mathfrak{A}_1) = (\mathfrak{N}\mathfrak{B}_1)\,\mathfrak{U},\ \mathfrak{U} = \mathfrak{W}\mathfrak{B}^{-1} = \begin{pmatrix}\mathfrak{U}_1 & \mathfrak{U}_2\\ \mathfrak{U}_3 & \mathfrak{U}_4\end{pmatrix},$$

so würde $\mathfrak{U}_3 = \mathfrak{N}$, da $r(\mathfrak{B}_1) = r$, und $\mathfrak{U}_4 = \mathfrak{E}$, da $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_1$ nicht rechts assoziiert sind, folgen. Also

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{U}\mathfrak{B},\ \mathfrak{U} \in U_n(r),$$

und das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Zur Formulierung eines weiteren Hilfssatzes möge die Abkürzung $(\mathfrak{A})_r$ ein volles System von nicht rechts assoziierten ganzen Matrizen $\mathfrak{A}^{(m,n)}$ vom Rang r bedeuten. Dann gilt:

Hilfssatz 3. *Alle Elemente von $(\mathfrak{A}^{(m)})_m$ können in der Form*

$$\mathfrak{A}^{(m)} = \begin{pmatrix} a & \mathfrak{a}'\\ \mathfrak{n} & \mathfrak{A}_1\end{pmatrix},\ a > 0,\ \|\mathfrak{A}_1\| > 0, \tag{1. 2}$$

geschrieben werden und ist $B_m(A)$ die Anzahl der $\mathfrak{A}$ aus $(\mathfrak{A})_m$ mit $\|\mathfrak{A}\| = A$, so gilt:

$$B_m(A) = \sum_{a|A} a^{m-1} B_{m-1}\left(\frac{A}{a}\right),\ B_1(A) = 1.$$

Beweis. Es sei $\mathfrak{A}^{(m)} = (a_{ik})$ und $\mathfrak{U}^{(m)} = (u_{ik})$ aus U_m. In der ersten Spalte von $\mathfrak{A}\mathfrak{U}$ stehen dann die Elemente

$$c_{k1} = \sum_{l=1}^{m} a_{kl} u_{l1},\quad k = 2, 3, \ldots, m.$$

Es gibt nun ein nichttriviales Lösungssystem x_l von

$$\sum_{l=1}^{m} a_{kl} x_l = 0,\quad k = 2, 3, \ldots, m,$$

und wegen der Homogenität der Gleichungen kann man die x_l teilerfremd wählen. Da dann die Spalte, die aus den Lösungen x_l gebildet wird, zu einer unimodularen Matrix ergänzt werden kann, ist (1. 2) bewiesen. Durch Induktion ergibt sich weiter, daß alle Elemente von $(\mathfrak{A})_m$ in Dreiecksform gewählt werden können.

Man erhält nun alle $\mathfrak{A} \in (\mathfrak{A})_m$ genau einmal, wenn a die Zahlen $1, 2, 3, \ldots, \mathfrak{a}'$ ein volles Restsystem (mod a) und $\mathfrak{A}_1$ ein System $(\mathfrak{A}_1)_{m-1}$ durchläuft. Da die Anzahl der mod a inkongruenten Vektoren $\mathfrak{a}' = (a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1m})$ gleich a^{m-1} ist, folgt die Behauptung des Hilfssatzes.

Ist $\mathfrak{S}$ symmetrisch und $\mathfrak{S}[\mathfrak{x}] > 0$ für alle reellen $\mathfrak{x}$, so nennt man $\mathfrak{S}$ positiv und schreibt $\mathfrak{S} > 0$. Ist $\mathfrak{S} > 0$, so ist $|\mathfrak{S}| > 0$ und $\mathfrak{S}$ kann in der Form $\mathfrak{S} = \mathfrak{X}'\mathfrak{X}$ mit reellem $\mathfrak{X}$ geschrieben werden. Umgekehrt ist jedes $\mathfrak{S} = \mathfrak{X}'\mathfrak{X}$ mit $|\mathfrak{X}| \neq 0$ positiv. Das gilt auch noch für $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^{(m,n)}$, sobald $m \geqq n$ und $r(\mathfrak{X}) = n$ ist. Deutet man die reellen symmetrischen Matrizen $\mathfrak{S}^{(m)}$ als Punkte eines euklidischen Raumes von $\frac{m(m+1)}{2}$ Dimensionen, so bilden die positiven $\mathfrak{S}$ einen konvexen Kegel P_m mit der Spitze in 0.

Ein wichtiges Hilfsmittel für die Rechnung mit symmetrischen Matrizen gibt die folgende — meist als quadratische Ergänzung bezeichnete — identische Umformung:

$$\mathfrak{S}^{(m)} = \begin{pmatrix}\mathfrak{S}_1^{(n)} & \mathfrak{S}_{12}\\ \mathfrak{S}_{12}' & \mathfrak{S}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathfrak{H} & \mathfrak{N}\\ \mathfrak{N} & \mathfrak{S}_2\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\mathfrak{E} & \mathfrak{N}\\ \mathfrak{S}_2^{-1}\mathfrak{S}_{12}' & \mathfrak{E}\end{bmatrix},\quad \begin{matrix}\mathfrak{H} = \mathfrak{S}_1 - \mathfrak{S}_2^{-1}[\mathfrak{S}_{12}'],\ |\mathfrak{S}_2| \neq 0\\ |\mathfrak{S}| = |\mathfrak{H}|\cdot|\mathfrak{S}_2|\end{matrix}. \tag{1. 3}$$

Eine Matrix $\mathfrak{S}$ ist dann und nur dann positiv, wenn $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{S}_2$ positiv sind; man erhält also alle Punkte von P_m genau einmal, wenn $\mathfrak{H}$ den Raum P_n, $\mathfrak{S}_2 \in P_{m-n}$ und $\mathfrak{S}_{12}$ alle reellen Matrizen von n Zeilen und $m-n$ Spalten durchläuft.

Durch $\mathfrak{Y}^{(m)} = \mathfrak{X}[\mathfrak{U}]$, $\mathfrak{U}$ aus U_m, wird P_m auf sich abgebildet und zwar liefern nur $\mathfrak{U}$ und $-\mathfrak{U}$ dieselbe Abbildung. Die Reduktionstheorie der quadratischen Formen ([1], 53 oder [6], 212) beweist nun die Existenz eines Fundamentalbereiches F_m von P_m für die Gruppe dieser Abbildungen. F_m kann man dabei als den konvexen Kegel $\mathfrak{F}_m$ wählen, der durch die reduzierten positiven Matrizen gebildet wird. Eine positive Matrix $\mathfrak{S} = (s_{kl})$ heißt dabei reduziert, wenn

1. $s_{1l} \geqq 0$ für $l = 2, 3, \ldots, m$,
2. $\mathfrak{S}[\mathfrak{g}_k] \geqq s_{kk}$ für alle $\mathfrak{g}_k' = (g_1, g_2, \ldots, g_m)$, ganz, mit $(g_k, g_{k+1}, \ldots, g_m) = 1$,

erfüllt ist. $\mathfrak{F}_m$ wird dann von endlich vielen Hyperebenen begrenzt. Es soll nun ein Fundamentalbereich von P_m konstruiert werden, der bei

$$\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}^{-1} \tag{1. 4}$$

auf sich abgebildet wird. Schon der Fall $m = 2$ zeigt, daß diese Forderung für den Raum der reduzierten Matrizen nicht erfüllt zu sein braucht, P_m dagegen geht in sich über bei (1. 4). Für ein beliebiges Teilgebiet A von P_m sei

$A(x)$ = Durchschnitt von A mit $|\mathfrak{X}| \leqq x$, $A'(x)$ sein Bild bei (1. 4),
$A[x]$ = Durchschnitt von A mit $|\mathfrak{X}| \geqq x$, $A'[x]$ sein Bild bei (1. 4),
$A\langle x\rangle$ = Durchschnitt von A mit $|\mathfrak{X}| = x$.

Es ist dann $A(x) + A[x] = A$ bis auf eine Punktmenge der Dimension $\frac{m(m+1)}{2} - 1$. Ferner heiße ein Gebiet $A \leqq P_m$ *normal*, wenn mit $\mathfrak{X}$ auch $c \cdot \mathfrak{X}$ zu A gehört, wobei

$$0 < c < |\mathfrak{X}|^{-\frac{1}{m}}, \text{ wenn } |\mathfrak{X}| < 1, \text{ bzw. } |\mathfrak{X}|^{-\frac{1}{m}} < c < \infty, \text{ wenn } |\mathfrak{X}| > 1.$$

P_m und der Raum der reduzierten Matrizen $\mathfrak{F}_m$ sind dann normal.

Hilfssatz 4. *Ist F_m ein normaler Fundamentalbereich von P_m bei den Abbildungen $\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}[\mathfrak{U}]$, $\mathfrak{U}$ aus U_m, so ist $F_m^* = F_m[1] + F_m'[1]$ ein normaler Fundamentalbereich von P_m, der bei* (1. 4) *auf sich abgebildet wird.*

Beweis. Es muß nur bewiesen werden, daß $F_m'[1]$ ein Fundamentalbereich von $P_m(1)$ ist. Dazu liegen $F_m'[1]$ und alle Bilder in $P_m(1)$, und $F_m'[1]$ besteht nur aus nicht äquivalenten Punkten (evtl. mit Ausnahme von Randpunkten). Wäre nun $\mathfrak{X}$ ein Punkt von $P_m(1)$, der mit einer ganzen Umgebung mit keinem Punkt von $F_m'[1]$ äquivalent wäre, dann würde das auch für die Bilder bei (1. 4) gelten. Wegen $P_m'(1) = P_m[1]$ gibt diese Annahme einen Widerspruch, da $F_m[1]$ sicher Fundamentalbereich von $P_m[1]$ ist. Da ein normales Gebiet bei (1. 4) in ein normales Gebiet übergeht, ist damit der Satz bewiesen.

„Fundamentalbereich" ist dabei so zu verstehen, daß P_m bei den Abbildungen bis auf eine Punktmenge der Dimension $\frac{1}{2}\, m(m+1) - 1$ lückenlos und einfach überdeckt wird.

Da $U_m(r)$ eine Untergruppe von U_m ist, existiert ein Fundamentalbereich D_m^r von P_m bei den Abbildungen

$$\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}[\mathfrak{G}'], \quad \mathfrak{G} \in U_m(r). \tag{1. 5}$$

Hilfssatz 5. *Die Parameterdarstellung eines normalen Fundamentalbereiches D_m^r von P_m erhält man in*

$$\mathfrak{X}^{(m)} = \begin{pmatrix} \mathfrak{H} + \mathfrak{P}\mathfrak{X}_2\mathfrak{P}' & \mathfrak{P}\mathfrak{X}_2 \\ \mathfrak{X}_2\mathfrak{P}' & \mathfrak{X}_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \mathfrak{H}^{(m-r)} \in F_{m-r}, \\ \mathfrak{X}_2^{(r)} \in P_r, \\ \mathfrak{P}^{(m-r,r)} \in Q_{m,r}; \end{matrix}$$

dabei müssen $Q_{m,r}$ vom Volumen $\frac{1}{2}$ und der normale Fundamentalbereich F_{m-r} geeignet gewählt werden.

Beweis. $Q_{m,r}$ sei ein geeigneter Fundamentalbereich des vollen Raumes $R_{r(m-r)}$ bei den Abbildungen

$$\mathfrak{Y}_{12} = \mathfrak{B} \pm \mathfrak{X}_{12}, \quad \mathfrak{B} \text{ ganz},$$

$Q_{m,r}$ hat dann das Volumen $\frac{1}{2}$. Die Vereinigungsmenge aller Bilder von $Q_{m,r}$ bei den Abbildungen

$$\mathfrak{Y}_{12} = \mathfrak{B} + \mathfrak{X}_{12}$$

sei $Q^*_{m,r}$. Dann stellt sich $R_{r(m-r)}$ als Vereinigung von $Q^*_{m,r}$ und seines Bildes bei

$$\mathfrak{Y}_{12} = -\mathfrak{X}_{12}$$

dar.

Da sich jedes $\mathfrak{G} \in U_m(r)$ als

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2, \quad \mathfrak{G}_1 = \begin{pmatrix} \mathfrak{E} & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{E} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{G}_2 = \begin{pmatrix} \mathfrak{U} & \mathfrak{N} \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{E} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B} \text{ ganz}, \quad \mathfrak{U} \in U_{m-r},$$

schreiben läßt, ist $U_m(r)$ als direktes Produkt der Gruppen W_1 und W_2 darstellbar, wenn man mit W_i die durch $\mathfrak{G}_i$ erzeugte Gruppe bezeichnet. Es sei nun C^r_m ein Fundamentalbereich von P_m bei den Abbildungen $\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}[\mathfrak{G}'_2]$, $\mathfrak{G}_2$ aus W_2. Nach (1. 3) durchläuft $\mathfrak{Y}$ in der Form

$$\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}[\mathfrak{G}'_2] = \begin{pmatrix} \mathfrak{H}[\mathfrak{U}'] & \mathfrak{N} \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{X}_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{E} & \mathfrak{N} \\ \mathfrak{X}_2^{-1}\mathfrak{X}'_{12}\mathfrak{U}' & \mathfrak{E} \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{X}_1 - \mathfrak{X}_2^{-1}[\mathfrak{X}'_{12}],$$

alle Punkte von P_m einmal, wenn

$$(1.\,6) \qquad \mathfrak{H} \in F_{m-r}, \quad \mathfrak{X}_2 \in P_r, \quad \mathfrak{X}_{12}\mathfrak{X}_2^{-1} \in Q^*_{m,r},$$

und außerdem $\mathfrak{U}$ alle Elemente von U_{m-r} einmal durchläuft. Bei geeignetem F_{m-r} hat man also in (1. 6) eine Parameterdarstellung von C^r_m. Weiter muß sich nun D^r_m als Fundamentalbereich eines geeigneten C^r_m bei den Abbildungen $\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}[\mathfrak{G}'_1]$, $\mathfrak{G}_1 \in W_1$, darstellen lassen. Setzt man $\mathfrak{Q} = \mathfrak{X}_{12}\mathfrak{X}_2^{-1}$,

$$\mathfrak{X} = \begin{pmatrix} \mathfrak{H} & \mathfrak{N} \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{X}_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{E} & \mathfrak{N} \\ \mathfrak{Q}' & \mathfrak{E} \end{bmatrix}$$

und $\mathfrak{Q} = \mathfrak{B} + \mathfrak{P}$ mit ganzem $\mathfrak{B}$, so folgt

$$(1.\,7) \qquad \mathfrak{X} = \begin{pmatrix} \mathfrak{H} & \mathfrak{N} \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{X}_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{E} & \mathfrak{N} \\ \mathfrak{P}' & \mathfrak{E} \end{bmatrix} [\mathfrak{G}'_1], \quad \mathfrak{G}_1 = \begin{pmatrix} \mathfrak{E} & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{E} \end{pmatrix} \in W_1,$$

und $\mathfrak{X}$ durchläuft C^r_m einmal, wenn $\mathfrak{G}_1$ die Gruppe W_1, $\mathfrak{H} \in F_{m-r}$, $\mathfrak{X}_2 \in P_r$ und $\mathfrak{P}$ einen Fundamentalbereich $Q_{m,r}$ von $Q^*_{m,r}$ bezüglich der Abbildungen $\mathfrak{Y} = \mathfrak{B} + \mathfrak{X}$ durchläuft. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Für symmetrische $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ bezeichnet man mit $A(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$ die Anzahl der Darstellungen von $\mathfrak{T}^{(n)}$ durch $\mathfrak{S}^{(m)}$, d. h. die Anzahl der ganzzahligen Lösungen der Matrizengleichung $\mathfrak{S}[\mathfrak{X}] = \mathfrak{T}$. Für positives $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ ist diese Anzahl endlich. Bei $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}_0$ und $\mathfrak{T} \sim \mathfrak{T}_0$ gilt dann $A(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}) = A(\mathfrak{S}_0, \mathfrak{T}_0)$. Die Anzahl der Einheiten von $\mathfrak{S}$ wird mit $E(\mathfrak{S})$ bezeichnet, also $E(\mathfrak{S}) = A(\mathfrak{S}, \mathfrak{S})$. Es liegt nun nahe, die Dirichlet-Reihen der Form

$$(1.\,8) \qquad \zeta_n(\mathfrak{S}^{(m)}, s) = \sum_{(\mathfrak{A}^{(m,n)})_n} |\mathfrak{S}[\mathfrak{A}]|^{-s}, \quad m \geqq n,$$

auf ihre Fortsetzbarkeit in die Ebene der komplexen Veränderlichen s zu untersuchen. Da $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}$ Einheit von $\mathfrak{T}$, in $\mathfrak{S}[\mathfrak{A}] = \mathfrak{T}$ dasselbe $\mathfrak{T}$ ergeben und nur über die nicht rechts assoziierten $\mathfrak{A}^{(m,n)}$ mit $r(\mathfrak{A}) = n$ summiert wird, kann man für (1. 8) auch schreiben:

$$(1.\,9) \qquad \zeta_n(\mathfrak{S}^{(m)}, s) = \sum_{\{\mathfrak{T}\} > 0} a(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})\, |\mathfrak{T}|^{-s}, \quad a(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}) = \frac{A(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})}{E(\mathfrak{T})},$$

wobei über ein volles System von nicht äquivalenten Matrizen $\mathfrak{T}^{(n)}$ zu summieren ist, die durch $\mathfrak{S}$ darstellbar sind.

$n = 1$ ergibt die bekannten Epsteinschen Zetafunktionen. In der Darstellung (1. 8) kann man $\mathfrak{S}[\mathfrak{A}] = \mathfrak{T}$ reduziert wählen. Aus der Reduktionstheorie entnimmt man für reduzierte Matrizen die Ungleichung:

$$|\mathfrak{T}| \leqq t_{11} \cdot t_{22} \cdots t_{nn} \leqq c_n \cdot |\mathfrak{T}|, \quad \mathfrak{T}^{(n)} = (t_{kl}),$$

wobei die Konstante c_n nicht von $\mathfrak{T}$ abhängt. Für reelle s folgt damit

$$C(\mathfrak{S})\, \zeta_1(\mathfrak{S}, s) \leqq \zeta_n(\mathfrak{S}, s) \leqq c_n^s (\zeta_1(\mathfrak{S}, s))^n,$$

und da ζ_1 als Epsteinsche Zetafunktion die exakte Konvergenzabszisse $m/2$ hat, ist $\zeta_n(\mathfrak{S}, s)$ für $\operatorname{Re} s \geqq s_0 > m/2$ gleichmäßig und absolut konvergent. Sie stellt also eine analytische Funktion in s dar. Das gilt sogar noch für eine komplexe Matrix $\mathfrak{S}$ mit positivem Realteil.

Der Fall $m = n$ gestaltet sich besonders einfach, führt aber nicht zu neuen Funktionen. Nach Hilfssatz 3 ist nämlich:

$$\begin{aligned}\zeta_m(\mathfrak{S}^{(m)}, s) &= \sum_{(\mathfrak{A}^{(m)})_m} |\mathfrak{S}[\mathfrak{A}]|^{-s} = |\mathfrak{S}|^{-s} \sum_{N=1}^{\infty} B_m(N)\, N^{-2s} \\ &= |\mathfrak{S}|^{-s} \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{d|N} d^{m-1} B_{m-1}\left(\frac{N}{d}\right) N^{-2s} \\ &= |\mathfrak{S}|^{-s} \zeta(2s - m + 1)\, \zeta_{m-1}(\mathfrak{E}^{(m-1)}, s),\end{aligned}$$

wobei $\zeta(s)$ die Riemannsche Zetafunktion bedeutet. Durch Induktion folgt also:

$$\zeta_m(\mathfrak{S}^{(m)}, s) = |\mathfrak{S}|^{-s} \zeta(2s) \cdot \zeta(2s - 1) \cdots \zeta(2s - m + 1). \tag{1. 10}$$

Bei $s = m/2$ hat $\zeta_m(\mathfrak{S}, s)$ einen Pol erster Ordnung und es ist:

$$\operatorname*{Res}_{s=\frac{m}{2}} \left\{ \pi^{m\left(\frac{m-1}{4} - s\right)} \zeta_m(\mathfrak{E}^{(m)}, s) \prod_{k=0}^{m-1} \Gamma\left(s - \frac{k}{2}\right) \right\} = \pi^{\frac{1}{2} - \frac{m(m+1)}{4}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \prod_{k=2}^{m} \zeta(k)\, \Gamma\left(\frac{k}{2}\right). \tag{1. 11}$$

§ 2. Analytische Hilfsmittel.

Aus der Theorie der n-fachen Fourier-Reihen entnimmt man:

Hilfssatz 6. *Bedeutet $\mathfrak{g}' = (g_1, \ldots, g_n)$ einen Vektor mit ganzzahligen Komponenten und ist*

1) $f(\mathfrak{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ *stetig im* R_n,

2) $\sum_{\mathfrak{g}} f(\mathfrak{x} + \mathfrak{g})$ *gleichmäßig konvergent in* $-\frac{1}{2} \leqq x_k \leqq \frac{1}{2}$,

3) $\sum_{\mathfrak{g}} g(\mathfrak{g})$ *konvergent, wobei* g *definiert ist durch:*

$$g(\mathfrak{y}) = \int_{R_n} f(\mathfrak{x}) \cdot e^{-2\pi i \mathfrak{y}'\mathfrak{x}} dx_1 \cdots dx_n,$$

dann ist

$$\sum_{\mathfrak{g}} f(\mathfrak{g}) = \sum_{\mathfrak{g}} g(\mathfrak{g}),$$

wenn die Summation in beiden Fällen über alle Gitterpunkte des R_n erstreckt wird.

Weiter benötigt man einen bekannten Satz über skalare Funktionen von Matrizen:

Hilfssatz 7. *Ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{(m)}$, $|\mathfrak{A}| \neq 0$, und $f(\mathfrak{A})$ eine skalare stetige Funktion von $\mathfrak{A}$ mit der Eigenschaft $f(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = f(\mathfrak{A}) \cdot f(\mathfrak{B})$, so gilt $f(\mathfrak{A}) = |\mathfrak{A}|^c$.*

Bezeichnet man mit $d\mathfrak{X}$ das euklidische Volumenelement, d. h.

$$d\mathfrak{X} = \prod_{k \leqq l} dx_{kl}, \text{ wenn } \mathfrak{X} = \mathfrak{X}',$$

$$d\mathfrak{X} = \prod_{k,l} dx_{kl}, \text{ wenn } \mathfrak{X} = \mathfrak{X}^{(m,n)},$$

dann erlaubt Hilfssatz 7 eine einfache Berechnung der Funktionaldeterminante von Transformationen der Form $\mathfrak{Y} = \mathfrak{A}\mathfrak{X}\mathfrak{B}$. Eine leichte Rechnung ergibt:

$$(2.1)\qquad d(\mathfrak{A}^{(m)}\mathfrak{X}^{(m,n)}\mathfrak{B}^{(n)}) = \|\mathfrak{A}\|^n \|\mathfrak{B}\|^m \cdot d\mathfrak{X},\ |\mathfrak{A}| \neq 0,\ |\mathfrak{B}| \neq 0,$$

$$(2.2)\qquad d(\mathfrak{A}'\mathfrak{X}\mathfrak{A}^{(n)}) = \|\mathfrak{A}\|^{n+1} \cdot d\mathfrak{X},\ \mathfrak{X} = \mathfrak{X}',\ |\mathfrak{A}| \neq 0,$$

$$(2.3)\qquad d(\mathfrak{X}^{-1}) = \|\mathfrak{X}\|^{-n-1} \cdot d\mathfrak{X},\ \mathfrak{X} = \mathfrak{X}'.$$

Für die Epsteinschen Zetafunktionen gelingt die analytische Fortsetzung am einfachsten durch eine Integraldarstellung mit Hilfe gewisser Thetareihen. Auch im allgemeinen Falle versagt diese Methode nicht, die entsprechende Thetareihe hat die Form

$$(2.4)\qquad f(\mathfrak{S}^{(m)}, \mathfrak{X}^{(n)}) = \sum_{\mathfrak{A}} e^{-\pi\sigma(\mathfrak{S}[\mathfrak{A}]\mathfrak{X})},\ \operatorname{Re}\mathfrak{S} > 0,\ \mathfrak{X} > 0,\ m \geqq n,$$

wobei $\mathfrak{A}^{(m,n)}$ alle ganzen Matrizen durchläuft. Die Matrix $\mathfrak{S}$ kann dabei komplex genommen werden, jedoch muß ihr reeller Teil positiv sein.

Hilfssatz 8. *Die Reihe* (2. 4) *ist konvergent und es gilt*

$$f(\mathfrak{S}, \mathfrak{X}) = |\mathfrak{S}|^{-\frac{n}{2}} |\mathfrak{X}|^{-\frac{m}{2}} f(\mathfrak{S}^{-1}, \mathfrak{X}^{-1}).$$

Beweis. Für einen Konvergenzbeweis der Reihe kann man sich auf reelle $\mathfrak{S}$ beschränken. Ist also $\mathfrak{S} > 0$ und $\mathfrak{X} > 0$, s bzw. x der kleinste Eigenwert von $\mathfrak{S}$ bzw. $\mathfrak{X}$, dann gilt

$$\sigma(\mathfrak{A}'\mathfrak{S}\mathfrak{A}\mathfrak{X}) \geqq s\sigma(\mathfrak{A}'\mathfrak{A}\mathfrak{X}) \geqq x \cdot s \cdot \sigma(\mathfrak{A}'\mathfrak{A})$$

und damit

$$f(\mathfrak{S}, \mathfrak{X}) \leqq (f(1, xs))^{m \cdot n},\quad f(1, u) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\pi k^2 u},$$

d. h. die Reihe (2. 4) ist für positives $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{X}$ konvergent. Da beide Seiten der Transformationsformel für $\operatorname{Re}\mathfrak{S} > 0$ in $\mathfrak{S}$ analytisch sind, genügt es, den Beweis der Formel für reelle $\mathfrak{S}$ zu führen. Formale Anwendung von Hilfssatz 6 liefert

$$f(\mathfrak{S}, \mathfrak{X}) = \sum_{\mathfrak{B}} \int_{R_{mn}} e^{-\pi\sigma(\mathfrak{A}'\mathfrak{S}\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{X}) - 2\pi i\sigma(\mathfrak{B}'\mathfrak{A})} \cdot d\mathfrak{A},$$

wobei $\mathfrak{B}$ alle ganzen Matrizen von m Zeilen und n Spalten durchläuft. Mit

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{Y}'\mathfrak{Y},\ \mathfrak{X} = \mathfrak{Z}'\mathfrak{Z},\ \mathfrak{Y}\mathfrak{A}\mathfrak{Z} = \mathfrak{C},\ d\mathfrak{A} = |\mathfrak{S}|^{-\frac{n}{2}} |\mathfrak{X}|^{-\frac{m}{2}} d\mathfrak{C},$$

folgt dann

$$f(\mathfrak{S}, \mathfrak{X}) = \sum_{\mathfrak{B}} e^{-\pi\sigma(\mathfrak{S}^{-1}[\mathfrak{B}'\mathfrak{Z}'^{-1}])} \int_{R_{mn}} e^{-\pi\sigma(\mathfrak{S}[\mathfrak{Y}\mathfrak{A}\mathfrak{Z} + i\mathfrak{Y}'^{-1}\mathfrak{B}\mathfrak{Z}'^{-1}])} \cdot d\mathfrak{A}$$

$$= |\mathfrak{S}|^{-\frac{n}{2}} |\mathfrak{X}|^{-\frac{m}{2}} \sum_{\mathfrak{B}} e^{-\pi\sigma(\mathfrak{S}^{-1}[\mathfrak{B}]\mathfrak{X}^{-1})} \int_{R_{mn}} e^{-\pi\sigma(\mathfrak{S}[\mathfrak{C} + i\mathfrak{Y}'^{-1}\mathfrak{B}\mathfrak{Z}'^{-1}])} d\mathfrak{C},$$

$$f(\mathfrak{S}, \mathfrak{X}) = |\mathfrak{S}|^{-\frac{n}{2}} |\mathfrak{X}|^{-\frac{m}{2}} f(\mathfrak{S}^{-1}, \mathfrak{X}^{-1}),$$

denn das Integral hat den Wert 1. Da die Bedingungen für die Gültigkeit von Hilfssatz 6 erfüllt sind, ist Hilfssatz 8 richtig.

Für $n = 1$ gibt die Integraldarstellung der Gammafunktion den Zusammenhang zwischen Thetareihen und Zetafunktionen. Im Falle $n > 1$ tritt an ihre Stelle eine etwas allgemeinere Formel, die zuerst von Siegel bewiesen wurde. Definiert man

$$(2.5)\qquad G_n(s) = \Gamma(s)\,\Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right) \cdots \Gamma\left(s - \frac{n-1}{2}\right),$$

so gilt

Hilfssatz 9. *Für symmetrisches $\mathfrak{Y}^{(n)}$ mit positivem Realteil ist für $2s > n - 1$*

$$\int_{P_n} |\mathfrak{X}|^{s-\frac{n+1}{2}} e^{-\sigma(\mathfrak{X}\mathfrak{Y})} d\mathfrak{X} = \pi^{\frac{n(n-1)}{4}} \cdot G_n(s) \, |\mathfrak{Y}|^{-s}.$$

Den Beweis dieses Satzes für $2s > n + 1$ findet man bei Siegel, [2], Seite 585, Hilfssatz 37. Aus ihm geht hervor, daß die Formel noch für $2s > n - 1$ gültig ist.

Hilfssatz 10. *Ist F_n ein normaler Fundamentalbereich von P_n bei den Abbildungen $\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}[\mathfrak{U}]$, $\mathfrak{U} \in U_n$, und $v(n)$ das Volumen der Determinantenfläche $|\mathfrak{X}| = 1$ in F_n, so gilt:*

$$\int_{F_n[x]} |\mathfrak{X}|^s \, d\mathfrak{X} = -\frac{v(n)}{s + \frac{n+1}{2}} \cdot x^{s+\frac{n+1}{2}},$$

$$\int_{F_n\langle x\rangle} |\mathfrak{X}|^s \, d\mathfrak{X} = \frac{v(n)}{s + \frac{n+1}{2}} \cdot x^{s+\frac{n+1}{2}},$$

wenn $2s + n + 1 < 0$ im ersten Falle und > 0 im zweiten Falle.

Beweis. Für die erste Formel ist

$$\int_{F_n[x]} |\mathfrak{X}|^s \, d\mathfrak{X} = \int_x^\infty t^s dt \int_{F_n\langle t\rangle} dw,$$

wobei dw das Oberflächenelement

$$dw = d\mathfrak{x} \, d\mathfrak{X}_1 \cdot |\mathfrak{X}_1|^{-1}, \quad \mathfrak{X} = \begin{pmatrix} x_1 & \mathfrak{x}' \\ \mathfrak{x} & \mathfrak{X}_1 \end{pmatrix},$$

bedeutet. Daher folgt

$$\int_{F_n[x]} |\mathfrak{X}|^s \, d\mathfrak{X} = \int_x^\infty t^{s+(n-1)/2} \int_{F_n\langle 1\rangle} dw, \; s < -\frac{n+1}{2}.$$

Der Beweis für die zweite Formel verläuft analog. Für $s = 0$ ergibt sich $2v(n)/(n + 1)$ als das Volumen von $F_n(1)$, welches von Minkowski, [1], 94, Formel (85), berechnet worden ist. Im nächsten Paragraphen wird sich $v(n)$ jedoch ohne besondere Rechnung ergeben.

Für einen weiteren Hilfssatz sei für reduziertes positives $\mathfrak{X}^{(n)}$ und $\mathfrak{T}^{(r)}$

$$X_r(\mathfrak{T}, \mathfrak{X}, z) = \sum_{\mathfrak{B}} |\mathfrak{X}[\mathfrak{B}_0']|^z e^{-\pi\sigma(\mathfrak{T}\mathfrak{X}[\mathfrak{B}_0'])}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} \mathfrak{B}_1^{(n-r,n)} \\ \mathfrak{B}_0^{(r,n)} \end{pmatrix}, \tag{2. 6}$$

wobei $\mathfrak{B}$ ein volles System von nicht r-valenten unimodularen Matrizen durchläuft.

Hilfssatz 11. *Für $z \geqq 0$ gilt:*

$$|X_r(\mathfrak{T}, \mathfrak{X}, z)| \leqq |\mathfrak{T}|^{-z-\frac{n}{2}} |\mathfrak{X}|^{-\frac{r}{2}} |h(rz)|,$$

mit stetiger Funktion $h(z)$.

Beweis. Zuerst soll

$$L = \frac{\sigma(\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{X}[\mathfrak{A}_1])}{\sigma(\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{X}[\mathfrak{A}_2])}$$

unter der Nebenbedingung $|a_{ik}^{(1)} - g_{ik}| \leqq \frac{1}{2}$, $|a_{ik}^{(2)} - g_{ik}| \leqq \frac{1}{2}$, $\mathfrak{G} = (g_{ik}) \neq \mathfrak{N}$ ganz, nach oben und unten abgeschätzt werden. $\mathfrak{X}$ liege dabei in einem abgeschlossenen, ganz in $F_n[1]$ liegenden Gebiet G, während $\mathfrak{T} \geqq 0$ gewählt werde. Wegen der Homogenität von Zähler und Nenner kann man sich auf $\sigma(\mathfrak{T}) = 1$ und $\sigma(\mathfrak{X}) = 1$ beschränken. Wegen $t_{kl}^2 \leqq t_k t_l$ ist dann $|t_{kl}| \leqq 1$ und ebenso $|x_{kl}| \leqq 1$.

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt

$$\begin{aligned} |\ln L| &= \left| \sum_{i,k} (a_{ik}^{(1)} - a_{ik}^{(2)}) \frac{\partial \ln \sigma(\mathfrak{T}\cdot\mathfrak{X}[\mathfrak{A}])}{\partial a_{ik}} \right|_{\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_0}, \quad a_{ik}^{(1)} \leqq a_{ik}^{(0)} \leqq a_{ik}^{(2)}, \\ &\leqq \sum_{i,k} \frac{1}{\sigma(\mathfrak{T}\cdot\mathfrak{X}[\mathfrak{A}])} \cdot \left| \frac{\partial(\mathfrak{T}\cdot\mathfrak{X}[\mathfrak{A}])}{\partial a_{ik}} \right|_{\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_0} \\ &\leqq c_1 \frac{1}{\sigma(\mathfrak{T}\cdot\mathfrak{X}[\mathfrak{A}])} \sum_{i,k} |a_{kl}|, \end{aligned}$$

wobei c_1 und die folgenden Konstanten $c_2, \ldots$ nur von n und r abhängen. Weiter ist

$$c_2 \leqq \frac{\sigma(\mathfrak{T}\cdot\mathfrak{X}[\mathfrak{A}])}{\sigma(\mathfrak{A}'\mathfrak{A})} \leqq c_3, \quad \begin{array}{l} \mathfrak{T} > 0,\ \mathfrak{T} \text{ reduziert}, \\ \mathfrak{X} \in G, \end{array}$$

und damit

$$|\ln L| \leqq c_4 \frac{1}{\sigma(\mathfrak{A}_0'\mathfrak{A}_0)} \sum_{k,l} |a_{kl}^{(0)}| \leqq c_5$$

Man hat also

$$\frac{1}{c} \leqq L \leqq c.$$

Wegen

$$|\mathfrak{T}\cdot\mathfrak{X}[\mathfrak{A}]| \leqq (\sigma(\mathfrak{T}\cdot\mathfrak{X}[\mathfrak{A}]))^r$$

kann man die Reihe X_r mit dem Integral

$$h_1(z) = \int_{R_{nr}} (\sigma(\mathfrak{P}'\mathfrak{P}))^z e^{-\pi\sigma(\mathfrak{P}'\mathfrak{P})} d\mathfrak{P}^{(n,r)}$$

vergleichen und erhält

$$\begin{aligned} |X_r(\mathfrak{T}, \mathfrak{X}, z)| &\leqq |\mathfrak{T}|^{-z} \sum_{\mathfrak{B}} (\sigma(\mathfrak{T}\cdot\mathfrak{X}[\mathfrak{B}_0'])))^{rz} e^{-\pi\sigma(\mathfrak{T}\mathfrak{X}[\mathfrak{B}_0])} \\ &\leqq |\mathfrak{T}|^{-z} c^{rz} \int_{R_{nr}} (\sigma(\mathfrak{T}\cdot\mathfrak{X}[\mathfrak{P}]))^{rz} e^{-\pi\sigma(\mathfrak{T}\mathfrak{X}[\mathfrak{P}])/c} \cdot d\mathfrak{P} \\ &= |\mathfrak{T}|^{-z-\frac{n}{2}} |\mathfrak{X}|^{-\frac{r}{2}} c^{r\left(2z+\frac{n}{2}\right)} h_1(rz), \end{aligned}$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

§ 3. Analytische Fortsetzung und Funktionalgleichung.

Die in (2. 4) eingeführte Thetareihe schreibt man zweckmäßig etwas anders:

$$f(\mathfrak{S}^{(m)}, \mathfrak{X}^{(n)}) = 1 + \sum_{r=1}^{n} f_r(\mathfrak{S}, \mathfrak{X}), \quad m \geqq n, \tag{3. 1}$$

mit

$$f_r(\mathfrak{S}^{(m)}, \mathfrak{X}^{(n)}) = \sum_{r(\mathfrak{A})=r} e^{-\pi\sigma(\mathfrak{S}[\mathfrak{A}]\mathfrak{X})}, \quad r = 1, 2, \ldots, n, \tag{3. 2}$$

wobei über alle ganzen $\mathfrak{A}^{(m,n)}$ vom Rang r zu summieren ist. Nach Hilfssatz 2 wird dann

$$\begin{aligned} f_r(\mathfrak{S}, \mathfrak{X}) &= \sum_{(\mathfrak{A}_1^{(m,r)})_r} \sum_{\mathfrak{B}} e^{-\pi\sigma\left(\mathfrak{B}'\binom{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{A}_1'}\mathfrak{S}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1)\mathfrak{B}\mathfrak{X}\right)} \\ &= \sum_{(\mathfrak{A}_1^{(m,r)})_r} \sum_{\mathfrak{B}} e^{-\pi\sigma(\mathfrak{S}[\mathfrak{A}_1]\mathfrak{X}[\mathfrak{B}_0'])}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} \mathfrak{B}_1^{(n-r,n)} \\ \mathfrak{B}_0^{(r,n)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Matrizen $\mathfrak{B}^{(n)}$ sollen stets ein volles System von nicht r-valenten unimodularen Matrizen durchlaufen, bei $r = n$ also alle Elemente von U_n. Durch Einführung der Darstellungsanzahlen folgt

$$(3.3)\quad f_r(\mathfrak{S}, \mathfrak{X}) = \sum_{\{\mathfrak{T}\}>0} a(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})\, g_r(\mathfrak{T}, \mathfrak{X}),\ a(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}) = \frac{A(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})}{E(\mathfrak{T})},\ r = 1, \ldots, n,$$

mit

$$(3.4)\qquad g_r(\mathfrak{T}^{(r)}, \mathfrak{X}^{(n)}) = \sum_{\mathfrak{B}} e^{-\pi\sigma(\mathfrak{T}\cdot\mathfrak{X}[\mathfrak{B}_0])}.$$

Ist jetzt F_n ein beliebiger Fundamentalbereich von P_n, so folgt mit Hilfssatz 9:

$$\int_{F_n} g_n(\mathfrak{T}, \mathfrak{X})\, |\mathfrak{X}|^{s-\frac{n+1}{2}}\, d\mathfrak{X} = \sum_{\mathfrak{U}\in U_n} \int_{F_n} e^{-\pi\sigma(\mathfrak{T}\mathfrak{X}[\mathfrak{U}])}\, |\mathfrak{X}|^{s-\frac{n+1}{2}}\, d\mathfrak{X}$$

$$= 2\int_{P_n} e^{\pi\sigma(\mathfrak{T}\mathfrak{X})}\, |\mathfrak{X}|^{s-\frac{n+1}{2}}\, d\mathfrak{X}$$

$$= 2\,|\mathfrak{T}|^{-s}\cdot \pi^{n\left(\frac{n-1}{4}-s\right)}\cdot G_n(s).$$

Bezeichnet man nun

$$(3.5)\qquad R_n(\mathfrak{S}^{(m)}, s) = \pi^{n\left(\frac{n-1}{4}-s\right)}\cdot G_n(s)\cdot \zeta_n(\mathfrak{S}^{(m)}, s),\ \operatorname{Re} s > \frac{m}{2},$$

so folgt mit (3. 1) und (3. 3)

$$(3.6)\qquad 2\,R_n(\mathfrak{S}^{(m)}, s) = \int_{F_n} f_n(\mathfrak{S}, \mathfrak{X})\, |\mathfrak{X}|^{s-\frac{n+1}{2}}\, d\mathfrak{X},\ \operatorname{Re} s > \frac{m}{2},$$

und diese Integraldarstellung gilt für jeden Fundamentalbereich F_n von P_n. Nimmt man speziell einen Fundamentalbereich F_n^* von Hilfssatz 4, so kann man das Integral zerlegen und mit (2. 3) folgt

$$(3.7)\qquad 2\,R_n(\mathfrak{S}^{(m)}, s) = \int_{F_n[1]} \left\{ f_n(\mathfrak{S}, \mathfrak{X})\, |\mathfrak{X}|^{s} + f_n(\mathfrak{S}, \mathfrak{X}^{-1})\, |\mathfrak{X}|^{-s} \right\} \frac{d\mathfrak{X}}{|\mathfrak{X}|^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Setzt man $f_0(\mathfrak{S}, \mathfrak{X}) = 1$, so ist nach (3. 1) und Hilfssatz 8

$$f_n(\mathfrak{S}, \mathfrak{X}^{-1}) = |\mathfrak{S}|^{-\frac{n}{2}}\, |\mathfrak{X}|^{\frac{m}{2}}\, f_n(\mathfrak{S}^{-1}, \mathfrak{X}) + \sum_{r=0}^{n-1} \left\{ |\mathfrak{S}|^{-\frac{n}{2}}\, |\mathfrak{X}|^{\frac{m}{2}}\, f_r(\mathfrak{S}^{-1}, \mathfrak{X}) - f_r(\mathfrak{S}, \mathfrak{X}^{-1}) \right\}$$

und nach Eintragen in (3. 7) kann man die Integrale für $r = 0$ nach Hilfssatz 10 berechnen:

$$(3.8)\quad 2\,R_n(\mathfrak{S}^{(m)}, s) = H_n(\mathfrak{S}, s) + v(n) \left\{ \frac{|\mathfrak{S}|^{-\frac{n}{2}}}{s-\frac{m}{2}} - \frac{1}{s} \right\}$$

$$+ \sum_{r=1}^{n-1} \int_{F_n[1]} \left\{ |\mathfrak{S}|^{-\frac{n}{2}}\, |\mathfrak{X}|^{\frac{m}{2}-s}\, f_r(\mathfrak{S}^{-1}, \mathfrak{X}) - |\mathfrak{X}|^{-s}\, f_r(\mathfrak{S}, \mathfrak{X}^{-1}) \right\} \frac{d\mathfrak{X}}{|\mathfrak{X}|^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$H_n(\mathfrak{S}^{(m)}, s) = \int_{F_n[1]} \left\{ f_n(\mathfrak{S}, \mathfrak{X})\, |\mathfrak{X}|^{s} + |\mathfrak{S}|^{-\frac{n}{2}}\, f_n(\mathfrak{S}^{-1}, \mathfrak{X})\, |\mathfrak{X}|^{\frac{m}{2}-s} \right\} \frac{d\mathfrak{X}}{|\mathfrak{X}|^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Ist $s = x + iy$, so gilt für alle s

$$|H_n(\mathfrak{S}, s)| \leqq H_n(\mathfrak{S}, x)$$

$$\leqq \int_{F_n[1]} \left\{ f_n(\mathfrak{S}, \mathfrak{X})\, |\mathfrak{X}|^{|x|+m} + |\mathfrak{S}|^{-\frac{n}{2}}\, |\mathfrak{X}|^{|x|+m}\, f_n(\mathfrak{S}^{-1}, \mathfrak{X}) \right\} \frac{d\mathfrak{X}}{|\mathfrak{X}|^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$\leqq 2\left\{ R_n(\mathfrak{S}, |x|+m) + |\mathfrak{S}|^{-\frac{n}{2}}\, R_n(\mathfrak{S}^{-1}, |x|+m) \right\},$$

d. h. $H_n(\mathfrak{S}, s)$ ist für alle s regulär analytisch und es gilt

$$H_n(\mathfrak{S}^{(m)}, s) = |\mathfrak{S}|^{-\frac{n}{2}} H_n(\mathfrak{S}^{-1}, \frac{m}{2} - s). \tag{3. 9}$$

Für $\operatorname{Re} s > m/2$ muß also auch die Summe in (3. 8) in s regulär sein, denn $R_n(\mathfrak{S}, s)$ ist in dieser Halbebene regulär.

Für die Summe in (3. 8) sei nun mit (2. 6)

$$Y_r(\mathfrak{S}, \mathfrak{X}, z) = \sum_{\{\mathfrak{T}^{(r)}\} > 0} a(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})\, X_r(\mathfrak{T}, \mathfrak{X}, z) \tag{3. 10}$$

$$Z_r(\mathfrak{S}, s, z) = \int_{F_n[1]} \left\{ |\mathfrak{S}|^{-\frac{n}{2}} |\mathfrak{X}|^{\frac{m}{2}-s} Y_r(\mathfrak{S}^{-1}, \mathfrak{X}, z) - |\mathfrak{X}|^{-s} Y_r(\mathfrak{S}, \mathfrak{X}^{-1}, z) \right\} \frac{d\mathfrak{X}}{|\mathfrak{X}|^{\frac{n+1}{2}}} \tag{3. 11}$$

und (3. 8) schreibt sich dann

$$2\, R_n(\mathfrak{S}, s) = H_n(\mathfrak{S}, s) + v(n) \left\{ \frac{|\mathfrak{S}|^{-\frac{n}{2}}}{s - \frac{m}{2}} - \frac{1}{s} \right\} + \sum_{r=1}^{n-1} Z_r(\mathfrak{S}, s, z) \Big|_{z=0}. \tag{3. 12}$$

Zur Berechnung dieser Ausdrücke faßt man $Z_r(\mathfrak{S}, s, z)$ bei festem s als Funktion von z auf. Wegen Hilfssatz 11 kann man in (3. 11) die Summation mit der Integration vertauschen, wenn $\operatorname{Re} z > (m - n)/2$ ist. Man berechnet dann zuerst die Integrale über $X_r(\mathfrak{T}, \mathfrak{X}, z)$. Das ergibt

$$\int_{F_n[1]} |\mathfrak{X}|^{\frac{m}{2}-s-\frac{n+1}{2}} X_r(\mathfrak{T}, \mathfrak{X}, z)\, d\mathfrak{X} = 2 \int_{D_n^r[1]} |\mathfrak{X}|^{\frac{m}{2}-s-\frac{n+1}{2}} |\mathfrak{X}_2|^z e^{-\pi\sigma(\mathfrak{T}\mathfrak{X}_2)}\, d\mathfrak{X},$$

wobei nach Vertauschung der Integration mit der Summation gliedweise die Substitution $\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}[\mathfrak{V}'^{-1}]$ durchgeführt wurde. Da $\mathfrak{V}$ und $-\mathfrak{V}$ dasselbe Bild von $F_n[1]$ ergeben, erhält man als Vereinigungsmenge dieser Bilder einen Fundamentalbereich $D_n^r[1]$ von $P_n[1]$ bzgl. $U_n(r)$ zweimal. Auf der rechten Seite ist

$$\mathfrak{X}^{(n)} = \begin{pmatrix} \mathfrak{X}_1 & \mathfrak{X}_{12} \\ \mathfrak{X}'_{12} & \mathfrak{X}_2^{(r)} \end{pmatrix}.$$

Man substituiert jetzt

$$\mathfrak{X}^{(n)} = \begin{pmatrix} \mathfrak{H} + \mathfrak{P}\mathfrak{X}_2\mathfrak{P}' & \mathfrak{P}\mathfrak{X}_2 \\ \mathfrak{X}_2\mathfrak{P}' & \mathfrak{X}_2^{(r)} \end{pmatrix}$$

mit der Funktionaldeterminante

$$\frac{d(\mathfrak{X})}{d(\mathfrak{H}, \mathfrak{P}, \mathfrak{X}_2)} = \begin{vmatrix} \frac{d(\mathfrak{H} + \mathfrak{P}\mathfrak{X}_2\mathfrak{P}')}{d(\mathfrak{H})} & \frac{d(\mathfrak{H} + \mathfrak{P}\mathfrak{X}_2\mathfrak{P}')}{d(\mathfrak{P})} & \frac{d(\mathfrak{H} + \mathfrak{P}\mathfrak{X}_2\mathfrak{P}')}{d(\mathfrak{X}_2)} \\ \frac{d(\mathfrak{P}\mathfrak{X}_2)}{d(\mathfrak{H})} & \frac{d(\mathfrak{P}\mathfrak{X}_2)}{d(\mathfrak{P})} & \frac{d(\mathfrak{P}\mathfrak{X}_2)}{d(\mathfrak{X}_2)} \\ \frac{d(\mathfrak{X}_2)}{d(\mathfrak{H})} & \frac{d(\mathfrak{X}_2)}{d(\mathfrak{P})} & \frac{d(\mathfrak{X}_2)}{d(\mathfrak{X}_2)} \end{vmatrix} = \frac{d(\mathfrak{P}\mathfrak{X}_2)}{d(\mathfrak{P})} = |\mathfrak{X}_2|^{n-r}.$$

Dann folgt für die rechte Seite

$$2 \cdot \int_{F_{n-r}} d\mathfrak{H} \int_{Q_{n,r}} d\mathfrak{P} \int_{\substack{P_r \\ |\mathfrak{H}| \cdot |\mathfrak{X}_2| \geq 1}} d\mathfrak{X}_2 (|\mathfrak{H}| \cdot |\mathfrak{X}_2|)^{\frac{m}{2}-s-\frac{n+1}{2}} |\mathfrak{X}_2|^{z+n-r} e^{-\pi\sigma(\mathfrak{T}\mathfrak{X}_2)}$$

und nach der Substitution $\mathfrak{H} \to |\mathfrak{X}_2|^{-\frac{1}{n-r}} \cdot \mathfrak{H}$ weiter

$$\int\limits_{F_{n-r}[1]} d\mathfrak{H} \int\limits_{F_r} d\mathfrak{X}_2 \, |\mathfrak{H}|^{\frac{m}{2}-s-\frac{n+1}{2}} \, |\mathfrak{X}_2|^{s+\frac{n-r-1}{2}} \, e^{-\pi\sigma(\mathfrak{T}\mathfrak{X}_2)}.$$

Mit Hilfssatz 9 und 10 ergibt sich endlich

$$(3.\,13) \qquad \int\limits_{F_n[1]} |\mathfrak{X}|^{\frac{m}{2}-s-\frac{n+1}{2}} X_r(\mathfrak{T}, \mathfrak{X}, z)\, d\mathfrak{X}$$

$$= \frac{v(n-r)}{s-\frac{m-r}{2}} G_r\left(z+\frac{n}{2}\right) \cdot |\mathfrak{T}|^{-\left(z+\frac{n}{2}\right)} \pi^{-r\left(z+\frac{n}{2}\right)+\frac{r(r-1)}{4}},$$

und analog dazu

$$(3.\,14) \qquad \int\limits_{F_n[1]} |\mathfrak{X}|^{-s-\frac{n+1}{2}} X_r(\mathfrak{T}, \mathfrak{X}^{-1}, z)\, d\mathfrak{X}$$

$$= \frac{v(n-r)}{s-\frac{r}{2}} G_r\left(z+\frac{n}{2}\right) |\mathfrak{T}|^{-\left(z+\frac{n}{2}\right)} \pi^{-r\left(z+\frac{n}{2}\right)+\frac{r(r-1)}{4}}.$$

Für (3. 11) erhält man also

$$(3.\,15) \quad Z_r(\mathfrak{S}, s, z) = v(n-r) \left\{ \frac{|\mathfrak{S}|^{-\frac{n}{2}}}{s-\frac{m-r}{2}} R_r\left(\mathfrak{S}^{-1}, z+\frac{n}{2}\right) - \frac{1}{s-\frac{r}{2}} R_r\left(\mathfrak{S}, z+\frac{n}{2}\right) \right\}.$$

Setzt man noch $R_0(\mathfrak{S}, s) = 1$, dann folgt aus (3. 12)

$$(3.\,16) \qquad R_n(\mathfrak{S}, s) - \frac{1}{2} H_n(\mathfrak{S}, s)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sum_{r=0}^{n-1} v(n-r) \left\{ \frac{|\mathfrak{S}|^{-\frac{n}{2}}}{s-\frac{m-r}{2}} R_r\left(\mathfrak{S}^{-1}, z+\frac{n}{2}\right) - \frac{1}{s-\frac{r}{2}} R_r\left(\mathfrak{S}, z+\frac{n}{2}\right) \right\} \Bigg|_{z=0}.$$

Satz 1. *Die Funktion* $\zeta_n(\mathfrak{S}^{(m)}, s)$, $m \geqq n$, $\operatorname{Re} \mathfrak{S} > 0$, *ist für alle* s *bis auf Pole erster Ordnung regulär und genügt der Funktionalgleichung*

$$R_n(\mathfrak{S}, s) = |\mathfrak{S}|^{-\frac{n}{2}} R_n\left(\mathfrak{S}^{-1}, \frac{m}{2}-s\right),$$

wobei $R_n(\mathfrak{S}, s)$ *durch* (3. 5) *definiert ist.*

Beweis. Da $R_n(\mathfrak{S}, s)$ in $\mathfrak{S}$ für $\operatorname{Re} \mathfrak{S} > 0$ analytisch ist, kann man sich im Beweis auf reelle $\mathfrak{S}$ beschränken. Zu einem Induktionsbeweis nach n nimmt man an, daß der Satz für alle Zahlen $< n$ bewiesen sei, dann ist $Z_r(\mathfrak{S}, s, z)$ in s und z bis auf Pole regulär und da die rechte Seite von (3. 16) einen endlichen Wert haben muß, müssen sich notwendig die eventuellen Pole in z bei $z = 0$ wegheben. Durch eine leichte Rechnung kann man sich auch direkt davon überzeugen. Damit ist auch $R_n(\mathfrak{S}, s)$ über die ganze s-Ebene fortsetzbar, und wenn man $R_r(\mathfrak{S}, n/2)$ durch Null ersetzt, sobald $R_r(\mathfrak{S}, s)$ bei $s = n/2$ einen Pol hat, kann man schreiben

$$(3.17)\qquad R_n(\mathfrak{S}, s) - \frac{1}{2} H_n(\mathfrak{S}, s)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sum_{r=0}^{n-1} v(n-r) \left\{ \frac{|\mathfrak{S}|^{-\frac{n}{2}}}{s - \frac{m-r}{2}} R_r\left(\mathfrak{S}^{-1}, \frac{n}{2}\right) - \frac{1}{s - \frac{r}{2}} R_r\left(\mathfrak{S}, \frac{n}{2}\right) \right\}.$$

$R_n(\mathfrak{S}, s)$ hat also höchstens bei

$$s = \frac{r}{2} \text{ und } s = \frac{m-r}{2},\ r = 0, 1, \ldots, n-1,$$

einen Pol erster Ordnung. Da $G_n(s) \neq 0$ ist, gilt diese Aussage auch für $\zeta_n(\mathfrak{S}, s)$, welches jedoch nur Pole erster Ordnung bei

$$s = \frac{m-r}{2},\ r = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

besitzt, da die Pole von $R_n(\mathfrak{S}, s)$ bei $s = r/2$ durch $G_n(s)$ erzeugt werden. Ist $[x]$ der ganze Anteil der reellen Zahl x, dann hat $\zeta_n(\mathfrak{S}, s)$ bei

$$\begin{array}{lll}
s = -g & \text{eine Nullstelle der Ordnung } \left[\frac{n+1}{2}\right], & g = 0, 1, 2, \ldots, \\
s = -g + \frac{1}{2} & \text{eine Nullstelle der Ordnung } \left[\frac{n}{2}\right], & g = 0, 1, 2, \ldots, \\
s = g & \text{eine Nullstelle der Ordnung } \left[\frac{n+1}{2}\right] - g - 1, & g = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n-1}{2}\right], \\
s = g + \frac{1}{2} & \text{eine Nullstelle der Ordnung } \left[\frac{n}{2}\right] - g - 1, & g = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right] - 1.
\end{array}$$

Die Funktionalgleichung ergibt sich sofort aus (3. 9) und (3. 17), womit der Satz 1 bewiesen ist.

Das Residuum von $\zeta_n(\mathfrak{S}^{(m)}, s)$ bei $s = \frac{m}{2}$ ergibt sich dabei zu

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{v(n)}{G_n\left(\frac{m}{2}\right)} \cdot \pi^{n\left(\frac{m}{2} - \frac{n-1}{4}\right)} \cdot |\mathfrak{S}|^{-\frac{n}{2}}.$$

Für $m = n$ kann man sich nach § 1 auf $\mathfrak{S} = \mathfrak{E}$ beschränken. $R_m(\mathfrak{E}^{(m)}, s)$ hat bei $s = \frac{m}{2}$ das Residuum $\frac{v(m)}{2}$ und nach (1. 11) folgt damit

$$(3.18)\qquad v(m) = \pi^{\frac{1}{2} - \frac{m(m+1)}{4}} \prod_{k=2}^{m} \zeta(k)\, \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)$$

in Übereinstimmung mit dem Ergebnis von Minkowski ([1]), 94, Formel (85)). Man vergleiche dazu Siegel [3] und [7].

§ 4. Dirichlet-Reihen und Modulformen n-ten Grades.

Die bisher bewiesene Funktionalgleichung gewisser Zetafunktionen wird über eine Integraldarstellung durch eine Transformationsformel von Thetareihen hervorgerufen. Der Beweis dieser Transformationsformel in Hilfssatz 8 wurde durch Anwendung der Poissonschen Summationsformel geführt. Man wird nun die Methode des § 3 auf alle die Funktionen anwenden können, die eine Hilfssatz 8 analoge Transformationsformel besitzen, sofern diese Funktionen eine Fourierentwicklung gestatten und gewisse Konvergenz-

bedingungen erfüllt sind. Durch die Arbeiten von Hecke ([9]) wird im allgemeinen Falle nahegelegt, die Methode auf die von Siegel ([4]) eingeführten Modulformen n-ten Grades anzuwenden.

Nach Siegel bezeichnet man die Gruppe M_n der $2n$-reihigen Matrizen $\mathfrak{M}$ mit der Eigenschaft

$$(4.1)\quad \mathfrak{J}[\mathfrak{M}] = \mathfrak{J} = \mathfrak{J}[\mathfrak{M}'],\ \mathfrak{M}^{(2n)} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{D}^{(n)} \end{pmatrix} \text{ ganz},\ \mathfrak{J}^{(2n)} = \begin{pmatrix} \mathfrak{N} & \mathfrak{E} \\ -\mathfrak{E} & \mathfrak{N} \end{pmatrix},$$

als *homogene Modulgruppe n-ten Grades.* Damit $\mathfrak{M}$ ein Element von M_n ist, ist

$$(4.2)\qquad \mathfrak{A}\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}\mathfrak{A}',\ \mathfrak{C}\mathfrak{D}' = \mathfrak{D}\mathfrak{C}',\ \mathfrak{A}\mathfrak{D}' - \mathfrak{B}\mathfrak{C}' = \mathfrak{E}$$

notwendig und hinreichend. Mit H_n bezeichnet man den Raum der $n(n+1)/2$ komplexen Variablen

$$\mathfrak{Z}^{(n)} = \mathfrak{X} + i\mathfrak{Y} = (z_{kl}) = \mathfrak{Z}',\ \mathfrak{Y} > 0.$$

Bei der Abbildung

$$(4.3)\qquad \mathfrak{W} = \mathfrak{M}(\mathfrak{Z}) = (\mathfrak{A}\mathfrak{Z} + \mathfrak{B})(\mathfrak{C}\mathfrak{Z} + \mathfrak{D})^{-1},\ \mathfrak{M} \in M_n,$$

geht H_n in sich über und dieselbe Abbildung liefern nur $\mathfrak{M}$ und $-\mathfrak{M}$. Die Gruppe der verschiedenen Abbildungen (4. 3) bezeichnet man auch als *inhomogene Modulgruppe n-ten Grades* M_n'. Es besitzt H_n einen Fundamentalbereich E_n bezüglich der Abbildungen aus M_n', und man kann als E_n speziell die Punkte $\mathfrak{Z} \in H_n$ wählen, für die

$$(4.4)\qquad \|\mathfrak{C}\mathfrak{Z} + \mathfrak{D}\| \geqq 1,\ \mathfrak{Y} \in \mathfrak{F}_n,\ -\tfrac{1}{2} \leqq x_{kl} \leqq \tfrac{1}{2},\ k, l = 1, \ldots, n,$$

gleichzeitig gilt. $\mathfrak{F}_n$ sei wieder der Raum der reduzierten positiven Matrizen. Unter einer *Modulform n-ten Grades vom Gewicht k* versteht man dann eine Funktion $\varphi(\mathfrak{Z})$ mit folgenden Eigenschaften:

1) $\varphi(\mathfrak{Z})$ ist in H_n eine reguläre analytische Funktion der $n(n+1)/2$ Variablen z_{kl},
2) $\varphi(\mathfrak{Z})$ ist in E_n beschränkt,
3) für jedes $\mathfrak{M} \in M_n$ gilt

$$\varphi(\mathfrak{M}(\mathfrak{Z})) = |\mathfrak{C}\mathfrak{Z} + \mathfrak{D}|^k \cdot \varphi(\mathfrak{Z})$$

mit einer festen geraden Zahl k.

Für $k \leqq 0$ ist $\varphi(\mathfrak{Z})$ stets identisch konstant. Jede Modulform besitzt dann eine Fourier-Entwicklung in H_n

$$\varphi(\mathfrak{Z}) = \sum_{\mathfrak{T} \geqq 0} A_0(\mathfrak{T})\, e^{2\pi i \sigma(\mathfrak{T}\mathfrak{Z})},\ A_0(\mathfrak{T}[\mathfrak{U}]) = A_0(\mathfrak{T}),\ \mathfrak{U} \in U_n,$$

bei der über alle halbganzen Matrizen $\mathfrak{T}^{(n)}$ zu summieren ist, für die $\mathfrak{T}[\mathfrak{x}] \geqq 0$ für reelle $\mathfrak{x}$ gilt. $\mathfrak{T}$ heißt dabei *halbganz*, wenn t_{kk} und $2\,t_{kl}$ ganze Zahlen sind.

Setzt man nun $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}$ und $\varphi(i\mathfrak{Y}) = f(\mathfrak{Y})$, so wird auch $f(\mathfrak{Y})$ als Modulform n-ten Grades bezeichnet werden. Für $f(\mathfrak{Y})$ gilt dann:

1) $f(\mathfrak{Y})$ ist in P_n regulär in den Variablen $y_{kl} = y_{lk}$,
2) in $\mathfrak{F}_n$ gilt mit $\mathfrak{Y} = (y_{ik})$, $y_{kk} = y_k$

$$|f(\mathfrak{Y})| \leqq \mathrm{c} \cdot \prod_{i=1}^{n} (1 + y_i^{-k}),$$

3) für $\mathfrak{Y} \in P_n$ gilt

$$f(\mathfrak{Y}^{-1}) = (-1)^{nk/2}\, |\mathfrak{Y}|^k f(\mathfrak{Y}),\quad f(\mathfrak{Y}[\mathfrak{U}]) = f(\mathfrak{Y}),\quad \mathfrak{U} \in U_n.$$

Setzt man $A(\mathfrak{T}) = 0$, wenn $\frac{1}{2}\mathfrak{T}$ nicht halbganz ist, so besitzt $f(\mathfrak{Y})$ eine Fourier-Entwicklung

$$(4.5)\qquad f(\mathfrak{Y}) = \sum_{\mathfrak{T} \geqq 0} A(\mathfrak{T}) \cdot e^{-\pi\sigma(\mathfrak{T}\mathfrak{Y})},\ A(\mathfrak{T}[\mathfrak{U}]) = A(\mathfrak{T}), A(\mathfrak{T}) = A_0(\tfrac{1}{2}\mathfrak{T}),$$

wobei über alle ganzen $\mathfrak{T}' = \mathfrak{T} \geqq 0$ zu summieren ist. Um $f(\mathfrak{Y})$ in Teilreihen aufspalten zu können, benötigt man eine Hilfssatz 2 analoge Aussage:

Hilfssatz 12. *Durchläuft $\mathfrak{V}$ ein volles System von nicht r-valenten unimodularen Matrizen, so erhält man in*

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_0[\mathfrak{V}],\ \mathfrak{T}_0 = \begin{pmatrix} \mathfrak{N} & \mathfrak{N} \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{W} \end{pmatrix},\ \mathfrak{W}^{(r)} \text{ fest},\ 0 < r \leqq n$$

alle zu $\mathfrak{T}_0$ äquivalenten Matrizen genau $E(\mathfrak{W})$-mal.

Beweis. Für $r = n$ ist die Aussage richtig, da $\mathfrak{V}$ dann alle unimodularen Matrizen zu durchlaufen hat. Sei also $0 < r < n$ und $r(\mathfrak{T}) = r$. Nach Hilfssatz 1 gibt es in der Klasse von $\mathfrak{T}$ einen Repräsentanten

$$\mathfrak{T}_0 = \begin{pmatrix} \mathfrak{N} & \mathfrak{N} \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{W} \end{pmatrix},\ |\mathfrak{W}^{(r)}| \neq 0,$$

und es ist $\mathfrak{T} \sim \mathfrak{T}_0$ gleichbedeutend mit $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_0[\mathfrak{V}]$; denn $\mathfrak{T}$ hängt nur von den letzten r Zeilen von $\mathfrak{V}$ ab. Ist nun $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2$, d. h.

$$\mathfrak{T}_0[\mathfrak{V}_1] = \mathfrak{T}_0[\mathfrak{V}_2],\ \mathfrak{T}_0 = \mathfrak{T}_0[\mathfrak{U}],\ \mathfrak{U} = \mathfrak{V}_2\mathfrak{V}_1^{-1},$$

dann folgt für $\mathfrak{U}$ notwendig

$$\mathfrak{U} = \begin{pmatrix} \mathfrak{U}_1 & \mathfrak{V} \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{E} & \mathfrak{N} \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{U}_2 \end{pmatrix} \mathfrak{G},\quad \mathfrak{G} \in U_n(r),\ \mathfrak{U}_2 \text{ Einheit von } \mathfrak{W},$$

also

$$\mathfrak{V}_2 = \begin{pmatrix} \mathfrak{E} & \mathfrak{N} \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{U}_2 \end{pmatrix} \mathfrak{G}\mathfrak{V}_1,\quad \mathfrak{G} \in U_n(r).$$

In $\mathfrak{T}_0[\mathfrak{V}]$ ergeben also $\mathfrak{V}$ und $\begin{pmatrix} \mathfrak{E} & \mathfrak{N} \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{U}_2 \end{pmatrix} \mathfrak{G}\mathfrak{V}$ dasselbe $\mathfrak{T}$. Da $\mathfrak{V}$ alle nicht r-valenten Matrizen durchläuft, wird $\mathfrak{T}$ bei festem $\mathfrak{W}$ genau $E(\mathfrak{W})$-mal dargestellt.

Da $\mathfrak{W} > 0$ mit $\mathfrak{T}_0 \geqq 0$ gleichbedeutend ist, kann man nun mit Hilfssatz 12 für (4. 5) schreiben:

$$(4.\,6)\qquad f(\mathfrak{Y}) = \sum_{r=0}^{n} f_r(\mathfrak{Y}),\quad f_0(\mathfrak{Y}) = A(\mathfrak{N}),$$

$$f_r(\mathfrak{Y}) = \sum_{\substack{r(\mathfrak{T})=r \\ \mathfrak{T}\geqq 0}} A(\mathfrak{T}) \cdot e^{-\pi\sigma(\mathfrak{T}\mathfrak{Y})}$$

$$= \sum_{\{\mathfrak{W}\}>0} A\left(\begin{pmatrix} \mathfrak{N} & \mathfrak{N} \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{W} \end{pmatrix}\right) \sum_{\mathfrak{S}\sim\begin{pmatrix} \mathfrak{N} & \mathfrak{N} \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{W} \end{pmatrix}} e^{-\pi\sigma(\mathfrak{S}\mathfrak{Y})},$$

$$(4.\,7)\qquad f_r(\mathfrak{Y}) = \sum_{\{\mathfrak{W}\}>0} a(\mathfrak{W}) \cdot g_r(\mathfrak{W}^{(r)}, \mathfrak{Y}^{(n)}),\quad a(\mathfrak{W}) = \frac{A\left(\begin{pmatrix} \mathfrak{N} & \mathfrak{N} \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{W} \end{pmatrix}\right)}{E(\mathfrak{W})},$$

wobei g_r die Bedeutung (3. 4) hat.

Durch einen einfachen Grenzprozeß kann man jeder Modulform n-ten Grades vom Gewicht k eine Modulform m-ten Grades, $0 < m < n$, vom gleichen Gewicht zuordnen. Dazu sei

$$\mathfrak{Y}^{(n)} = \begin{pmatrix} \lambda\mathfrak{E}^{(n-m)} & \mathfrak{N} \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{Y}_1^{(m)} \end{pmatrix},\ \lambda > 0,\ \mathfrak{Y}_1 > 0,$$

dann ist $\mathfrak{Y}$ positiv. Siegel hat bewiesen, daß der Grenzwert

$$\lim_{\lambda\to\infty} f(\mathfrak{Y})$$

für $m = n - 1$ existiert und in (4. 5) gliedweise ausgeführt werden darf; er ergibt eine Modulform $(n-1)$-ten Grades vom Gewicht k. Durch wiederholte Anwendung dieses Ergebnisses zeigt sich, daß

$$\lim_{\lambda\to\infty} f(\mathfrak{Y}) = f^{(m)}(\mathfrak{Y}_1^{(m)}), \quad \mathfrak{Y}^{(n)} = \begin{pmatrix} \lambda\mathfrak{E} & \mathfrak{N} \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{Y}_1^{(m)} \end{pmatrix},$$

existiert, in (4. 5) gliedweise ausgeführt werden darf und $f^{(m)}$ eine Modulform m-ten Grades vom Gewicht k darstellt. Zur Bestimmung der Fourier-Entwicklung von $f^{(m)}$ untersucht man zuerst den Grenzwert in der Reihe (3. 4). Ist

$$\mathfrak{B}_0^{(r,n)} = (\mathfrak{B}_2^{(r,n-m)}\,\mathfrak{B}_3^{(r,m)}), \quad 0 < m < n,$$

so wird

$$\sigma(\mathfrak{W}\mathfrak{Y}[\mathfrak{B}_0']) = \lambda\,\sigma(\mathfrak{W}[\mathfrak{B}_2']) + \sigma(\mathfrak{W}\mathfrak{G}_1[\mathfrak{B}_3'])$$

und da $\mathfrak{W} > 0$ ist, folgt

$$\lim_{\lambda\to\infty} g_r(\mathfrak{W}^{(r)}, \mathfrak{Y}) = \sum_{\substack{\mathfrak{B} \\ \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{N}}} e^{-\pi\sigma(\mathfrak{W}\mathfrak{Y}_1[\mathfrak{B}_3'])}, \quad 0 < r \leqq n, \tag{4. 8}$$

wobei über ein volles System von nicht r-valenten unimodularen Matrizen, für die noch $\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{N}$ ist, zu summieren ist. Für $n \geqq r > m$ gibt es keine Matrizen $\mathfrak{B}$ mit dieser Eigenschaft, denn sonst müßte $|\mathfrak{B}| = 0$ sein, also ist der Grenzwert Null. Sei nun $m \geqq r \geqq 1$. Da zwei Matrizen aus U_n dann und nur dann r-valent sind, wenn sie in den letzten r Zeilen übereinstimmen, ist in (4. 8) über alle verschiedenen primitiven Matrizen $\mathfrak{B}_3$ zu summieren. Diese Matrizen sind zu unimodularen Matrizen von m Zeilen und Spalten ergänzbar und durchlaufen dann genau ein volles System von nicht r-valenten Matrizen. Also

$$\lim_{\lambda\to\infty} g_r(\mathfrak{W}^{(r)}, \mathfrak{Y}^{(n)}) = g_r(\mathfrak{W}^{(r)}, \mathfrak{Y}_1^{(m)}), \quad 1 \leqq r \leqq m,$$

und

$$f^{(m)}(\mathfrak{Y}_1) = \lim_{\lambda\to\infty} f(\mathfrak{Y}) = \sum_{r=0}^{m} f_r^{(m)}(\mathfrak{Y}_1), \quad f_0(\mathfrak{Y}_1) = A(\mathfrak{N}), \tag{4. 9}$$

$$f_r^{(m)}(\mathfrak{Y}_1) = \sum_{\{\mathfrak{W}\}>0} a(\mathfrak{W}) \cdot g_r(\mathfrak{W}^{(r)}, \mathfrak{Y}_1^{(m)}).$$

Um die Konvergenz der aus den Fourier-Koeffizienten von $f_n(\mathfrak{Y})$ zu bildenden Dirichlet-Reihe sicherzustellen, braucht man eine Abschätzung dieser Koeffizienten nach oben. Es genügt, die Abschätzung für $r = n$ durchzuführen, denn nach (4. 9) überträgt sich die Aussage auf alle r.

Hilfssatz 13. *Für $|\mathfrak{T}| \neq 0$ gilt für die Fourier-Koeffizienten einer Modulform n-ten Grades vom Gewicht k*

$$|A(\mathfrak{T}^{(n)})| \leqq c\,|\mathfrak{T}|^k,$$

wobei die positive Konstante c nur von der Modulform abhängt.

Beweis. In Verwendung eines Gedankenganges von H. Braun geht man von der Modulform $\varphi(\mathfrak{Z})$ aus. Es sei $\mathfrak{Z}$ ein beliebiger Punkt von H_n. Wegen $\varphi(\mathfrak{Z}) = \varphi(\mathfrak{Z}[\mathfrak{U}])$ kann man bei $\mathfrak{Z} = \mathfrak{X} + i\mathfrak{Y}$ annehmen, daß $\mathfrak{Y}^{-1}$ reduziert ist. Nun bestimmt man $\mathfrak{M}_1 \in M_n$ derart, daß $\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{M}_1(\mathfrak{Z})$ in E_n liegt. Sind $c_1, c_2, \ldots$ positive und nur von φ abhängige Konstanten, so ist zuerst

$$|\varphi(\mathfrak{Z}_1)| \leqq c_1, \quad \mathfrak{M}_1 = \begin{pmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \end{pmatrix}.$$

Weiter bestimmt man nun

$$\mathfrak{M}_0 = \begin{pmatrix} \mathfrak{N} & \mathfrak{E} \\ -\mathfrak{E} & \mathfrak{S} \end{pmatrix} \in M_n, \quad \mathfrak{M}_0^{-1} = \begin{pmatrix} \mathfrak{S} & -\mathfrak{E} \\ \mathfrak{E} & \mathfrak{N} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_0^{-1} = \begin{pmatrix} * & * \\ \mathfrak{C}\mathfrak{S} + \mathfrak{D} & -\mathfrak{C} \end{pmatrix}$$

derart, daß

$$|\mathfrak{C}\mathfrak{S} + \mathfrak{D}| \neq 0 \text{ und } |s_{kl} - x_{kl}| \leqq 2$$

gleichzeitig erfüllt ist. Da die zweite Bedingung für jedes s_{kl} vier Möglichkeiten läßt und $|\mathfrak{C}\mathfrak{S} + \mathfrak{D}|$ ein Polynom n-ten Grades in den s_{kl} darstellt, welches nicht identisch verschwindet, ist die Forderung durch geeignete Wahl von $\mathfrak{S}$ immer erfüllbar. Setzt man nun

$$\mathfrak{Z}_0 = \mathfrak{M}_0(\mathfrak{Z}) = (-\mathfrak{Z} + \mathfrak{S})^{-1}, \quad \mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_0^{-1}(\mathfrak{Z}_0),$$

dann folgt

$$|\varphi(\mathfrak{Z})| = |-\mathfrak{Z} + \mathfrak{S}|^k \varphi(\mathfrak{Z}), \quad \varphi(\mathfrak{Z}_1) = |(\mathfrak{C}\mathfrak{S} + \mathfrak{D})\mathfrak{Z}_0 - \mathfrak{C}|^k \varphi(\mathfrak{Z}_0)$$

und

$$\begin{aligned} \varphi(\mathfrak{Z}_0) &= \|-\mathfrak{Z} + \mathfrak{S}\|^{-k} |\varphi(\mathfrak{Z}_0)| \\ &= \|-\mathfrak{Z} + \mathfrak{S}\|^{-k} \|(\mathfrak{C}\mathfrak{S} + \mathfrak{D})\mathfrak{Z}_0 - \mathfrak{C}\|^{-k} |\varphi(\mathfrak{Z}_1)| \\ &\leqq c_1 \|-\mathfrak{Z} + \mathfrak{S}\|^{-k} \|\mathfrak{Z}_0 - (\mathfrak{C}\mathfrak{S} + \mathfrak{D})^{-1}\mathfrak{C}\|^{-k} \\ &\leqq c_1 \|-\mathfrak{Z} + \mathfrak{S}\|^{-k} \cdot \|\mathfrak{Y}_0\|^{-k}. \end{aligned}$$

Denn es ist

$$\|\mathfrak{W} + i\mathfrak{E}\|^2 = |\mathfrak{W}\mathfrak{W} + \mathfrak{E}| \geqq 1, \quad \mathfrak{W} = \mathfrak{W}'.$$

Bei $\mathfrak{Z}_0 = \mathfrak{M}_0(\mathfrak{Z})$ transformiert sich der Imaginärteil nach der Gleichung

$$\mathfrak{Y}_0 = (-\mathfrak{Z} + \mathfrak{S})'^{-1} \mathfrak{Y} (-\bar{\mathfrak{Z}} + \mathfrak{S})^{-1},$$

und damit hat man

$$|\varphi(\mathfrak{Z})| \leqq c_1 |\mathfrak{Y}|^{-k} \|-\mathfrak{Z} + \mathfrak{S}\|^k = c_1 \|\mathfrak{Q}\|^k$$

mit

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}\mathfrak{Y}^{-1} + i\mathfrak{E}, \quad \mathfrak{P} = \mathfrak{S} - \mathfrak{X}.$$

$\mathfrak{T} = \mathfrak{Y}^{-1}$ war reduziert und es sei halbganz. Aus der Reduktionstheorie entnimmt man die Ungleichungen

$$|t_{kl}| \leqq t_l, \; 1 \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq \cdots \leqq t_n, \; \mathfrak{T}^{(n)} = (t_{kl}), \; t_{kk} = t_k, \; t_1 \cdot t_2 \cdot \cdots t_n \leqq c_2 \cdot |\mathfrak{T}|.$$

Da $\mathfrak{P}$ beschränkte Elemente hat, folgt

$$|q_{ik}| = \Big|\sum_l (p_{il} \cdot t_{lk} + i\delta_{ik})\Big| \leqq c_3 \cdot t_k, \quad \delta_{ik} = \begin{Bmatrix} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{Bmatrix},$$

und damit

$$\|\mathfrak{Q}\| \leqq c_4 t_1 \cdot t_2 \cdot \cdots t_n \leqq c_5 |\mathfrak{T}|,$$

$$|\varphi(\mathfrak{X} + i\mathfrak{T}^{-1})| \leqq c_6 |\mathfrak{T}|^k. \tag{4.10}$$

Ist nun $\mathfrak{W}$ der Würfel mit der Kantenlänge 1 und dem Mittelpunkt im Ursprung im euklidischen Raum von $n(n+1)/2$ Dimensionen, so ist für $|\mathfrak{T}| \neq 0$

$$\begin{aligned} A_0(\mathfrak{T}) &= \int_{\mathfrak{W}} \varphi(\mathfrak{X} + i\mathfrak{Y})\, e^{-2\pi i \sigma(\mathfrak{T}\mathfrak{X} + i\mathfrak{T}\mathfrak{Y})} d\mathfrak{X} \\ &= e^{2n\pi} \int_{\mathfrak{W}} \varphi(\mathfrak{X} + i\mathfrak{T}^{-1}) \cdot e^{-2\pi i \sigma(\mathfrak{T}\mathfrak{X})} d\mathfrak{X} \end{aligned}$$

$$|A(\mathfrak{T})| \leqq c_7 |\mathfrak{T}|^k.$$

Für $n = 2$ steht dieser Satz bei Maaß [7].

Aus den Fourier-Koeffizienten von $f_n(\mathfrak{Y})$ bildet man nun die für $\operatorname{Re} s > k$ absolut konvergente Dirichlet-Reihe

$$D_n(f; s) = \sum_{\{\mathfrak{T}^{(n)}\} > 0} a(\mathfrak{T}) |\mathfrak{T}|^{-s}, \quad a(\mathfrak{T}) = \frac{A(\mathfrak{T})}{E(\mathfrak{T})},$$

$$A(\mathfrak{T}) = \begin{Bmatrix} A_0(\tfrac{1}{2}\mathfrak{T}), & \text{wenn } \tfrac{1}{2}\mathfrak{T} \text{ halbganz} \\ 0 & \text{, sonst} \end{Bmatrix}, \tag{4.11}$$

und weiter

$$(4.12)\qquad R_n(f;s) = \pi^{n\left(\frac{n-1}{4}-s\right)} G_n(s)\, D_n(f;s), \quad \operatorname{Re} s > k.$$

Analog (3. 6) ergibt sich für Re $s > k$

$$2\, R_n(f;s) = \int\limits_{F_n} f_n(\mathfrak{Y})\, |\mathfrak{Y}|^{s-\frac{n+1}{2}}\, d\mathfrak{Y}$$

$$= \int\limits_{F_n[1]} \left\{ f_n(\mathfrak{Y})\, |\mathfrak{Y}|^{s} + f_n(\mathfrak{Y}^{-1})\, |\mathfrak{Y}|^{-s} \right\} |\mathfrak{Y}|^{-\frac{n+1}{2}}\, d\mathfrak{Y}.$$

Wegen

$$f_n(\mathfrak{Y}^{-1}) = (-1)^{k'}\, |\mathfrak{Y}|^{k}\, f_n(\mathfrak{Y}) + \sum_{r=0}^{n-1} \left\{ (-1)^{k'}\, |\mathfrak{Y}|^{k}\, f_r(\mathfrak{Y}) - f_r(\mathfrak{Y}^{-1}) \right\}, \quad k' = \frac{nk}{2},$$

überträgt sich (3. 8)

$$(4.13)\quad 2\, R_n(f;s) = H_n(f;s) + v(n)\, A(\mathfrak{N}) \left\{ \frac{(-1)^{k'}}{s-k} - \frac{1}{s} \right\}$$

$$+ \sum_{r=1}^{n-1} \int\limits_{F_n[1]} \left\{ (-1)^{k'}\, |\mathfrak{Y}|^{k-s}\, f_r(\mathfrak{Y}) - |\mathfrak{Y}|^{-s}\, f_r(\mathfrak{Y}^{-1}) \right\} \frac{d\mathfrak{Y}}{|\mathfrak{Y}|^{\frac{n+1}{2}}},$$

$$H_n(f;s) = \int\limits_{F_n[1]} f_n(\mathfrak{Y}) \left\{ |\mathfrak{Y}|^{s} + (-1)^{k'}\, |\mathfrak{Y}|^{k-s} \right\} \frac{d\mathfrak{Y}}{|\mathfrak{Y}|^{\frac{n+1}{2}}}.$$

$H_n(f;s)$ ist wieder für alle s regulär analytisch und genügt der Funktionalgleichung

$$(4.14)\qquad H_n(f;s) = (-1)^{k'} H_n(f;k-s).$$

Zur Berechnung der Summe in (4. 13) verfährt man unter Verwendung von (3. 13) und (3. 14) wie in § 3 und erhält

$$(4.15)\qquad R_n(f;s) = \frac{1}{2} H_n(f;s) + \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{n-1} v(n-r)\, R_r\left(f^{(r)}; \frac{n}{2}\right) \left\{ \frac{(-1)^{k'}}{s-k+\frac{r}{2}} - \frac{1}{s-\frac{r}{2}} \right\},$$

wobei wieder $R_0 = A(\mathfrak{N})$ gesetzt ist und $R_r\left(f^{(r)}; \frac{n}{2}\right)$ durch Null zu ersetzen ist, wenn $R_r(f^{(r)}; s)$ bei $s = n/2$ einen Pol hat. $f^{(r)}$ ist dabei die der Modulform n-ten Grades durch den Grenzübergang (4. 9) eindeutig zugeordnete Modulform r-ten Grades vom gleichen Gewicht. Aus (4. 15) schließt man:

Satz 2. *Jeder Modulform n-ten Grades vom Gewicht k ist eine Dirichlet-Reihe $D_n(f;s)$ nach* (4. 11) *zugeordnet, die für alle s bis auf Pole ersterOrdnung regulär ist und der Funktionalgleichung*

$$R_n(f;s) = (-1)^{k'}\, R_n(f;k-s), \quad k' = \frac{nk}{2},$$

genügt. $R_n(f;s)$ ist dabei durch (4. 12) *definiert.*

Für $n = 1$ wurde dieser Satz von Hecke ausgesprochen. Er hat auch gezeigt, daß die den Eisensteinschen Reihen zugeordneten Dirichlet-Reihen sich als Produkt zweier gewöhnlicher Zetafunktionen schreiben lassen. Da für $n > 1$ die Fourier-Koeffizienten der verallgemeinerten Eisensteinschen Reihen von Siegel in [4] berechnet worden sind, lassen sich die zugehörigen Dirichlet-Reihen ohne weiteres bilden, jedoch scheint eine Produktzerlegung in wesentlich einfachere Faktoren nicht möglich zu sein.

§ 5. Das Umkehrproblem.

In der schon mehrfach zitierten Arbeit hat Hecke das Umkehrproblem zu Satz 2 — Charakterisierung der Modulform durch die zugeordnete Dirichlet-Reihe — für $n = 1$ vollständig behandelt. Bei $n > 1$ hat man in Satz 2 noch keine eindeutige Zuordnung einer Dirichlet-Reihe zu einer Modulform, denn alle Modulformen, für die $f_n(\mathfrak{Y})$ übereinstimmt, haben die gleiche Dirichlet-Reihe. Man muß daher einer Modulform nicht nur die Reihe nach Satz 2, sondern außerdem noch die $n - 1$ Reihen, die zu den aus der vorgelegten Modulform durch den Grenzübergang (4. 9) entstehenden Modulformen vom gleichen Gewicht gehören, zuordnen. Dazu definiert man im Anschluß an Hecke:

Ein System von n Dirichlet-Reihen $D_p(s)$, $p = 1, 2, \ldots, n$, heißt ein *System der Signatur* $\{n, k, \gamma_p\}$, wenn es die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. Jede Funktion ist in eine spezielle Dirichlet-Reihe mit endlicher Konvergenzabszisse entwickelbar:
$$D_p(s) = \sum_{\{\mathfrak{T}\} > 0} a_p(\mathfrak{T}) \, |\mathfrak{T}|^{-s}, \quad \operatorname{Re} s > s_0,$$
bei der $\mathfrak{T}^{(p)}$ ein volles System von nicht äquivalenten ganzen positiven symmetrischen Matrizen durchläuft.
2. Bis auf Pole erster Ordnung in $0 \leqq s \leqq k$ ist
$$R_p(s) = \pi^{p\left(\frac{p-1}{4} - s\right)} G_p(s) \, D_p(s), \quad p = 1, 2, \ldots, n,$$
regulär analytisch.
3. Mit $k > 0$ gilt
$$R_p(s) = \gamma_p R_p(k - s), \quad p = 1, 2, \ldots, n.$$
4. Setzt man $R_0(s) = a_0$ und $R_r\left(\frac{p}{2}\right) = 0$, $0 < r < p$, wenn $R_r(s)$ bei $s = p/2$ einen Pol hat, so sind die n Reihen verknüpft durch die Festsetzung, daß
$$R_p(s) - \frac{1}{2} \cdot \sum_{r=0}^{p-1} v(p - r) \, R_r\left(\frac{p}{2}\right) \left\{ \frac{\gamma_p}{s - k + \frac{r}{2}} - \frac{1}{s - \frac{r}{2}} \right\}$$
eine ganze Funktion in s ist.

n-fache Anwendung von Satz 2 ergibt dann

Satz 3. *Jeder Modulform n-ten Grades vom Gewicht k ist ein System von Dirichlet-Reihen der Signatur*
$$\left\{n, k, (-1)^{\frac{pk}{2}}\right\}$$
zugeordnet. Verschiedene Modulformen ergeben verschiedene Systeme.

Es sei nun ein System der Signatur $\{n, k, \gamma_p\}$ gegeben. Mit den Entwicklungskoeffizienten aller n Reihen bildet man mit (3. 4) und $\mathfrak{Y}^{(n)} > 0$

$$f_r(\mathfrak{Y}) = \sum_{\{\mathfrak{T}\} > 0} a_r(\mathfrak{T}) \, g_r(\mathfrak{T}^{(r)}, \mathfrak{Y}^{(n)}), \quad f_0(\mathfrak{Y}) = a_0, \tag{5. 1}$$

$$f(\mathfrak{Y}^{(n)}) = \sum_{r=0}^{n} f_r(\mathfrak{Y}) = \sum_{\mathfrak{T} \geqq 0} A(\mathfrak{T}) \, e^{-\pi\sigma(\mathfrak{T}\mathfrak{Y})}, \tag{5. 2}$$

wobei $A(\mathfrak{T})$ nach (4. 7) zu definieren ist. Die zweite Summe ist dann über alle ganzen $\mathfrak{T} \geqq 0$ zu erstrecken. Jedem System von Dirichlet-Reihen kann man also eine in eine Fourier-Reihe entwickelbare Funktion $f(\mathfrak{Y})$ formal zuordnen.

Mit geeignetem $\mathfrak{U}$ aus U_n ist nun nach Hilfssatz 1 für $\mathfrak{T}' = \mathfrak{T}$

$$\mathfrak{T}[\mathfrak{U}] = \begin{pmatrix} \mathfrak{N} & \mathfrak{N} \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{T}_1^{(r)} \end{pmatrix}, \quad r = r(\mathfrak{T}),$$

und man bezeichnet mit *Diskriminante* $D(\mathfrak{T})$ die Determinante von $\mathfrak{T}_1$. Die Forderung, daß $D_p(s)$ eine endliche Konvergenzabszisse haben soll, besagt dann, daß $A(\mathfrak{T})$ nicht stärker als eine Potenz von $D(\mathfrak{T})$ wachsen kann. Für alle $\mathfrak{Y}$ aus einem abgeschlossenen Gebiet $G < P_n$ gilt nun für alle $\mathfrak{T} \geqq 0$

$$\sigma(\mathfrak{T}\mathfrak{Y}) \geqq c_1 \sigma(\mathfrak{T}), \quad c_1 > 0,$$

und daher folgt aus der zweiten Darstellung von (5. 2)

$$|f(\mathfrak{Y})| \leqq \sum_{\mathfrak{T} \geqq 0} (D(\mathfrak{T}))^{c_2} e^{-\pi c_1 \sigma(\mathfrak{T})}.$$

Für $\mathfrak{T} \geqq 0$ ist nun $t_{kl}^2 \leqq t_k t_l$ und daher die Anzahl der $\mathfrak{T}$ mit $\sigma(\mathfrak{T}) = t$ bei festem t sicher gleich $O(t^{c_3})$. Wegen $|t_{kl}| \leqq t$ gilt eine analoge Abschätzung auch für $D(\mathfrak{T})$ und damit

$$|f(\mathfrak{Y})| \leqq \sum_{t=1}^{\infty} c_4 t^{c_5} e^{-\pi c_1 t} \leqq c_6,$$

d. h. $f(\mathfrak{Y})$ ist in jedem abgeschlossenen Gebiet $G < P_n$ gleichmäßig und absolut konvergent.

Ist $F_n\langle x\rangle$ wieder der Durchschnitt von F_n mit der Determinantenfläche $|\mathfrak{X}| = x$, ferner

$$dw = d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{X}_1 |\mathfrak{X}^{-1}|, \quad \mathfrak{X} = \begin{pmatrix} x_1 & \mathfrak{x}' \\ \mathfrak{x} & \mathfrak{X}_1 \end{pmatrix},$$

das Oberflächenelement der Determinantenfläche, so wird der folgende Satz bewiesen werden:

Satz 4. *Für jedes positive x und jeden normalen Fundamentalbereich F_n von P_n gilt*

$$\int_{F_n\langle x\rangle} \{f(\mathfrak{X}) - \gamma_n |\mathfrak{X}|^{-k} f(\mathfrak{X}^{-1})\}\, dw = 0.$$

Für $n = 1$ entfällt das Integral, bei $n > 1$ würde

$$f(\mathfrak{Y}) - (-1)^{\frac{nk}{2}} |\mathfrak{Y}|^{-k} f(\mathfrak{Y}^{-1}) = 0$$

zur Folge haben, daß $f(-i\mathfrak{Z}) = \varphi(\mathfrak{Z})$ eine Modulform n-ten Grades vom Gewicht k wäre, denn nach [11] sind

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{E} & \mathfrak{S} \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{E} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathfrak{U}' & \mathfrak{N} \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{U}^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathfrak{N} & \mathfrak{E} \\ -\mathfrak{E} & \mathfrak{N} \end{pmatrix}$$

die Erzeugenden der Modulgruppe n-ten Grades. Eine über Satz 3 hinausgehende Aussage wird man jedoch nicht erwarten dürfen, denn man hat zur Umkehr der Integralformel aus Hilfssatz 9 nur die Mellin-Transformation zur Verfügung.

Beweis von Satz 4. Nach § 3 war

$$(5.\,3) \qquad 2\pi^{n\left(\frac{n-1}{4} - s\right)} G_n(s) |\mathfrak{T}|^{-s} = \int_{F_n} |\mathfrak{X}|^{s - \frac{n+1}{2}} g_n(\mathfrak{T}, \mathfrak{X})\, d\mathfrak{X}, \quad \mathfrak{T} > 0,$$

$$= \int_0^{\infty} x^{s-1} x^{-\frac{n-1}{2}} \int_{F_n\langle x\rangle} g_n(\mathfrak{T}, \mathfrak{X})\, dw\, dx.$$

Mit Mellin-Transformation folgt daraus

$$\int_{F_n\langle x\rangle} g_n(\mathfrak{T}, \mathfrak{X})\, dw = 2x^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{2\pi i} \int_{(s_1)} \pi^{n\left(\frac{n-1}{4} - s\right)} G_n(s)\, (x|\mathfrak{T}|)^{-s}\, ds,$$

wobei auf der rechten Seite entlang einer Parallelen zur imaginären Achse der s-Ebene bei $\operatorname{Re} s = s_1 > s_0$ zu integrieren ist. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $D_n(s)$ kann man mit (5. 1) weiter schreiben

$$\int\limits_{F_n\langle x\rangle} f_n(\mathfrak{X})\, dw = 2\, x^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(s_1)} R_n(s)\, x^{-s}\, ds, \quad s_1 > s_0.$$

Da $D_n(s)$ in einer Halbebene $\operatorname{Re} s \geqq s_1 > s_0$ beschränkt ist, so gilt wegen der Funktionalgleichung auf Grund der bekannten Schlußweise von Phragmén-Lindelöf

$$D_n(\sigma + it) = O(|t|^{\varepsilon}), \quad \sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2,$$

für $|t| \to \infty$ gleichmäßig in σ. Man kann daher den Integrationsweg unter Berücksichtigung der Pole bis $\operatorname{Re} s < 0$ verschieben. Wendet man dann die Funktionalgleichung von $R_n(s)$ an, so folgt

$$\int\limits_{F_n\langle x\rangle} f_n(\mathfrak{X})\, dw - \gamma_n x^{n-k-1} \int\limits_{F_n\langle \frac{1}{x}\rangle} f_n(\mathfrak{X})\, dw = \sum_{r=0}^{n-1} v(n-r)\, R_r\left(\frac{n}{2}\right) x^{\frac{n-1}{2}} \left\{\gamma_n x^{-k+\frac{r}{2}} - x^{-\frac{r}{2}}\right\}$$

nach einer leichten Rechnung; denn die Residuen der Pole von $R_n(s)$ sind durch die Forderung 4) in der Definition des Systems der Signatur $\{n, k, \gamma_p\}$ gegeben. Für das zweite Integral auf der linken Seite hat man nun

$$\int\limits_{F_n\langle \frac{1}{x}\rangle} f_n(\mathfrak{X})\, dw = \lim_{\alpha\to 0} \int\limits_{\substack{\frac{1}{x}-\alpha \leqq |\mathfrak{X}| \leqq \frac{1}{x}+\alpha \\ F_n}} f_n(\mathfrak{X})\, d\mathfrak{X} = x^{-n+1} \int\limits_{F_n\langle x\rangle} f_n(\mathfrak{X}^{-1})\, dw$$

und es ergibt sich

$$\text{(5. 4)} \quad \int\limits_{F_n\langle x\rangle} \left\{f_n(\mathfrak{X}) - \gamma_n |\mathfrak{X}|^{-k} f_n(\mathfrak{X}^{-1})\right\} dw = \sum_{r=0}^{n-1} v(n-r)\, R_r\left(\frac{n}{2}\right) \left\{\gamma_n x^{\frac{n+r-1}{2}-k} - x^{\frac{n-r-1}{2}}\right\}.$$

Definiert man für $x > 0$ mit den Entwicklungskoeffizienten der Reihen $D_r(s)$ bei $0 < r < n$

$$Z_r(x, s, z) = \int\limits_{F_n[x]} \sum_{\{\mathfrak{T}^{(r)}\}>0} \sum_{\mathfrak{B}} a_r(\mathfrak{T})\, |\mathfrak{X}[\mathfrak{B}_0']|^z\, |\mathfrak{X}|^{k-s-\frac{n+1}{2}}\, e^{-\pi\sigma(\mathfrak{X}[\mathfrak{B}_0']\mathfrak{T})}\, d\mathfrak{X},$$

so ist

$$\text{(5. 5)} \quad \lim_{z\to 0} Z_r(x, s, z) = \int\limits_{F_n[x]} f_r(\mathfrak{X})\, |\mathfrak{X}|^{k-s-\frac{n+1}{2}}\, d\mathfrak{X}.$$

Zur Berechnung von $Z_r(x, s, z)$ verfährt man wie in § 3 und erhält

$$Z_r(x, s, z) = R_r\left(z + \frac{n}{2}\right) \frac{v(n-r)}{s-k+\frac{r}{2}}\, x^{k-s-\frac{r}{2}}.$$

Wegen der Analytizität kann man $z = 0$ setzen und mit (5. 5) gilt für alle positiven x

$$\int\limits_x^{\infty} t^{k-s-\frac{n+1}{2}} \int\limits_{F_n\langle t\rangle} f_r(\mathfrak{X})\, dw\, dt = R_r\left(\frac{n}{2}\right) x^{k-s-\frac{r}{2}} \frac{v(n-r)}{s-k+\frac{r}{2}},$$

sofern $R_r(s)$ bei $s = n/2$ keinen Pol hat. Dieser Fall braucht aber nicht untersucht zu werden, denn nach der Definition des Systems der Signatur $\{n, k, \gamma_r\}$ kommen diese Glieder auf der rechten Seite von (5. 4) nicht vor. Durch Differentiation nach x folgt endlich

$$\int\limits_{F_n\langle x\rangle} f_r(\mathfrak{X})\, dw = R_r\left(\frac{n}{2}\right) v(n-r)\, x^{\frac{n-r-1}{2}}, \quad 0 < r < n. \tag{5. 6}$$

Eine analoge Rechnung führt zu

$$\int\limits_{F_n\langle x\rangle} f_r(\mathfrak{X}^{-1})\, dw = R_r\left(\frac{n}{2}\right) v(n-r)\, x^{\frac{n+r-1}{2}}, \quad 0 < r < n, \tag{5. 7}$$

und für $r = 0$ gilt

$$\int\limits_{F_n\langle x\rangle} dw = v(n)\, x^{\frac{n-1}{2}}.$$

Durch Eintragen dieser Ergebnisse in (5. 4) folgt mit (5. 2) die Behauptung des Satzes.

Literatur

1. *H. Minkowski*, Werke, Band 2, 2. Auflage.
2. *C. L. Siegel*, Über die analytische Theorie der quadratischen Formen, Annals of Math. **36** (1935), 527—606.
3. *C. L. Siegel*, The volumen of the fundamental domain for some infinite groups, Transactions of the American Math. Soc. **39** (1936), 209—218.
4. *C. L. Siegel*, Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades, Math. Ann. **116** (1939), 617—657.
5. *C. L. Siegel*, Über die Zetafunktionen indefiniter quadratischer Formen. I., II., Math. Zeitschrift **43** (1938), 682—708, und **44** (1939), 398—426.
6. *C. L. Siegel*, Einheiten quadratischer Formen, Abh. Math. Seminar hans. Universität **13** (1940), 209—239.
7. *C. L. Siegel*, A mean value theorem in geometry of numbers, Annals of Math. **46** (1945), 340—347.
8. *H. Maaß*, Modulformen zweiten Grades und Dirichlet-Reihen, Math. Ann. **122** (1950), 90—108.
9. *E. Hecke*, Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichung, Math. Ann. **112** (1936), 664—699.
10. *K. Hey*, Analytische Zahlentheorie in Systemen hyperkomplexer Zahlen, Diss. Hamburg 1929.
11. *E. Witt*, Eine Identität zwischen Modulformen zweiten Grades, Abh. Math. Seminar hans. Universität **14** (1941), 321—327.

Eingegangen 13. Juni 1951.

Einige neuere Bedingungen für die Existenz ungerader vollkommener Zahlen.

Von *Hans-Joachim Kanold* in Gießen.

Im folgenden bedeute $n = p^\alpha \prod_{\varrho=1}^{r} q_\varrho^{2\beta_\varrho}$ eine ungerade vollkommene Zahl mit den verschiedenen Primteilern p, q_ϱ und $F_m(x)$ das m-te Kreisteilungspolynom. Nach Euler[1]) können wir $p \equiv \alpha \equiv 1 \pmod 4$ voraussetzen.

§ 1.

(1) **Satz.** *Es sei* $(p-1, 2\beta_\varrho + 1) = 1$ *und* a *die Anzahl der Primzahlen* q_ϱ, *die der Restklasse* 1 *(mod* p*) angehören* $(\varrho = 1, \ldots, r)$. *Dann folgt* $1 < a < r$ *und*

$\alpha \leqq Min\,(a(a-2);\ [\tfrac{3}{4}\,a(a-1)])$, *wenn* $p^{a-1} \nmid (1 + q_\varrho + \cdots + q_\varrho^{2\beta_\varrho})$ *für alle* $\varrho = 1, \ldots, r$.

$\alpha \leqq [\tfrac{1}{4}\,(a-1)\,(3a-2)]$ *sonst.*

Beweis. Es sei γ_ϱ die höchste Potenz von p, die in $1 + q_\varrho + \cdots + q_\varrho^{2\beta_\varrho}$ enthalten ist. Ist $m_\varrho > 1$ und $m_\varrho \mid (2\beta_\varrho + 1)$, so folgt wegen $(m_\varrho, p-1) = 1$ aus $F_{m_\varrho}(q_\varrho) \equiv 0 \pmod p$, daß $q_\varrho \equiv 1 \pmod p$, ferner $m_\varrho = p^{\delta_\varrho}$ mit positivem ganzen δ_ϱ und schließlich $F_{m_\varrho}(q_\varrho) \not\equiv 0 \pmod{p^2}$ gelten muß[2]). Daraus folgt

$$\delta_\varrho \leqq \gamma_\varrho < a. \tag{2}$$

Ferner ist

$$\alpha = \sum_{\varrho=1}^{r} \gamma_\varrho. \tag{3}$$

Bezeichnen wir mit M_ϱ bzw. N_ϱ die Anzahl derjenigen $F_{m_\varrho}(q_\varrho)$, die durch p teilbar sind und mindestens zwei verschiedene Primteiler der Restklasse $1 \pmod p$ bzw. nicht zwei verschiedene solche Primteiler besitzen, so ergibt sich

$$2\,M_\varrho + N_\varrho \leqq a - 1;\quad \sum_{\varrho=1}^{r} (M_\varrho + N_\varrho) = \sum_{\varrho=1}^{r} \gamma_\varrho = \alpha. \tag{4}$$

Wir brauchen dabei in den letzten Summen nur über diejenigen ϱ zu summieren, für welche $q_\varrho \equiv 1 \pmod p$ gilt. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir setzen

$$q_\varrho \equiv 1 \pmod p \text{ für } 1 \leqq \varrho \leqq a. \tag{5}$$

Nach (2) und (4) finden wir

$$\sum_{\varrho=1}^{a} M_\varrho + \alpha \leqq a(a-1);\quad 2\alpha \leqq a(a-1) + \sum_{\varrho=1}^{a} N_\varrho. \tag{6}$$

---

[1]) *L. Euler*, Opera posthuma I, S. 14—15.

[2]) Vgl. *H. J. Kanold*, Untersuchungen über ungerade vollkommene Zahlen, J. f. reine u. angew. Math. **183**, 98—109, 1941, insbesondere I, (2).

Aus einem früheren Ergebnis[3]) folgt

$$\sum_{\varrho=1}^{a} N_\varrho \leqq \frac{a(a-1)}{2}. \tag{7}$$

Somit erhalten wir

$$\alpha \leqq [\tfrac{3}{4}\, a(a-1)]. \tag{8}$$

Es sei jetzt

$$p^{a-1} \mid 1 + q_1 + q_1^2 + \cdots + q_1^{2\beta_1}, \text{ d. h. } N_1 = a - 1. \tag{9}$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir dann annehmen

$$\sum_{\varkappa=0}^{p-1} q_1^{\varkappa p^{\varrho-2}} = p q_\varrho^{\xi_\varrho};\ \xi_\varrho > 0, \text{ ganz};\ \varrho = 2, \ldots, a. \tag{10}$$

Daraus ergibt sich

$$q_\varrho^{\xi_\varrho} \equiv 1 \pmod{q_2^{\xi_2} \cdots q_{\varrho-1}^{\xi_{\varrho-1}}} \text{ für } \varrho = 3, \ldots, a. \tag{11}$$

Wäre $F_{2\beta_\varrho+1}(q_\varrho) \equiv 0 \pmod{q_\lambda}$ für ein λ aus $2, \ldots, \varrho - 1$ und ein ϱ aus $3, \ldots, a$, so müßte $\xi_\varrho \equiv 0 \pmod{2\beta_\varrho + 1}$, also $\xi_\varrho > 2\beta_\varrho$ sein, was einen Widerspruch bedeutet. Insbesondere kann also $F_{2\beta_a+1}(q_a)$ nicht teilbar sein durch eine der Primzahlen $q_2, \ldots, q_{n-1}$.

Wäre $F_{2\beta_a+1}(q_a) = q_1^{\xi_1}$, so wäre $q_1^{\xi_1} \equiv 1 \pmod{q_a}$, d. h. $2\beta_1 + 1 \mid \xi_1$, was zu dem Widerspruch $2\beta_1 < \xi_1$ führen würde.

Wäre $F_{2\beta_a+1}(q_a) = p q_1^{\xi_1}$, so müßte $2\beta_a + 1$ eine Potenz von p sein. Das ergäbe ebenfalls einen Widerspruch[4]). Wir erhalten also $p \nmid 2\beta_a + 1$, d. h.

$$N_a = M_a = 0. \tag{12}$$

Wir haben dann nach (4)

$$2\alpha = 2 \sum_{\varrho=1}^{a-1} (M_\varrho + N_\varrho) \leqq (a-1)^2 + \sum_{\varrho=1}^{a-1} N_\varrho \tag{13}$$

und nach (7)

$$2\alpha \leqq (a-1)^2 + \frac{a(a-1)}{2};\quad \alpha \leqq \left[\frac{1}{4}(a-1)(3a-2)\right]. \tag{14}$$

Beachten wir endlich noch, daß für eine ungerade vollkommene Zahl wegen $\sigma(n) = 2n$ der Ausdruck $\frac{p+1}{2}$ nur Primteiler von n enthalten darf, so sehen wir sogleich, daß $a < r$ sein muß. Damit ist der Beweis von Satz (1) beendet.

(15) **Zusatz zu Satz (1).** *Wenn p eine Gaußsche Primzahl ist, können wir $q_1 = 3$ annehmen. Wenn außerdem $p > 17$ ist, gilt $a < r - 1$.*

Beweis. $p = 2^x + 1 \equiv 1 \pmod 4$ führt zu $p + 1 \equiv 0 \pmod 3$. Für eine Gaußsche Primzahl ist die Bedingung $(p - 1, 2\beta_\varrho + 1) = 1$ immer erfüllt. Es sei jetzt $p = 2^x + 1 > 17$. Wäre $\frac{p+1}{2} = 3^y$, so wäre

$$2^{x-1} + 1 = 3^y \text{ oder } 2^{x-1} = 2(1 + 3 + \cdots + 3^{y-1}).$$

Es ist nun $F_y(3)$ ein Teiler der letzten Klammer. Für $y > 2$ müßte aber $F_y(3)$ mindestens einen ungeraden Primteiler besitzen[5]).

---

[3]) Vgl. *H. J. Kanold*, Ein Satz über ein spezielles System von zwei diophantischen Gleichungen, J. f. reine u. angew. Math. **189**, 243—245, 1952.

[4]) Vgl. a. a. O. [3]).

[5]) Vgl. a. a. O. [2]), I, (21).

§ 2.

(16) **Satz.** *Es sei* $\left(q_1 - 1, \frac{\alpha+1}{2}\right) = (q_1 - 1, 2\beta_\varrho + 1) = 1$ *und* a *die Anzahl derjenigen Primzahlen* q_ϱ, *die der Restklasse* $1 \pmod{q_1}$ *angehören* $(\varrho = 2, \ldots, r)$. *Dann muß genau einer der folgenden Fälle eintreten:*

I. Aus $p \not\equiv \pm 1 \pmod{q_1}$ *folgt* $2 < a < r - 1$ *und*

$2\beta_1 \leqq Min\,(a(a-2); [\frac{3}{4}\,a(a-1)])$, *wenn* $q_1^{a-1} \nmid 1 + q_\varrho + \cdots + q_\varrho^{2\beta_\varrho}$ *für alle* $\varrho = 2, \ldots, r$.

$2\beta_1 \leqq [\frac{1}{4}\,(a-1)\,(3a-2)]$ *sonst.*

II. Aus $p \equiv 1 \pmod{q_1}$ *folgt* $1 < a < r$ *und*

$$2\beta_1 \leqq Min\left(a(a-1) + \left[\frac{a}{2}\right];\ \left[\frac{a}{12}\,(9a+7)\right]\right), \text{ wenn}$$

$$q_1^a \nmid 1 + q_\varrho + \cdots + q_\varrho^{2\beta_\varrho} \text{ für alle } \varrho = 2, \ldots, r.$$

$$2\beta_1 \leqq \left[\frac{a}{12}\,(9a+1)\right], \text{ wenn } q_1^a \mid 1 + q_\varrho + \cdots + q_\varrho^{2\beta_\varrho} \text{ und } F_{2\beta_\varrho+1}(q_\varrho) \not\equiv 0 \pmod{p}$$

$$\text{für mindestens ein } \varrho \text{ aus } 2, \ldots, r.$$

$$2\beta_1 \leqq \left[\frac{a}{4}\,(3a+1)\right], \text{ wenn } q_1^a \mid 1 + q_\varrho + \cdots + q_\varrho^{2\beta_\varrho} \text{ und } F_{2\beta_\varrho+1}(q_\varrho) \equiv 0 \pmod{p}$$

$$\text{für mindestens ein } \varrho \text{ aus } 2, \ldots, r.$$

III. Aus $p \equiv -1 \pmod{q_1}$ *und* $q_1^\xi \mid \frac{p+1}{2}$; $q_1^{\xi+1} \nmid \frac{p+1}{2}$ *folgt* $a < r$ *und*

$$2\beta_1 - \xi \leqq Min\left(a(a-2) + \left[\frac{a}{2}\right];\ \left[\frac{a}{4}\,(3a-1)\right]\right), \text{ wenn } q_1^{a-1} \nmid 1 + q_\varrho + \cdots + q_\varrho^{2\beta_\varrho}$$

$$\text{für alle } \varrho = 2, \ldots, r.$$

$2\beta_1 - \xi \leqq [\frac{3}{4}\,a(a-1) + \frac{1}{2}]$ *sonst.*

Beweis. Im Fall I ist $q_1^{2\beta_1} \mid \prod_{\varrho=1}^{r} (1 + q_\varrho + \cdots + q_\varrho^{2\beta_\varrho})$. Der Beweis ähnelt dem von Satz (1). Da aus $\frac{p+1}{2} \equiv 0{,}1 \pmod{q_1}$ folgt, daß $p \equiv \pm 1 \pmod{q_1}$ ist, muß n außer p und q_1 mindestens noch einen Primteiler besitzen, der nicht der Restklasse $1 \pmod{q_1}$ angehört. Das bedeutet, daß $a \leqq r - 2$ sein muß.

Im Fall II gilt

$$q_1^{2\beta_1} \mid \left(1 + p + \cdots + p^{\frac{\alpha-1}{2}}\right) \prod_{\varrho=1}^{r} (1 + q_\varrho + \cdots + q_\varrho^{2\beta_\varrho}). \tag{17}$$

Wir können annehmen, daß

$$q_\varrho \equiv 1 \pmod{q_1} \text{ für } \varrho = 2, \ldots, a+1 \tag{18}$$

erfüllt ist. Es seien M_ϱ bzw. N_ϱ die Anzahlen derjenigen $F_{m_\varrho}(q_\varrho)$, die Teiler von $1 + q_\varrho + \cdots + q_\varrho^{2\beta_\varrho}$, ferner durch q_1 teilbar sind und mindestens zwei verschiedene Primteiler der Restklasse $1 \pmod{q_1}$ bzw. nicht zwei solche Primteiler besitzen $(\varrho = 2, \ldots, a+1)$. M_1 bzw. N_1 seien die entsprechenden Anzahlen der $F_{m_1}(p)$, die Teiler von $1 + p + \cdots + p^{\frac{\alpha-1}{2}}$ und durch q_1 teilbar sind. Damit ergibt sich

$$\begin{cases} 2M_\varrho + N_\varrho \leqq a \text{ für } \varrho = 2, \ldots, a+1; \\ M_1 + N_1 + \sum_{\varrho=2}^{a+1} (M_\varrho + N_\varrho) = 2\beta_1. \end{cases} \tag{19}$$

Beachten wir, daß zu jedem $F_{m_1}(p) \mid 1 + p + \cdots + p^{\frac{\alpha-1}{2}}$ ein

$$F_{2m_1}(p) \mid 1 - p + p^2 - \cdots + p^{\frac{\alpha-1}{2}} \mid n$$

gehört, so sehen wir, daß

$$2M_1 + N_1 + M_1 + N_1 = 3M_1 + 2N_1 \leqq a \tag{20}$$

gelten muß. Es ist[6])

$$\sum_{\varrho=1}^{a+1} N_\varrho \leqq \frac{a(a+1)}{2}. \tag{21}$$

Aus (19), (20) und (21) ergibt sich

$$6 \cdot 2\beta_1 = 6 \sum_{\varrho=1}^{a+1} (M_\varrho + N_\varrho) = 6M_1 + 4N_1 + \sum_{\varrho=2}^{a+1} (6M_\varrho + 3N_\varrho) + 2N_1 + 3 \sum_{\varrho=2}^{a+1} N_\varrho$$
$$\leqq 2a + a \cdot 3a + 3 \sum_{\varrho=1}^{a+1} N_\varrho \leqq 2a + 3a^2 + \frac{3}{2} a(a+1).$$

Somit erhalten wir

$$2\beta_1 \leqq \left[\frac{a}{12}(9a+7)\right]. \tag{22}$$

Es sei jetzt (z. B. für $\varrho = 2$)

$$q_1^a \mid 1 + q_2 + \cdots + q_2^{2\beta_2}, \text{ d. h. } N_2 = a. \tag{23}$$

Dann gilt ferner

$$1 + q_2 + \cdots + q_2^{2\beta_2} = \prod_{\lambda=2}^{a+1} \sum_{\varkappa=0}^{q_1-1} q_2^{\varkappa q_1^{\lambda-2}} = q_1^a p^{\xi_1} \prod_{\varrho=3}^{a+1} q_\varrho^{\xi_\varrho}; \qquad \xi_1, \xi_\varrho > 0, \text{ ganz.} \tag{24}$$

Daraus folgt z. B. auch, daß $2\beta_2 + 1 = q_1^a$ sein muß.

Ist $F_{2\beta_2+1}(q_2) \not\equiv 0 \pmod p$, so können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen:

$$F_{2\beta_2+1}(q_2) = q_1 q_{a+1}^{\xi_{a+1}}; \quad q_{a+1}^{\xi_{a+1}} \equiv 1 \pmod{p^{\xi_1} q_3^{\xi_3} \cdots q_a^{\xi_a}}. \tag{25}$$

Wäre nun $F_{2\beta_{a+1}+1}(q_{a+1})$ teilbar durch eine der Primzahlen $p, q_3, \ldots, q_a$, so ergäbe sich daraus der Widerspruch $2\beta_{a+1} + 1 \leqq \xi_{a+1}$. Wäre $F_{2\beta_{a+1}+1}(q_{a+1}) = q_2^{\xi_2}$, so folgte der Widerspruch $2\beta_2 + 1 \leqq \xi_2$. Wäre $F_{2\beta_{a+1}+1}(q_{a+1}) = q_1 q_2^{\xi_1}$, so müßte $2\beta_{a+1} + 1$ eine Potenz von q_1 sein, und das führte mit (25) zusammen zum Widerspruch[7]).

Somit erhalten wir aus (19), (20) und (21)

$$\begin{cases} N_{a+1} = M_{a+1} = 0; \\ 6 \cdot 2\beta_1 = 6M_1 + 4N_1 + \sum_{\varrho=2}^{a} (6M_\varrho + 3N_\varrho) + 2N_1 + 3 \sum_{\varrho=2}^{a} N_\varrho \\ \qquad \leqq 2a + 3a(a-1) + \frac{3}{2} a(a+1) = \frac{a}{2}(9a+1). \end{cases} \tag{26}$$

Ist $F_{2\beta_2+1}(q_2) \equiv 0 \pmod p$, so folgt

$$F_{2\beta_2+1}(q_2) = q_1 p^{\xi_1}; \; p^{\xi_1} \equiv 1 \pmod{q_\varrho^{\xi_\varrho}} \text{ für } \varrho = 3, \ldots, a+1. \tag{27}$$

Ist $F_{\frac{\alpha+1}{2}}(p)$ teilbar durch ein q_ϱ, so folgt $\frac{\alpha+1}{2} \mid \xi_1$. Da nun $\xi_1 \leqq \alpha$ sein muß, ergibt sich

$$\frac{\alpha+1}{2} = \xi_1. \tag{28}$$

---

[6]) Vgl. a. a. O. [3]).

[7]) Vgl. a. a. O. [3]).

Nach (27) wäre dann aber $p^{\frac{\alpha+1}{2}} \equiv 1 \pmod{q_\varrho^{\xi_\varrho}}$ für $\varrho = 3, \ldots, a+1$. Dann müßte $F_{\alpha+1}(p) = q_2^{\xi_2}$ sein und daraus ergäbe sich der Widerspruch $2\beta_2 + 1 \leqq \xi_2$. Somit muß also

$$M_1 = N_1 = 0 \tag{29}$$

sein. Das liefert mit (19), (20) und (21)

$$2 \cdot 2\beta_1 = \sum_{\varrho=2}^{a+1} (2M_\varrho + N_\varrho) + \sum_{\varrho=2}^{a+1} N_\varrho \leqq a^2 + \frac{a}{2}(a+1). \tag{30}$$

Im Fall III gilt

$$2M_\varrho + N_\varrho \leqq a - 1 \text{ für } \varrho = 2, \ldots, a+1; \quad M_1 + N_1 + \sum_{\varrho=2}^{a+1} (M_\varrho + N_\varrho) = 2\beta_1 - \xi, \tag{31}$$

wenn wir mit M_1 bzw. N_1 diesmal die Anzahlen der $F_{2m_1}(p)$ bezeichnen, die durch q_1 teilbar und Teiler von $1 - p + p^2 - \cdots + p^{\frac{\alpha-1}{2}}$ sind und mindestens zwei verschiedene Primteiler der Restklasse $1 \pmod{q_1}$ bzw. nicht zwei solche Primteiler besitzen. Auch hier ist

$$3M_1 + 2N_1 \leqq a. \tag{32}$$

Ferner ist jetzt

$$\sum_{\varrho=2}^{a+1} N_\varrho \leqq \frac{a}{2}(a-1). \tag{33}$$

Somit folgt aus (23), (24) und (25), daß

$$\begin{aligned} 6 \cdot (2\beta_1 - \xi) &= 6M_1 + 4N_1 + \sum_{\varrho=2}^{a+1} (6M_\varrho + 3N_\varrho) + 2N_1 + 3\sum_{\varrho=2}^{a+1} N_\varrho \\ &\leqq 2a + 3a(a-1) + a + \frac{3}{2}a(a-1) = \frac{3a}{2}(3a-1), \end{aligned}$$

also schließlich

$$2\beta_1 - \xi \leqq \left[\frac{a}{4}(3a-1)\right] \tag{34}$$

gilt. Es sei jetzt

$$q_1^{a-1} \mid 1 + q_2 + \cdots + q_2^{2\beta_2}, \text{ also } N_2 = a - 1. \tag{35}$$

Dann können wir setzen

$$1 + q_2 + \cdots + q_2^{2\beta_2} = \prod_{\lambda=2}^{a} \sum_{\varkappa=0}^{q_1-1} q_2^{\varkappa q_1^{\lambda-2}} = q_1^{a-1} \prod_{\varrho=3}^{a+1} q_\varrho^{\xi_\varrho}; \ \xi_\varrho > 0, \text{ ganz.} \tag{36}$$

$$2\beta_2 + 1 = q_1^{a-1}; \ F_{2\beta_2+1}(q_2) = q_1 q_{a+1}^{\xi_{a+1}}; \ q_{a+1}^{\xi_{a+1}} \equiv 1 \pmod{q_\varrho^{\xi_\varrho}}; \ \varrho = 3, \ldots, a. \tag{37}$$

Wie früher ergibt sich

$$N_{a+1} = M_{a+1} = 0;$$

$$\begin{aligned} 6(2\beta_1 - \xi) &= 6M_1 + 4N_1 + \sum_{\varrho=2}^{a} (6M_\varrho + 3N_\varrho) + 2N_1 + 3\sum_{\varrho=2}^{a} N_\varrho \\ &\leqq 2a + 3(a-1)^2 + a + \frac{3}{2}a(a-1). \end{aligned} \tag{38}$$

Hiermit ist der Beweis von (16) beendet.

(39) **Zusatz zu (16).** *Wenn q_1 eine Gaußsche Primzahl ist, ist*

$$\left(q_1 - 1, \frac{\alpha+1}{2}\right) = (q_1 - 1, 2\beta_\varrho + 1) = 1$$

erfüllt. Für $q_1 = 3$ können wir insbesondere zeigen:

Ist N_1 die Anzahl der $F_{m_1}(p) \mid 1 + p^2 + p^4 + \cdots + p^{a-1}$, die nicht zwei verschiedene Primteiler der Restklasse 1 (mod 3) *enthalten und für die $m_1 \mid 2 \cdot 3^{2\beta_1}$ gilt, so ergibt sich*

I. für $p \equiv 1 \pmod 3$:

$$2\beta_1 \leqq Min\left(a(a-1) + \left[\frac{a-1}{2}\right]; \left[\frac{(a+1)^2}{2} - \frac{a}{4}\right]\right), \text{ wenn } N_1 < a \text{ und}$$

$$3^a \nmid 1 + q_\varrho + \cdots + q_\varrho^{2\beta_\varrho} \text{ für alle } \varrho = 2, \ldots, r;$$

$$2\beta_1 \leqq \tfrac{1}{2}\, a(a+1) \text{ sonst};$$

II. für $p \equiv -1 \pmod 3$:

$$2\beta_1 - \xi \leqq \tfrac{1}{2}\, a(a-1), \text{ wenn } N_1 = a;$$

$$2\beta_1 - \xi \leqq \left[\frac{a^2}{2} - \frac{a}{4} + \frac{1}{2}\right], \text{ wenn } 3^{a-1} \mid 1 + q_\varrho + \cdots + q_\varrho^{2\beta_\varrho} \text{ für ein } \varrho \text{ aus } 2, \ldots, r;$$

$$2\beta_1 - \xi \leqq Min\left(a(a-2) + \left[\frac{a-1}{2}\right]; \left[\frac{a^2}{2} + \frac{a}{4}\right]\right), \text{ wenn } N_1 < a \text{ und}$$

$$3^{a-1} \nmid 1 + q_\varrho + \cdots + q_\varrho^{2\beta_\varrho} \text{ für alle } \varrho = 2, \ldots, r.$$

Wir beweisen zunächst den folgenden

(40) **Hilfssatz.** *Wenn x, y, z ganze Zahlen und q eine Primzahl bedeuten, kann von den drei Gleichungen $1 + x + x^2 = q^m$ (m positiv, ganz); $1 + y + y^2 = 3q$; $1 + z + z^2 = 3q^2$ höchstens eine gelten, es sei denn $q = 7$; $x = 2, -3, 18, -19$; $y = 4, -5$ oder $q = 13$; $x = 3, -4$; $z = 22, -23$.*

Beweis. Wegen $1 - (k+1) + (k+1)^2 = 1 + k + k^2$ können wir x, y, z als positiv annehmen. Es sei zunächst $m = 1$. Das Zusammenbestehen der ersten beiden Gleichungen führt zu $(y - x)(1 + y + x) = 2q$. Es ergeben sich die drei Fälle: $y - x = 1, = 2, \geqq q$. Davon führen der mittlere zu $q = 7$; $x = 2$; $y = 4$ und die anderen zu Widersprüchen. Das Zusammenbestehen der ersten und dritten Gleichung ergibt $(z - x)(1 + z + x) = q(3q - 1)$. Aus $q \mid z - x$ folgt ein Widerspruch und $q \mid 1 + z + x$ liefert $q = 13$; $x = 3$; $z = 22$. Das Zusammenbestehen der zweiten und dritten Gleichung ergibt $(z - y)(1 + z + y) = 3q(q - 1)$. Sowohl aus $q \mid z - y$ wie auch aus $q \mid 1 + z + y$ folgen Widersprüche. Für $m > 1$ folgt aus einem Satz von Herrn W. Ljunggren[8]), daß $m = 3$; $q = 7$; $x = 18, -19$ sein muß.

Beweis von (39). Wir bezeichnen mit M_1 die Anzahl der $F_{m_1}(p) \mid 1 + p^2 + \cdots p^{a-1}$, die mindestens zwei verschiedene Primteiler der Restklasse 1 (mod 3) enthalten und für welche $m_1 \mid 2 \cdot 3^{2\beta_1}$ gilt. Dann folgt[9])

$$(41) \qquad \begin{cases} 2M_1 + N_1 \leqq a & \text{für } p \equiv \pm 1 \pmod 3; \\ \sum\limits_{\varrho=1}^{a+1} N_\varrho \leqq \begin{cases} a+1 & \text{für } p \equiv 1 \pmod 3 \\ a & \text{für } p \equiv -1 \pmod 3. \end{cases} \end{cases}$$

Im Fall $p \equiv 1 \pmod 3$ ergibt sich (vgl. (19))

$$(42) \qquad \begin{cases} 2M_\varrho + N_\varrho \leqq a \text{ für } \varrho = 2, \ldots, a+1; \\ 2\beta_1 = \dfrac{M_1 + N_1}{2} + \sum\limits_{\varrho=2}^{a+1} (M_\varrho + N_\varrho). \end{cases}$$

Das führt zu $2\beta_1 \leqq \left[\dfrac{(a+1)^2}{2} - \dfrac{a}{4}\right]$.

---

[8]) *W. Ljunggren*, Einige Bemerkungen über die Darstellung ganzer Zahlen durch binäre kubische Formen mit positiver Diskriminante, Acta math. **75** (1942), 1—21.

[9]) Vgl. *T. Nagell*, Des équations indéterminées $x^2 + x + 1 = y^n$ et $x^2 + x + 1 = 3y^n$, Norsk Matematisk Forenings Skrifter, Serie I, **2**, 1—14, 1921. Aus dieser Arbeit, ferner aus *H. J. Kanold*, Sätze über Kreisteilungspolynome und ihre Anwendungen auf einige zahlentheoretische Probleme II, J. f. reine u. angew. Math. **188**, 129—146, 1950, insbesondere Abschnitt III, (27), sowie aus (40) folgt, daß $\sum\limits_{\varrho=1}^{a+1} N_\varrho$ höchstens gleich der Anzahl der verschiedenen Primteiler der Restklasse 1 (mod 3) von n sein kann.

Im Fall $p \equiv -1 \pmod 3$ ergibt sich (vgl. (31))

$$(43)\qquad \begin{cases} 2M_\varrho + N_\varrho \leqq a-1 \text{ für } \varrho = 2, \ldots, a+1; \\ 2\beta_1 - \xi = \dfrac{M_1 + N_1}{2} + \sum\limits_{\varrho=2}^{a+1} (M_\varrho + N_\varrho). \end{cases}$$

Das führt zu $2\beta_1 - \xi \leqq \left[\dfrac{a^2}{2} + \dfrac{a}{4}\right]$.

Es sei nun $N_1 = a$. Dann folgt, daß a gerade sein muß, weil $M_1 + N_1$ gerade ist. Ferner können wir annehmen

$$(44)\qquad \begin{cases} M_1 = 0;\ N_\varrho = 0 \text{ für } \varrho = 3, \ldots, a+1;\ N_2 \leqq 1, \text{ wenn } p \equiv 1 \pmod 3; \\ N_2 = 0, \text{ wenn } p \equiv -1 \pmod 3. \end{cases}$$

Somit folgt nach (42) und (43)

$$(45)\qquad 2\beta_1 = \frac{a}{2} + M_2 + N_2 + \sum_{\varrho=3}^{a+1} M_\varrho \leqq \frac{1}{2}a(a+1), \text{ wenn } p \equiv 1 \pmod 3.$$

Dabei beachten wir, daß aus (42) und $N_2 \leqq 1$ folgt:

$$2\,M_2 \leqq a \text{ für } N_2 = 0;\ 2\,M_2 + 1 \leqq a - 1 \text{ für } N_2 = 1,$$

weil wir ja in unserem Fall a als gerade voraussetzen können. Für $p \equiv -1 \pmod 3$ ergibt sich

$$(46)\qquad 2\beta_1 - \xi = \frac{a}{2} + \sum_{\varrho=2}^{a+1} M_\varrho \leqq \frac{1}{2}a(a-1).$$

Zum Schluß nehmen wir an

$$(47)\qquad \begin{cases} 3^a \mid 1 + q_2 + \cdots + q_2^{2\beta_2}, \text{ d. h. } N_2 = a, \text{ wenn } p \equiv 1 \pmod 3; \\ 3^{a-1} \mid 1 + q_2 + \cdots + q_2^{2\beta_2}, \text{ d. h. } N_2 = a-1, \text{ wenn } p \equiv -1 \pmod 3. \end{cases}$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir setzen

$$(48)\qquad \begin{aligned} &\text{für } p \equiv 1 \pmod 3\colon\ 2\beta_2 + 1 = 3^a;\ \prod_{\lambda=2}^{a} (1 + q_2^{3^{\lambda-2}} + q_2^{2\cdot 3^{\lambda-2}}) = 3^a p^{\xi_1} \prod_{\varrho=3}^{a+1} q_\varrho^{\xi_\varrho}; \\ &\text{für } p \equiv -1 \pmod 3\colon\ 2\beta_2 + 1 = 3^{a-1};\ \prod_{\lambda=2}^{a} (1 + q_2^{3^{\lambda-2}} + q_2^{2\cdot 3^{\lambda-2}}) = 3^{a-1} \prod_{\varrho=3}^{a+1} q_\varrho^{\xi_\varrho}. \end{aligned}$$

Dabei kommen für die Exponenten ξ_1, ξ_ϱ nur die Werte 1, 2 in Betracht[10]). Wäre $N_1 = 1$, so folgte aus (40), daß mit ganzzahligen $\nu \geqq 0$ einer der drei Fälle

$$(49)\qquad 1 \pm p^{3^\nu} + p^{2\cdot 3^\nu} = q_2,\ = 3q_2,\ = 3q_2^2$$

eintreten müßte. Dann müßte es aber zwei Primzahlen $q_i, q_j\,(3 \leqq i, j \leqq a+1)$ so geben, daß $q_i q_j \leqq 1 + p + p^2$ wäre.

Daraus folgte nach (48) sogleich

$$(p+1)^2 > q_i q_j \geqq \sqrt{\frac{1 + q_2 + q_2^2}{3}}\sqrt{\frac{1 + q_2^3 + q_2^6}{3}} > \frac{q_2^4}{3};\ p + 1 > \frac{q_2^2}{2};$$

aus (49) könnten wir dann schließen:

$$(50)\qquad (p-1)^2 < 1 - p^{3^\nu} + p^{2\cdot 3^\nu} \leqq 3q_2^2 < 6(p+1);\ \ p^2 < 8p + 5 \leqq 9p.$$

Weil $p < 9$ wegen $p \equiv 1 \pmod 4$ zu $p = 5$ und $1 + 5^2 + 5^4 = 3 \cdot 7 \cdot 31 \mid n$ zu dem Widerspruch $3 \cdot 5 \cdot 7 \mid n$ führt, können wir also von jetzt an $N_1 = 0$ setzen. Wäre $N_\varrho = 1$ für ein ϱ aus $3, \ldots, a+1$, so wären wegen (40) und (48) nur noch die Fälle

$$(51)\qquad 1 + q_\varrho^{3^\nu} + q_\varrho^{2\cdot 3^\nu} = 3q_2,\ = 3q_2^2 \text{ mit ganzzahligem } \nu \geqq 0 \text{ möglich.}$$

Das führte aber gleichfalls zu Widersprüchen[11]).

---

[10]) Vgl. a. a. O. [8]).

[11]) Vgl. a. a. O. [3]).

Nach (48) ist nun $F_{2\beta_1+1}(q_2) = 3p^{\xi_1}$ oder $= 3q_{a+1}^{\xi_{a+1}}$, d. h. $p^{\xi_1} \equiv 1 \left(\mathrm{mod} \prod_{\varrho=3}^{a+1} q_\varrho^{\xi_\varrho}\right)$ oder $q_{a+1}^{\xi_{a+1}} \equiv 1 \left(\mathrm{mod}\, p^{\xi_1} \prod_{\varrho=3}^{a} q_\varrho^{\xi_\varrho}\right)$ bzw. $\equiv 1 \left(\mathrm{mod} \prod_{\varrho=3}^{a} q_\varrho^{\xi_\varrho}\right)$.

Aus $F_{\alpha+1}(p) \equiv 0 \pmod{q_\varrho}$ ergäbe sich $\alpha + 1 \mid \xi_1$, also $\alpha = 1$. Aus $F_{\alpha+1}(p) = q_2$, $= 3q_2$, $= 3q_2^2$ ergäben sich Widersprüche[12]).

Somit können wir in diesem Fall $M_1 = 0$ und

$$2\beta_1 = \sum_{\varrho=2}^{a+1} (M_\varrho + N_\varrho) = a + \sum_{\varrho=3}^{a+1} M_\varrho \leqq \tfrac{1}{2}\, a(a+1) \tag{52}$$

annehmen.

Aus $F_{2\beta_{a+1}+1}(q_{a+1}) \equiv 0 \pmod{p}$ oder $\equiv 0 \pmod{q_\varrho}$ folgte der Widerspruch $2\beta_{a+1} + 1 \mid \xi_{a+1} \leqq 2$.

$F_{2\beta_{a+1}+1}(q_{a+1}) = q_2$, $= 3q_2$, $= 3q_2^2$ führt wie oben zu lauter Widersprüchen. Also folgt schließlich $M_{a+1} = 0$ und

$$\begin{cases} 2\beta_1 = \dfrac{M_1}{2} + a + \sum\limits_{\varrho=3}^{a} M_\varrho \leqq \dfrac{1}{2}\, a(a+\ ); \\ 2\beta_1 - \xi = \dfrac{M_1}{2} + a - 1 + \sum\limits_{\varrho=3}^{a} M_\varrho \leqq \dfrac{a}{4} + a - 1 + (a-2)\dfrac{a-1}{2} = \dfrac{a^2}{2} - \dfrac{a}{4} + \dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{53}$$

Damit ist (39) vollständig bewiesen.

§ 3.

(54) **Hilfssatz.** *Es kann nicht* $n = p^\alpha q_1^4 q_2^4 \prod_{\varrho=3}^{r} q_\varrho^2 \not\equiv 0 \pmod 3$ *sein.*

Beweis. Hätte die ungerade vollkommene Zahl n die obige Gestalt, so wäre

$$p \equiv 1 \pmod 3;\ q_\varrho \equiv 2 \pmod 3 \text{ für } \varrho = 3, \ldots, r. \tag{55}$$

Ferner müßte $\prod_{\varrho=3}^{r} (1 + q_\varrho + q_\varrho^2)$ ein Teiler von $p^\alpha q_1^4 q_2^4$ und $\prod_{\varrho=3}^{r} q_\varrho^2$ ein Teiler von

$$\frac{p+1}{2}\left(1 + p + p^2 + \cdots + p^{\frac{\alpha-1}{2}}\right)\left(1 - p + p^2 - \cdots + p^{\frac{\alpha-1}{2}}\right) \prod_{\varrho=1}^{2} (1 + q_\varrho + q_\varrho^2 + q_\varrho^3 + q_\varrho^4)$$

sein. Auf Grund früherer Ergebnisse[13]) ergibt sich daraus

$$r - 2 \leqq 9. \tag{56}$$

Die Abschätzung

$$\frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{19}{18} \cdot \frac{23}{22} \cdot \frac{29}{28} \cdot \frac{31}{30} \cdot \frac{37}{36} \cdot \frac{41}{40} \cdot \frac{43}{42} \cdot \frac{47}{46} < 2 \tag{57}$$

führt zu

$$n \equiv 0 \pmod 5. \tag{58}$$

$p = 5$ zieht den Widerspruch $n \equiv 0 \pmod 3$ nach sich.

$q_1 = 5$ führt zu $\prod_{\varrho=3}^{r} (1 + q_\varrho + q_\varrho^2) \mid p^\alpha q_2^4$; $r - 2 \leqq 5$. Das bedeutet aber einen Widerspruch[14]).

---

[12]) Entweder wäre dann $q_2 \equiv 1 \pmod p$, was zu $3 \equiv 0 \pmod p$ führen würde, oder es folgten Widersprüche auf Grund früherer Ergebnisse (vgl. a. a. O. [3])).

[13]) *H. J. Kanold*, Sätze über Kreisteilungspolynome und ihre Anwendungen auf einige zahlentheoretische Probleme II, J. f. reine u. angew. Math. **188**, 129—146, 1950, insbesondere Abschnitt III, (41).

[14]) *H. J. Kanold*, Folgerungen aus dem Vorkommen einer Gaußschen Primzahl in der Primfaktorenzerlegung einer ungeraden vollkommenen Zahl, J. f. reine u. angew. Math. **186**, 25—29, 1944, insbesondere (7).

$q_3 = 5$ führt zu $1 + 5 + 5^2 = 31 \mid n$ und wegen $p \equiv 1 \pmod 4$ und (55) zu $n = p^\alpha 31^4 q_2^4 5^2 \prod_{\varrho=4}^{r} q_\varrho^2$. Weil $1 + 31 + \cdots + 31^4 \equiv 0 \pmod{11}$ gilt, folgt auch $11 \mid n$. $q_2 = 11$ würde wie oben zu dem Widerspruch $r - 2 \leqq 5$ führen. Daher bleibt nur noch übrig

(59) $$q_4 = 11 \text{ und } 1 + 11 + 11^2 = 7 \cdot 19 \mid n.$$

Daraus folgt ein Widerspruch zu (55), weil keine der Primzahlen 7, 19 gleich p sein kann. Somit ist (54) bewiesen.

(60) **Hilfssatz.** *Es kann nicht* $n = p^\alpha 3^4 q_2^4 \prod_{\varrho=3}^{r} q_\varrho^2$ *sein.*

Beweis. $1 + 3 + \cdots 3^4 = 11^2 \mid n$ und $q_3 = 11$ liefert wegen

$$\frac{11^2}{3^4} \cdot \frac{7 \cdot 19}{11^2} \cdot \frac{3 \cdot 19}{7^2} \cdot \frac{3 \cdot 127}{19^2} > 2$$

einen Widerspruch. Wir können deshalb $q_2 = 11$ und $1 + 11 + \cdots + 11^4 = 5 \cdot 3221 \mid n$ annehmen. Ferner müssen $p = 5$ und $\alpha = 1$ sein[15]). Daraus ergibt sich sogleich ein Widerspruch; denn es ist

$$\prod_{\varrho=3}^{r} (1 + q_\varrho + q_\varrho^2) \not\equiv 0 \pmod{11} \text{ und } \frac{p+1}{2} = 3 \not\equiv 0 \pmod{11}.$$

(61) **Satz.** *Es kann nicht* $n = p^\alpha q_1^4 q_2^4 \prod_{\varrho=3}^{r} q_\varrho^2$ *sein.*

Beweis. Nach (54) und (60) können wir

(62) $$q_3 = 3;\ 13 \mid n;\ q_\varrho \equiv 2 \pmod 3 \text{ für } \varrho = 6, \ldots, r$$

voraussetzen.

I. $q_1 = 13;\ 1 + 13 + \cdots + 13^4 = 30941 \mid n$.

$p = 30941$ ergibt mit $\frac{p+1}{2} = 3^4 \cdot 191$ den Widerspruch $3^4 \mid n$.

$q_2 = 30941$ liefert $1 + 30941 - \cdots + 30941^4 \equiv 0 \pmod{5 \cdot 11}$ und damit

$$\frac{\sigma(n)}{n} > \frac{13}{9} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{14}{13} > 2.$$

$q_6 = 30941$ führt zu $1 + 30941 + 30941^2 = 157 \cdot 433 \cdot 14083 \mid n$.

Wenigstens eine der Primzahlen 157, 433, 14083 muß gleich p oder q_2 sein, da sonst $3^3 \mid n$ folgen würde. Nun ist $157 \equiv 14083 \equiv 3 \pmod{11}$; $433 \equiv 4 \pmod{11}$, d. h., wenn eine der drei oben genannten Primzahlen gleich q_2 ist, folgt $11 \mid n$ und $1 + 11 + 11^2 = 7 \cdot 19 \mid n$, was $3^3 \mid n$ zur Folge hat. $p = 433$ liefert $\frac{p+1}{2} = 7 \cdot 31 \mid n$. Auch das ergibt $3^3 \mid n$, und $1 + 433 + 433^2 = 3 \cdot 37 \cdot 1693$ zieht ebenfalls $3^3 \mid n$ nach sich.

II. $q_4 = 13;\ 1 + 13 + 13^2 = 3 \cdot 61 \mid n$.

$p = 61$ zieht nach sich $31 \mid n$, und daraus folgt entweder

$$1 + 31 + \cdots + 31^4 \equiv 0 \pmod{5 \cdot 11}$$

und damit der Widerspruch[16]) $3 \cdot 5^2 \cdot 11 \mid n$ oder

$$1 + 31 + 31^2 = 3 \cdot 331 \mid n.$$

Das ergibt mit $1 + 331 + \cdots + 331^4 \equiv 0 \pmod 5$ den Widerspruch $3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 31 \mid n$, der zu

$$\frac{\sigma(n)}{n} > \frac{13}{9} \cdot \frac{3 \cdot 61}{169} \cdot \frac{32}{31} \cdot \frac{31}{25} > 2$$

führt.

---

[15]) Vgl. a. a. O. [13]), (3).

[16]) Vgl. a. a. O. [13]), (3).

$q_1 = 61$ ergibt $1 + 61 + \cdots + 61^4 = 5 \cdot 131 \cdot 21491 \mid n$. Und $q_6 = 5$ führt wieder zu

$$\frac{\sigma(n)}{n} > \frac{13}{9} \cdot \frac{3 \cdot 61}{169} \cdot \frac{32}{31} \cdot \frac{31}{25} > 2 .$$

$q_2 = 5$ führt zu $3 \cdot 5^2 \cdot 11 \mid n$[17]).

Wir erhalten also in diesem Fall

$$n = 5^\alpha \cdot 61^4 \cdot q_2^4 \cdot 3^2 \cdot 13^2 \cdot q_5^2 \cdots q_r^2 ; \; q_5 \equiv \cdots \equiv q_r \equiv 2 \pmod 3 .$$

Ferner muß $\alpha = 1$ sein, da $1 + q_\varrho + q_\varrho^2 \not\equiv 0 \pmod 5$ für $\varrho = 3, \ldots, r$ und $1 + q_2 + \cdots + q_2^4 \not\equiv 0 \pmod{5^2}$ ist. Wir können somit $q_5 = 131$ und $q_6 = 21491$ annehmen. Das führt zu $1 + 131 + 131^2 = 17293 \mid n$ und $q_2 = 17293$. Somit ergibt sich

$$n = 5 \cdot 61^4 \cdot 17293^4 \cdot 3^2 \cdot 13^2 \cdot 131^2 \cdot 21491^2 \cdot q_7^2 \cdots q_r^2 .$$

Das führt aber sogleich zu einem Widerspruch, da

$$1 + 17293 + \cdots + 17293^4 \equiv 5 \not\equiv 0 \pmod{131}$$

ist.

$q_5 = 61$ liefert $1 + 61 + 61^2 = 3 \cdot 13 \cdot 97 \mid n$. Und $p = 97$; $\frac{p+1}{2} = 7^2 \mid n$ führt wegen (62) zu $1 + 7 + \cdots + 7^4 = 2801 \mid n$. Wir können $q_6 = 2801$ annehmen, weil sonst $3 \cdot 5 \cdot 7 \mid n$ wäre. Aus $1 + 2801 + 2801^2 = 37 \cdot 43 \cdot 4933$ folgt $3^4 \mid n$. Und $q_1 = 97 \equiv -2 \pmod{11}$ führt zu $1 + 97 + \cdots + 97^4 \equiv 0 \pmod{11}$. $q_2 = 11$ liefert $3 \cdot 5 \cdot 11 \mid n$. Dann müßte $p = 5$, $\alpha = 1$ und $3^3 \mid n$ sein. $q_6 = 11$ führt zu $1 + 11 + 11^2 = 7 \cdot 19 \mid n$. Wegen $7 \equiv 19 \equiv 3 \pmod 4$ ergibt dies aber nach (62) einen Widerspruch.

III. $p = 13$; $\frac{p+1}{2} = 7 \mid n$.

$q_1 = 7$; $1 + 7 + \cdots + 7^4 = 2801 \mid n$. Wir können $q_4 = 2801$ setzen, da sonst $3 \cdot 5 \cdot 7 \mid n$ folgen würde. $1 + 2801 + 2801^2 = 37 \cdot 43 \cdot 4933 \mid n$ besagt, daß eine der drei letztgenannten Primzahlen gleich q_2 sein muß, da sonst $3^3 \mid n$ wäre. Für $q_2 = 37$ ergibt $1 + 37 + \cdots + 37^4 \equiv 0 \pmod{11}$ den Widerspruch $3^2 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 19^2 \mid n$, der zu $\frac{\sigma(n)}{n} > 2$ führt. $1 + 37 + 37^2 = 3 \cdot 7 \cdot 67$ zieht $3^3 \mid n$ nach sich.

$q_4 = 7$; $1 + 7 + 7^2 = 3 \cdot 19 \mid n$. Hier führt $q_1 = 19$ zu $151 \cdot 911 \mid n$ und $q_5 = 151$, $q_6 = 911$, da sonst $3 \cdot 5 \cdot 7 \mid n$ wäre. $1 + 151 + 151^2 = 3 \cdot 7 \cdot 1093$ liefert $q_2 = 1093$ wegen (62). Nun besitzt $1 + 911 + 911^2$ mindestens einen Primteiler der Restklasse $1 \pmod 3$, der von 7, 13, 19, 151, 1093 verschieden ist. Das steht im Widerspruch zu (62). $q_5 = 19$ ergibt $3 \cdot 127 \mid n$. Nach (62) können wir $q_1 = 127$ annehmen. Es ist

$$1 + 127 + \cdots + 127^4 = 262\,209\,281 = 12641^2 + 25 \cdot 2024^2 = \text{Primzahl}.$$

Wäre diese Primzahl gleich q_2, so wäre $3 \cdot 5 \cdot 7 \mid n$. Wäre diese Primzahl gleich q_6, so dürfte $1 + q_6 + q_6^2$ als Primteiler nur 13, 127, q_2, 7, 19 besitzen. Davon fallen 127, 7, 19 weg, so daß höchstens $1 + q_6 + q_6^2 = 13^x \cdot q_2^y$ sein könnte mit $y = 1, 2, 3, 4$. Da die linke Seite dieser Gleichung kongruent $3 \pmod 4$ ist, folgt $q_2 \equiv 3 \pmod 4$ und $y = 1, 3$.

Aus $1 + q_6 + q_6^2 \equiv 3 \pmod 7$ und $13^x \cdot q_2^3 \equiv \pm 1 \pmod 7$ folgt ein Widerspruch. Somit bleibt nur noch $y = 1$. Es läßt sich leicht feststellen, daß $1 + q_6 + q_6^2 \not\equiv 0 \pmod{13^2}$. Also ist auch $x = 1$. Nun ist aber $1 + q_6 + q_6^2 \equiv 3 \pmod 5$, also $13 q_2 \equiv 3$, d. h. $q_2 \equiv 1 \pmod 5$. Damit ergibt sich schließlich der Widerspruch $5 \mid n$. Somit ist die Richtigkeit von (61) vollständig gezeigt.

---

[17]) Vgl. a. a. O. [15]), (3).

§ 4.

(63) **Satz.** *Es kann nicht* $n = p^5 \prod_{\varkappa=1}^{k} q_\varkappa^2 \prod_{\lambda=k+1}^{r} q_\lambda^4$ *sein.*

Beweis. Wir können $3 \mid 1 + p^2 + p^4 \mid n$ annehmen.

Der Fall $3^4 \mid n$ führt zu $11 \mid n$ und zu dem Widerspruch $\frac{\sigma(n)}{n} > 2$.

Ist $q_1 = 3$, so können wir $13 \mid n$ und $q_3 \equiv \cdots \equiv q_k \equiv 2 \pmod 3$ annehmen.

I. $p = 13$ liefert $7 \cdot 3 \cdot 61 \cdot 157 \mid n$. Weil $61^4 \mid n$ zu $3 \cdot 5 \cdot 7 \mid n$ führt, bleibt noch zu untersuchen $q_2 = 61$; $7^4 \cdot 157^4 \mid n$ und wegen $1 + 61 + 61^2 = 3 \cdot 13 \cdot 97 \mid n$ auch noch $97^4 \mid n$. Aus $97 \equiv -2 \pmod{11}$ folgt $11 \mid n$. Dann ergibt sich aber entweder $3 \cdot 5 \cdot 7 \mid n$ oder $19 \mid n$ und $\frac{\sigma(n)}{n} > 2$.

II. $q_2 = 13$ liefert $61 \mid n$. Es muß $p \equiv 1 \pmod 3$ sein, weil sonst $3^3 \mid n$ wäre. $p = 61$ führt zu $31 \mid n$; $5 \mid n$ und $\frac{\sigma(n)}{n} > \frac{13}{9} \cdot \frac{31}{25} \cdot \frac{3 \cdot 61}{169} \cdot \frac{32}{31} > 2$. Und $61^4 \mid n$ führt zu $5 \mid n$. Aus $q_3 = 5$ ergibt sich $31 \mid n$ und $\frac{\sigma(n)}{n} > 2$. Aus $5^4 \mid n$ ergibt sich $11 \cdot 71 \mid n$ und $\frac{\sigma(n)}{n} > 2$.

III. $13^4 \mid n$ liefert $30941 \mid n$.

$p = 30941$ führt mit $\frac{p+1}{2} = 3^4 \cdot 191 \mid n$ zu einem Widerspruch.

Aus $1 + 30941 + \cdots + 30941^4 \equiv 0 \pmod{5 \cdot 11}$ folgt $3 \cdot 5^2 \cdot 11 \mid n$.

Somit bleibt noch der Fall $q_3 = 30941$ zu untersuchen. Es ist dann

$$1 + 30941 + 30941^2 = 157 \cdot 433 \cdot 14083 \mid n.$$

Da $157 \equiv 14083 \equiv 3 \pmod{11}$; $433 \equiv 4 \pmod{11}$ gilt, kann keine dieser Primzahlen gleich einem q_λ sein, weil sonst $11 \mid n$ wäre und daraus sich $\frac{\sigma(n)}{n} > 2$ ergeben würde. Es müssen also mindestens zwei dieser Primzahlen genau in der zweiten Potenz in n enthalten sein. Das führt aber sofort zu dem Widerspruch $3^3 \nmid n$. Also ist (63) restlos bewiesen.

Eingegangen 14. September 1951.

Sur certains espaces de fonctions holomorphes. I.

Par *Alexandre Grothendieck*, Nancy.

§ 1. Introduction.

1. Sujet et plan. Cet article est destiné à apporter quelques généralisations et compléments à l'article de G. Köthe sur le même sujet (c. f. [7][1])). Il a été conçu néanmoins de façon indépendante, à la suite de la lecture du travail [11] de J. Silva, dont une mise au point s'imposait. Toutesfois, il convient de signaler que l'essentiel du § 6 a été inspiré par la lecture du travail de M. G. Köthe, que ce dernier avait eu l'amabilité de me communiquer.

Ce travail comprend trois parties. Les deux premières (Ia, Ib), assez élémentaires, ne s'appuient que sur les techniques générales exposées dans [4]. Dans la dernière partie II (§§ 7 et 8) au contraire nous sommes plusieurs fois obligés de nous appuyer sur des résultats non encore publiés (mais que je compte publier prochainement). Voici un sommaire des trois parties annoncées.

Ia. Nous donnons d'abord deux paragraphes préliminaires (§§ 2 et 3), sans prétention à l'originalité, sur les fonctions holomorphes à valeurs dans un espace vectoriel localement convexe arbitraire E. Le premier, qui donne les définitions et quelques propriétés élémentaires constamment utilisées des fonctions holomorphes, est indispensable pour la compréhension de la suite. Le second paragraphe donne les critères d'holomorphie relatifs aux espaces E les plus importants.

Ib. Les trois paragraphes suivants (§§ 4, 5, 6) constituent un développement, en langage moderne et avec la généralité qui lui appartient, de l'idée de J. Silva. Cette généralisation se fait dans plusieurs directions.

1. Au lieu d'envisager des espaces de fonctions holomorphes ordinaires et leurs applications linéaires, nous envisageons d'emblée des espaces de fonctions holomorphes à valeurs dans un espace vectoriel localement convexe E.

2. Nous obtenons plus de symétrie et même de simplicité dans l'exposé, en considérant deux parties complémentaires Ω_1 et Ω_2 non vides *quelconques* de la sphère de Riemann, et un accouplement entre les espaces $P(\Omega_1, E)$ et $P(\Omega_2, E')$ des fonctions holomorphes locales sur Ω_1 et Ω_2, à valeurs respectivement dans E et son dual E', — au lieu de supposer Ω_1 ouvert, Ω_2 fermé, et de distinguer entre ces deux cas. D'ailleurs, les très nombreux espaces vectoriels topologiques de fonctions holomorphes locales qu'on obtient ainsi jouissent de propriétés aussi simples que ceux pour lesquels Ω_1 est ouvert ou fermé (comme nous le montrerons au § 8).

3. Nous donnons une représentation intégrale pour toutes les applications linéaires *bornées* d'un espace $P(\Omega_1, E)$ dans un espace localement convexe complet quelconque (§ 5), le passage de la détermination des *formes* linéaires continues à cas général se faisant par une méthode de transposition assez standard.

[1]) Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de cet article.

4. Au § 6, nous obtenons un théorème de structure pour *toutes* les applications linéaires continues d'un espace $P(\Omega_1, E)$ dans un espace localement convexe complet *quelconque*, grace à une extension de la notion de fonction holomorphe locale, extension qui pourra ne pas sembler simple à certains, mais qui, comme nous le montrons, devient très simple dans les cas particuliers les plus importants.

5. Enfin, nous donnerons ailleurs quelques indications montrant comment la théorie de J. Silva peut se généraliser à une vaste classe d'équations elliptiques sur une variété[2]), grâce au formalisme des noyaux-distributions introduit par L. Schwartz.

II. La dernière partie de ce travail — étude topologique des espaces de fonctions holomorphes introduits précédemment — est sans doute la plus originale et la plus importante. Plus encore que dans les paragraphes précédents, les méthodes empoyées sont susceptibles de généralité. Malheureusement, sauf le théorème 5 du § 7 et l'essentiel du § 8, N°s **1** et **3**, ces méthodes ne sont pas élémentaires, i. e. ne sont pas encore de technique courante; elles s'appuient en partie sur des résultats non publiés que nous sommes obligés d'admettre.

Le § 7 est consacré à l'exposé des propriétés topologiques des espaces $H(O, E)$ de fonctions holomorphes sur une variété holomorphe quelconque O (à une ou plusieurs dimensions complexes), à valeurs dans l'espace vectoriel localement convexe E. Nous dégageons d'abord, des paragraphes 3 et 4, une importante propriété topologique intrinsèque de l'espace $H(O)$ des fonctions holomorphes complexes sur O, propriété qui reste valable même si O n'est pas, comme dans les paragraphes précédents, un ouvert de la sphère de Riemann. Pour énoncer cette propriété, nous avons besoin d'une notion de produit tensoriel topologique, que nous esquissons rapidement. Il apparait alors que $H(O)$ appartient à une importante classe d'espaces, que j'appelle *espaces nucléaires*, ayant entre autres des propriétés analogues à celles qui apparaissent dans certains espaces de fonctions indéfiniment différentiables dans la théorie de L. Schwartz (par exemple les espaces $(\mathfrak{E})$ et $(\mathfrak{S})$ (c. f. [9]). La proposition 7 et son raffinement, proposition 9, indispensables pour la suite (et que nous admettons ici) en résultent; elles semblent essentiellement nouvelles. Tous les résultats ultérieurs du § 7 pourraient s'énoncer en termes abstraits dans la théorie des espaces nucléaires. Nous donnons en particulier: un critère de compacité dans $H(O, E)$ (qui n'est autre que le classique et élémentaire théorème de Montel), et de faible compacité (th. 5 et 6), d'où un critère pour que $H(O, E)$ soit un espace (M), resp. réflexif; la détermination du bidual de $H(O, E)$, et une condition pour que cet espace soit distingué dans le sens de [4] (th. 8 et 9). Ces derniers théorèmes sont obtenus ici en plongeant $H(O, E)$ dans l'espace de Schwartz $\mathfrak{E}(O, E)$ des fonctions indéfiniment différentiables sur O à valeurs dans E, dont les formes linéaires peuvent se représenter concrètement par les méthodes de L. Schwartz. Nous esquissons rapidement les propriétés essentielles des espaces $\mathfrak{E}(O, E)$ (§ 7, N° 2). Comme conséquence, nous obtenons aussi une caractérisation simple de la topologie faible sur une partie bornée de $\mathfrak{E}(O, E)$, s'appliquant de façon évidente aux sous-espaces vectoriels fermés de $\mathfrak{E}(O, E)$, et en particulier à $H(O, E)$ (th. 7).

Enfin, le § 8, qui donne l'étude topologique interne des espaces $P(\Omega_1, E)$ (Ω_1 étant une partie arbitraire de la sphère de Riemann) se rattache de nouveau directement au § 4, et est pour l'essentiel de nature plus élémentaire que le § 7. Il se termine par un exemple très simple montrant que les hypothèses faites dans l'énoncé des propositions qui précédaient ne sont pas superflues.

---

[2]) Voir: Sur les espaces de solutions d'une classe générale d'équations aux dérivées partielles, Journal d'Analyse Mathématique, Jérusalem, 1953. M. *J. Dieudonné* avait de son côté aperçu la possibilité d'une généralisation de cette nature.

2. Notations. De façon générale, nous suivons la terminologie des «Eléments» de N. Bourbaki. Plus particulièrement, nous supposons une bonne connaissance de [2]. — Tous les espaces vectoriels topologiques envisagés seront localement convexes et séparés; nous utilisons constamment les notations et techniques de dualité générale de l'article fondamental [4]. En particulier, si E est un espace vectoriel topologique, on désignera par E' son dual, et par $\langle x, x' \rangle$ le produit scalaire de $x \in E$ par $x' \in E'$.

Les lettres grasses $\boldsymbol{R}$ et $\boldsymbol{C}$ désignent respectivement le corps des réels et des complexes.

3. Rappels sur l'intégrale faible. Soit M un espace localement compact muni d'une mesure de Radon μ. Une fonction f définie sur M, à valeurs dans l'espaces vectoriel localement convexe E, est dite *scalairement intégrable*, si pour tout $x' \in E'$, la fonction $\xi \to \langle f(\xi), x' \rangle$ est sommable. La somme de cette dernière dépend alors linéairement de x', c'est donc une forme linéaire sur E', c'est à dire un élément du complété faible $\hat{E}$ de E. Soit X cet élément on pose: $X = \int f(\xi)\, d\mu(\xi)$, et on l'appelle intégrale de la fonction f. Avec cette définition, les propriétés élémentaires usuelles de l'intégration se vérifient trivialement.

Le critère le plus important qui permette d'affirmer que $X \in E$ (et non seulement $X \in \hat{E}$) s'obtient ainsi: on montre d'abord par une application facile du «théorème des bipolaires» ([4], prop. 1) le

Lemme 1. *Si μ est bornée, de norme $\| \mu \|_1$ (masse totale si μ est positive) on a*

$$\int f(\xi)\, d\mu(\xi) \in \| \mu \|_1 \cdot K$$

où K est l'enveloppe convexe cerclée faiblement fermée dans $\hat{E}$ de l'ensemble des valeurs prises par f.

On en déduit aussitôt le

Lemme 2. *Si f est fonction continue à support compact, μ quelconque et si on suppose que dans E l'enveloppe convexe cerclée fermée d'un ensemble compact soit compacte, alors f est faiblement intégrable, et son intégrale est dans E.*

La propriété envisagée ici sur E, savoir que l'enveloppe convexe cerclée fermée d'un compact soit compacte, s'introduit ainsi naturellement chaque fois qu'on se propose d'intégrer des fonctions continues à valeurs dans E. Elle est pratiquement assez peu restrictive; entre autres, tous les espaces complets la possèdent.

§ 2. Généralités sur les fonctions holomorphes à valeurs vectorielles.

Théorème 1. *Soit f une fonction définie dans une partie ouverte O du plan complexe à valeurs dans l'espace vectoriel localement convexe E. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes:*

1) *Pour tout $x' \in E'$, la fonction $z \to \langle f(z), x' \rangle$ est holomorphe.*

2) *$f(z)$ est faiblement continue, et pour tout chemin rectifiable fermé simple Γ dans O dont l'intérieur soit contenu dans O, on a*

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 0. \tag{1}$$

3) *$f(z)$ est faiblement continue, et pour tout chemin rectifiable fermé simple Γ dans O dont l'intérieur soit contenu dans O, et tout point z intérieur à ce contour, on a*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(\xi)\, d\xi}{\xi - z}. \tag{2}$$

Nous dirons alors que f est fonction holomorphe dans O. Il suffit, pour que f soit holomorphe, que l'on ait

4) *$f(z)$ est faiblement dérivable dans O,*

et cette condition est nécessaire si dans E l'enveloppe convexe cerclée fermée d'un compact est compacte[3]*). Dans ce cas, $f(z)$ est même indéfiniment fortement différentiable, et on a pour tout $z \in O$*

$$(3) \qquad f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - z)^{n+1}}, \qquad z \text{ et } \Gamma \text{ comme dans } 3).$$

De plus, sous ces conditions, on a:

5) *Autour de tout point $z \in O$, on a le développement taylorien*

$$(4) \qquad f(z+h) = \sum_0^\infty a_n h^n \qquad \left(a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z)\right)$$

la série du second membre étant uniformément sommable pour $|h| \leqq r$, où r est un quelconque nombre positif strictement inférieur à la distance de z à $\complement O$. Réciproquement, si f admet autour de chaque point $z \in O$ un développement comme ci-dessus, la série étant faiblement convergente vers $f(z+h)$ pour h assez petit, alors f est holomorphe dans O.

Démonstration. L'équivalence de 1), 2) et 3) resulte trivialement de la définition de l'intégrale faible et des propriétés correspondantes pour fonctions à valeurs complexes. De même le fait que 4) implique l'holomorphie. Montrons la réciproque sous les conditions envisagées dans l'énoncé. De toutes façons, $f(z)$ est faiblement indéfiniment différentiable dans le complété faible $\hat{E}$ de E (espace de *toutes* les formes linéaires sur E') car cela signifie exactement, comme on vérifie tout de suite, que pour tout $x' \in E'$ la fonction $z \to \langle f(z), x' \rangle$ est fonction indéfiniment différentiable. $f^{(n)}(z)$ est alors la forme linéaire sur E' définie par

$$\langle f^{(n)}(z), x' \rangle = \frac{d^n}{dz^n} \langle f(z), x' \rangle.$$

De cette formule resulte que *dans* $\hat{E}$, on a

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - z)^{n+1}},$$

à cause de la formule analogue pour fonctions complexes. Reste à montrer que les $f^{(n)}(z)$ sont tous $\in E$ (d'où resultera que $f(z)$ est indéfiniment faiblement différentiable *dans* E) puis que $f(z)$ est même fortement indéfiniment différentiable. Pour le premier point, à cause de la formule intégrale pour $f^{(n)}(z)$ et l'hypothèse faite sur E, il suffit de montrer que $f(\xi)$ est fonction fortement continue. Soit donc $z \in O$, et $r > 0$ tel que $|h| \leqq r$ implique $z + h \in O$, soit K l'enveloppe convexe cerclée fermée dans $\hat{E}$ de l'ensemble des valeurs des $f'(z+h)$ pour ces valeurs de h. On a pour $|h| \leqq r$:

$$f(z+h) - f(z) = \int_z^{z+h} f'(\xi)\, d\xi$$

d'où (par la formule de la moyenne généralisée) $f(z+h) - f(z) \in h \cdot K$. Comme le premier membre est dans E, on peut dans cette formule remplacer K par $K \cap E$, qui est une partie bornée de E (car évidemment faiblement bornée). La continuité de f au point z en resulte immédiatement.

---

[3]) Il nous arrivera par la suite le parler des dérivées d'une fonction holomorphe à valeurs dans E, sans supposer que dans E l'enveloppe convexe cerclée fermée d'un compact soit forcément compacte. Nous sous-entendrons alors qu'on considère les dérivées comme fonctions holomorphes à valeurs dans le *complété* de E (dans lequel la condition relative aux enveloppes est vérifiée).

Reste à montrer que $f(z)$ est même fortement indéfiniment différentiable. Par récurrence, puisque les $f^{(n)}(z)$ sont elles mêmes des fonctions holomorphes à valeurs dans E, on est ramené à montrer que $f(z)$ est fortement différentiable. Mais on a

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - f'(z) = \frac{1}{h}\int_z^{z+h} (f'(\xi) - f'(z))\, d\xi$$

par suite le premier membre est contenu dans l'enveloppe convexe cerclée fermée de l'ensemble des valeurs $f'(\xi) - f'(z)$ quand ξ varie sur le segment $(z, z+h)$. Mais comme $f'(\xi)$ est fonction fortement continue parce que holomorphe, il suit aussitôt que le premier membre tend vers zéro fortement si h tend vers zéro, c. q. f. d.[4]).

Sous ces conditions, démontrons 5). Tout d'abord, il resulte de la propriété analogue pour les fonctions complexes que l'on a bien convergence faible de la somme infinie (4) vers $f(z+h)$, il faut montrer qu'on a en fait sommabilité forte et uniforme pour $|h| \leqq r$. Soit Γ une circonférence de centre z, de rayon $R > r$ avec $R <$ distance de z à $\complement O$. On a

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - z)^{n+1}}, \quad \text{d'où } a_n \in \frac{2\pi R}{2\pi}\,\frac{1}{R^{n+1}}\, K,$$

où K est l'enveloppe convexe cerclée fermée de $f(\Gamma)$, donc compact. Le terme général de la somme (4) est donc élément de $\lambda^n K$, où $\lambda = r/R < 1$. La sommabilité uniforme de la somme infinie (4) en resulte immédiatement (la série est même *absolument convergente* dans l'espace normé obtenu en munissant l'espace $\boldsymbol{C} \cdot K$ engendré par K de la topologie définie par la «boule» K). — Enfin la réciproque est évidente, car si f est donnée par un développement taylorien faiblement convergent au voisinage de tout point de O, il en sera de même des fonctions scalaires $\langle f(z), x' \rangle$, qui seront donc holomorphes, donc f sera holomorphe. Le théorème 1 est donc complétement démontré.

Remarque 1. Si on suppose que dans E l'enveloppe cerclée fermée d'un compact est compacte, pour vérifier qu'une fonction $f(z)$ est holomorphe, il suffit de vérifier qu'elle est continue, et que pour quelque partie *totale* $M \subset E'$, $x' \in M$ implique que $\langle f(z), x' \rangle$ est fonction holomorphe. Car pour un chemin rectifiable Γ donné, on sait déjà que l'intégrale $\int_\Gamma f(z)\, dz$ est élément de E, et pour vérifier que cette intégrale est nulle, il suffit de vérifier que son produit scalaire par toute $x' \in M$ l'est.

Comme application de cette remarque, supposons que F soit un sous-espace vectoriel de E (pas nécessairement fermé), muni d'une topologie localement convexe propre plus fine que la topologie induite par E, et pour laquelle l'axiome relatif aux enveloppes convexes cerclées fermées soit vérifié. Alors les applications holomorphes de O dans F muni de cette topologie, sont identiques aux applications continues *dans* F, qui sont applications holomorphes *dans* E.

D'ailleurs, rappelons à ce propos que pour vérifier que f est continue, il est souvent plus commode de vérifier que l'ensemble des valeurs prises par f sur un compact est compact, et que $\langle f(z), x' \rangle$ est fonction continue de z pour tout $x' \in M$ (mais ce dernier fait resultera déjà de l'holomorphie de cette fonction).

Ces remarques seront constamment utilisées dans nos exemples ultérieurs.

---

[4]) Ces deux raisonnements valent plus généralement pour prouver p. ex. que *a*) si une fonction f sur un ouvert O de $\boldsymbol{R}^n$ ou de $\boldsymbol{C}^n$, à valeurs dans E, est faiblement continûment différentiable *dans* $\hat{E}$ (i. e. si pour tout $x' \in E'$ la fonction $\langle f(\xi), x' \rangle$ est continûment différentiable) alors f est fortement continue, et *b*) si de plus $f'(\xi)$ est $\in E$ et application continue dans E, alors elle est dérivée *forte* de f. (Ce dernier fait, dû à L. Schwartz, est constamment utilisé dans son travail [10].) Notons encore dans cet ordre d'idées qu'on démontre de façon toute analogue (ou à partir de ce qui précède) que si E est *complet* et f est m fois faiblement continûment différentiable *dans* $\hat{E}$, alors elle est $m-1$ fois *fortement* continûment differentiable *dans* E.

Remarque 2. Pour que $f(z)$ soit fonction holomorphe, il faut (et il suffit évidemment) que pour tout $z \in O$ existe un voisinage U de z dans O et un ensemble borné convexe cerclé K dans E (qu'on peut même choisir comme enveloppe convexe cerclée fermée d'un compact) tel que $f(z)$ soit holomorphe en tant qu'application de U dans l'espace *normé* $\boldsymbol{C} \cdot K$ muni de la norme définie par la boule K.

Ce fait est par exemple contenu dans la dernière partie de la démonstration du théorème 1, du moins quand l'axiome des enveloppes est vérifié. Mais on s'assure immédiatement de la validité générale de ce fait en passant au complété de E. En fait, on peut même prendre pour U n'importe quel voisinage compact de z dans O, limité pour fixer les idées par un contour rectifiable Γ, et pour K l'enveloppe convexe cerclée fermée de $f(\Gamma)$.

Comme application, on voit que si deux topologies localement convexes sur E donnent les mêmes parties bornées (par exemple), elles définissent la même notion de fonction holomorphe. (D'ailleurs, le fait que dans la définition même de la notion de fonction holomorphe, seule la topologie faible de E intervient en fait, est un cas particulier de cette remarque). Exemple: Soit E un espace $(\mathfrak{F})$ (ou plus généralement un espace tonnelé ou complet —c. f. [3]), F un espace localement convexe arbitraire, $f(z)$ une fonction de la variable complexe z, à valeurs dans l'espace $L(E, F)$ des applications linéaires continues de E dans F. Alors il revient au même de dire que $f(z)$ est fonction holomorphe, qu'on munisse $L(E, F)$ de la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de E («topologie uniforme» quand E et F sont des espaces de Banach) ou de la topologie de la convergence simple; il faut et il suffit pour cela que $\langle f(z) \cdot x, y' \rangle$ soit fonction holomorphe de z pour tout $x \in E$, $y' \in F'$ (le dual de $L(E, F)$ muni de la convergence simple est en effet l'ensemble des combinaisons linéaires des formes du type $u \to \langle u \cdot x, y' \rangle$).

Remarque 3. Si $f(z)$ est fonction holomorphe dans O, on a $\int_\Gamma f(z)\, dz = 0$ chaque fois que Γ est un contour rectifiable qui soit le «bord» (au sens algébrique) d'un domaine U d'adhérence compacte contenue dans O. Cela resulte en effet immédiatement du fait analogue pour les fonctions holomorphes complexes.

Remarque 4. La somme de deux fonctions holomorphes dans O est évidemment holomorphe. On a un énoncé analogue pour le «produit» de deux fonctions holomorphes, sous les conditions générales suivantes. Soient E, F, H, des espaces localement convexes, $B(x, y)$ une application bilinéaire de $E \times F$ dans H, continue par rapport à chaque variable, soit $f(z)$ (resp. $g(z)$) une application holomorphe de l'ouvert O dans E (resp. dans F). Alors on peut affirmer que l'application $B(f(z), g(z))$ est holomorphe quand l'une des conditions suivantes est vérifiée:

a) Dans E l'enveloppe convexe cerclée fermée d'un compact est compacte, ou dans E' l'enveloppe convexe cerclée fermée d'un ensemble compact — pour la topologie de Mackey $\tau(E', E)$ par exemple — est compacte.

b) Pour tout $z \in O$, il existe un voisinage U de z dans O tel que l'enveloppe convexe cerclée fermée de $f(U)$ soit compacte.

La démonstration est standard. Appliquant la définition des fonctions holomorphes, on est ramené de suite au cas où H est le corps complexe. Alors B est une forme bilinéaire séparément continue, qui s'identifie donc à une application faiblement continue de F dans E'. Il faut donc prouver l'holomorphie de la fonction $\langle f(z), B \cdot g(z) \rangle$, on est donc ramené au cas où $F = E'$, B étant la forme bilinéaire canonique sur $E \times E'$. On peut supposer par raison de symétrie, si a) est vérifié, que c'est dans E que l'axiome des enveloppes est vérifié. On est donc ramené à l'hypothèse moins restrictive b). Nous voulons

montrer que la fonction $\langle f(z), g(z)\rangle$ admet la dérivée $\langle f(z), g'(z)\rangle + \langle f'(z), g(z)\rangle$. En effet, on a

$$\frac{1}{h}\left(\langle f(z+h), g(z+h)\rangle - \langle f(z), g(z)\rangle\right) = \left\langle \frac{f(z+h)-f(z)}{h}, g(z+h)\right\rangle + \left\langle f(z), \frac{g(z+h)-g(z)}{h}\right\rangle.$$

Si $h \to 0$, le deuxième terme tend vers $\langle f(z), g'(z)\rangle$, il faut donc montrer que la différence du premier terme et de $\langle f'(z), g(z)\rangle$ tend vers 0. D'ailleurs on peut dans cette différence remplacer $\langle f'(z), g(z)\rangle$ par $\langle f'(z), g(z+h)\rangle$, car de l'hypothèse résulte que $f'(z) \in E$, et d'autre part $g(z+h)$ tend vers $g(z)$ faiblement. Il faut donc montrer que

$$\left\langle \frac{f(z+h)-f(z)}{h} - f'(z), g(z+h)\right\rangle$$

tend vers 0 avec h. Mais de l'hypothèse sur f résulte qu'il existe un compact K *convexe cerclé* tel que $\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - f'(z) \in h \cdot K$ pour h assez petit. D'autre part, $g(z+h)$ reste dans un borné A de E' pour h assez petit. Comme l'ensemble des $\langle x, x'\rangle$, où $x \in K$, $x' \in A$, est alors borné d'après le théorème de Mackey sur les bornés, la conclusion voulue suit aussitôt.

Remarque 5. Les définitions et remarques de ce paragraphe s'étendent de façon évidente au cas de plusieurs variables complexes. Comme de plus la notion d'holomorphie est purement locale, on a une notion évidente de fonction holomorphe sur une variété holomorphe (à une ou plusieurs dimensions complexes).

§ 3. Exemples divers de fonctions holomorphes vectorielles.

a) E est l'espace des fonctions complexes continues sur un espace localement compact M, avec la topologie de la convergence compacte: les applications holomorphes $f(z)$ de O dans E s'identifient aux fonctions continues $f(z, t)$ définies sur l'espace produit $O \times M$, telles que pour tout $t \in M$, $z \to f(z, t)$ soit fonction holomorphe.

En effet, dans cet énoncé on a exprimé d'une part la continuité de l'application $f(z)$, d'autre part l'holomorphie des fonctions $z \to \langle f(z), x'\rangle$ où x' parcourt une partie totale du dual de E — savoir l'ensemble des «masses ponctuelles» sur M. La remarque 1 du § 2 s'applique effectivement, car l'espace E est ici complet.

De la même façon, on traite l'exemple

b) $E = (\mathfrak{E}^m)$, espaces des fonctions m fois continûment différentiables sur $\boldsymbol{R}^n$ $(0 \leqq m \leqq +\infty)$ avec la topologie usuelle de la convergence uniforme des dérivées d'ordre $\leqq m$ (voir [9]). Les applications holomorphes de O dans E s'identifient aux fonctions $f(z, t)$ sur l'espace produit $O \times \boldsymbol{R}^n$, telles que 1) pour tout $z \in O$, $f(z, t)$ est fonction m fois continûment différentiable de t, et ses dérivées d'ordre $\leqq m$ sont fonctions continues sur l'espace produit $O \times \boldsymbol{R}^n$, et 2) pour tout $t \in \boldsymbol{R}^n$, $f(z, t)$ est fonction holomorphe de z.

Dans ce critère, on peut bien entendu remplacer $\boldsymbol{R}^n$ par un ouvert de $\boldsymbol{R}^n$, ou au contraire par une adhérence d'ensemble ouvert. On aurait encore des énoncés tout analogues en remplaçant $\boldsymbol{R}^n$ par une variété, les espaces fonctionnels par des espaces de champs tensoriels etc. On peut aussi supposer dans les deux exemples précédents que E, au lieu d'être un espace de fonctions complexes, est un espace de fonctions à valeurs dans un espace localement convexe quelconque.

Du critère a) et à l'aide de la remarque 1 du § 2, on tire facilement d'autres critères d'holomorphie lorsque E est un quelconque espace de fonctions continues. Ainsi, la caractérisation simple connue des parties compactes des espaces $(\mathfrak{S})$ (resp. $(\mathfrak{D}_M)$) des fonctions indéfiniment différentiables sur $\boldsymbol{R}^n$ et à décroissance rapide (resp. à croissance lente) (c. f. [9], vol. 2) donne aussitôt:

c) Les applications holomorphes de O dans $(\mathfrak{S})$ $(\mathrm{res}_{\mathfrak{P}}.\ (\mathfrak{D}_M))$ s'identifient aux fonctions $f(z, t)$ sur $O \times \boldsymbol{R}^n$ telles que 1) pour tout $z \in O$, $f(z, t)$ est fonction indéfiniment différentiable de t, 2) pour tout $t \in \boldsymbol{R}^n$, $f(z, t)$ est fonction holomorphe de z, et 3) pour tout compact $K < O$ il existe une suite de fonctions positives $(h_m) \in (\mathfrak{S})$ (resp. $\in (\mathfrak{D}_M)$) sur $\boldsymbol{R}^n$, telles que pour tout indice de dérivation p d'ordre m, on ait $| D^p f(z, t) | \leqq h_m(t)$ pour $z \in K$ et quel que soit t.

Pour les espaces de distributions qui ne sont pas des fonctions continues, on a des critères d'un autre type, resultant de la remarque 2 du § 2. Par exemple la structure connue des ensembles bornés dans l'espace $(\mathfrak{D}')$ de toutes les distributions sur $\boldsymbol{R}^n$ (c. f. [9], t. 1, p. 85—86) donne aussitôt:

d) Pour que l'application $f(z)$ de O dans $(\mathfrak{D}')$ soit holomorphe, il faut et il suffit que pour tout ouvert O_1 relativement compact dans O, et tout ouvert relativement compact $U < \boldsymbol{R}^n$, existe une fonction $F(z, t)$ continue sur $O_1 \times U$, holomorphe en z, et un indice de dérivation fixe p sur $\boldsymbol{R}^n$, tel qu'on ait pour tout $z \in O$:

$$f(z) = D^p_{(t)} F(z, t) \ \textit{dans}\ U.$$

Un peu moins évident est le cas où E est un espace L^p construit sur un espace localement compact M à l'aide d'une mesure positive μ:

e) Pour qu'une application $f(z) = f(z, t)$ de O dans $L^p (1 \leqq p \leqq +\infty)$ soit holomorphe, il faut et il suffit qu'elle soit continue, et que en modifiant au besoin pour tout $z \in O$ la fonction $f(z, t)$ sur un ensemble localement négligeable (dépendant de z), la fonction $f(z, t)$ soit holomorphe en z pour tout $t \in M$.

Démonstration. 1) *Suffisance.* Il suffit de voir que pour toute forme linéaire sur L^p définie par une $g \in L^{p'}$, $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$, la fonction de z

$$\langle f(z), g \rangle = \int f(z, t)\, g(t)\, d\mu(t)$$

est holomorphe (car dans tous les cas, $L^{p'}$ est une partie totale du dual de L^p). Posons $h(z, t) = f(z, t)\, g(t)$, on est ramené à ceci: soit $h(z, t)$ une fonction satisfaisant aux conditions de l'énoncé, avec $p = 1$; montrer que $\int h(z, t)\, d\mu(t)$ est fonction holomorphe de z. Il faut donc montrer que pour tout chemin rectifiable fermé simple Γ dont l'intérieur est contenu dans O, on a $\int_\Gamma dz \int h(z, t)\, d\mu(t) = 0$. Tout revient à montrer qu'on peut intervertir les signes d'intégration, c'est à dire (comme on a déjà $\int_\Gamma |dz| \int |g(z, t)|\, d\mu(t) < +\infty$) que $g(z, t)$ est mesurable sur l'espace produit $\Gamma \times M$ (Γ étant muni de la mesure dz). Cela resulte du lemme suivant, qui a son intérêt propre:

Lemme. *Soit O un espace métrisable localement compact, M un espace localement compact muni d'une mesure μ, $f(s, t)$ une fonction complexe définie sur $O \times M$, telle que pour tout $s \in O$, $f(s, t)$ soit fonction mesurable de t, et que pour tout $t \in M$, $f(s, t)$ soit fonction continue de s. Alors quelle que soit la mesure ν sur O, $f(s, t)$ est mesurable sur $O \times M$ pour la mesure produit $\nu \otimes \mu$, et de façon plus précise: pour tout compact $B < M$, tout compact $A < O$ et tout $\varepsilon > 0$, existe un compact $K < B$ tel que $\mu(B \cap \complement K) < \varepsilon$, et que $f(s, t)$ soit continue sur $A \times K$* (de sorte que le critère de Lusin se trouve vérifié sur $O \times M$).

Démonstration du lemme. En vertu du critère de Lusin, le lemme signifie que l'application $t \to f_t$ (où $f_t(s) = f(s, t)$) de M dans l'espace $C(A)$ des fonctions complexes continues sur A (muni de la topologie de la convergence uniforme) est *fortement* mesurable. Comme $C(A)$ est séparable, on sait (Pettis) qu'il suffit de vérifier que cette application est *faiblement* mesurable, i. e. que pour toute mesure de Radon ν sur A, l'application $t \to \nu(f_t)$ est mesurable. Mais cela resulte du fait que (A étant métrisable) ν est limite

vague d'une *suite* de mesures «discrètes» $\nu^{(n)} = \sum_{1 \leq i \leq m_n} c_i^{(n)} \varepsilon_{s_i^{(n)}}$ (où ε_s désigne la masse $+1$ placée au point s) de sorte que l'application $t \to \nu(f_t)$ est limite d'une *suite* d'applications mesurables, donc elle-même mesurable.

2) *Nécessité des conditions de l'énoncé* e). O est réunion d'une suite de cercles U_i tels que $\bar{U}_i \subset O$ pour tout i. Supposons que nous avons démontré la proposition pour tout U_i, donc que pour tout indice i on ait une fonction $g_i(z, t)$ définie dans $U_i \times M$, telle que pour tout $t \in M$ elle soit fonction holomorphe dans U_i, et que pour tout $z \in U_i$, on ait

$$g_i(z, t) = f(z, t)$$

localement presque partout. Pour tout couple d'indices i, j, tels que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, soit $(z_{i,j}^{(n)})_n$ une suite extraite de $U_i \cap U_j$ tendant vers une limite dans cet ouvert. Soit $N_{ij}^{(n)}$ l'ensemble des $t \in M$ tels que $g_i(z_{i,j}^{(n)}, t) \neq g_j(z_{i,j}^{(n)}, t)$, il est localement négligeable par hypothèse, soit N la réunion de tous les $N_{ij}^{(n)}$, il est aussi localement négligeable. Si alors $t \in \complement N$, $g_i(z, t)$ et $g_j(z, t)$ sont des fonctions holomorphes qui coïncident dans la partie commune de leurs domaines de définition, (si partie commune il y a), car elles y coïncident déjà aux points d'une suite $(z_{i,j}^{(n)})_n$ s'accumulant en un point de $U_i \cap U_j$. Pour $t \in \complement N$ donné, il existe donc une fonction holomorphe $g(z, t)$ définie dans tout O et prolongeant les $g_i(z, t)$. Enfin, pour $t \in N$, posons $g(z, t) = 0$. Alors par construction $g(z, t)$ est fonction holomorphe en t, et pour tout $z \in O$, $f(z, t)$ et $g(z, t)$ sont égales localement presque partout.

Nous sommes donc ramenés au cas où O est un cercle ouvert, et où $f(z)$ est une fonction holomorphe dans un voisinage de l'adhérence de O. Supposons que O soit le cercle $|z| < r$, et que $f(z)$ soit en fait définie pour $|z| < r'$ (où $r' > r$). On a alors pour $|z| < r'$ le développement taylorien

$$f(z) = \sum_1^\infty a_n z^n \tag{1}$$

la convergence étant absolue. Prenons un représentant-fonction $a_n(t)$ pour tout a_n. La série $\sum_1^\infty a_n r^n$ étant absolument convergente dans L^p, on sait (Lebesgue) que la série $\sum_1^\infty a_n(t)\, r^n$ converge absolument pour $t \in \complement N$, où N est un ensemble localement négligeable. A fortiori, si $t \in \complement N$, la série $\sum_1^\infty a_n(t)\, z^n$ converge absolument pour $|z| < r$ vers une fonction holomorphe $g(z, t)$. Posons enfin $g(z, t) = 0$ si $t \in N$. La fonction $g(z, t)$ est holomorphe en z, et d'autre part pour tout $z \in O$ donné, $f(z, t)$ et $g(z, t)$ coïncident localement presque partout à cause de (1). Notre proposition e) est complètement démontrée.

Dans cet énoncé, on aurait encore pu remplacer les espaces L^p usuels par l'espace des fonctions à valeurs dans un espace de Banach et «de puissance p. ème sommable».

Rappelons enfin

f) Si E est l'espace des fonctions holomorphes dans un ouvert $U \subset \boldsymbol{C}$, avec la topologie de la convergence compacte, alors les applications holomorphes de O dans E s'identifient aux fonctions holomorphes complexes sur $O \times U$.

La démonstration est triviale en vertu de la remarque 1 du § 2. Ici encore, on pourrait remplacer E par un espace de fonctions holomorphes à valeurs vectorielles. De plus, la généralisation à plusieurs variables complexes (tant dans U que dans O) est évidente. D'ailleurs dans *tous* les exemples précédents, on aurait pu sans modification essentielle des raisonnements, traiter de fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes, ou définies plus généralement sur des variétés holomorphes à une ou plusieurs dimensions complexes.

§ 4. Le Théorème de Dualité pour espaces de fonctions holomorphes sur la sphère de Riemann.

1. Généralités sur les espaces vectoriels topologiques $\mathfrak{H}(O, E)$. Les définitions et les propriétés élémentaires qui suivent sont évidemment valables pour fonctions holomorphes définies sur des variétés holomorphes à une où plusieurs dimensions complexes. Pour simplifier le langage, nous nous limitons ici au cas des fonctions holomorphes définies sur un ouvert O du plan complexe (ou de la sphère de Riemann, ce qui revient au même).

Si E est un espace localement convexe, O un ouvert du plan complexe, on désigne par $\mathfrak{H}(O, E)$ l'espace des fonctions holomorphes dans O à valeurs dans E, muni de la topologie de la convergence compacte. En vertu de la formule de Cauchy

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - z)^{n+1}} \tag{1}$$

on voit que cette topologie est identique à la topologie, plus fine en apparence, de la convergence compacte de f *et de toutes ses dérivées* (dérivées qui pourraient ne pas exister dans E, mais qui existent sûrement dans le complété $\hat{E}$ de E — voir note de la page 38 —. Mais il est évident que $\mathfrak{H}(O, E)$ peut être considéré comme sous-espace vectoriel topologique de $\mathfrak{H}(O, \hat{E})$, sur lequel la «topologie de la convergence compacte de f et de ses dérivées» est défini sans ambiguité). Car de façon précise soit $U: |z - z_0| \leqq r$ un cercle compact contenu dans O, soit r' un nombre intermédiaire entre r et la distance de z_0 à $\complement O$, soit Γ la circonférence de centre z_0, de rayon r'. Alors la formule (1) est valable pour toute $f \in \mathfrak{H}(O, E)$ et pour $z \in U$, d'où

$$f^{(n)}(z) \in \frac{n!}{2\pi} 2\pi r' \frac{1}{(r' - r)^{n+1}} K_f = \lambda K_f \qquad (z \in U)$$

où K_f est l'enveloppe convexe cerclée fermée de l'ensemble $f(\Gamma)$. Il en resulte bien que si $f \to 0$ dans $\mathfrak{H}(O, E)$, alors $f_n(z) \to 0$ uniformément quand z parcourt U, donc aussi uniformément quand z parcourt un compact $O_1 < O$ (car O_1 peut être recouvert par un nombre fini de cercles de l'espèce précédente).

Toute application de O dans E qui limite uniforme sur tout compact d'applications holomorphes est holomorphe, comme on vérifie immédiatement, soit directement à l'aide de la condition 2 du théorème-définition 1, soit en passant au cas scalaire. En particulier, $\mathfrak{H}(O, E)$ est sous-espace vectoriel *topologique fermé* de l'espace $C(O, E)$ des applications continues de O dans E, muni de la topologie de la convergence compacte. Il en resulte aussi que si E est complet, $\mathfrak{H}(O, E)$ est complet. Il est d'ailleurs évident aussi que si E est métrisable, $\mathfrak{H}(O, E)$ est aussi métrisable (de même d'ailleurs que $C(O, E)$). Par suite si E est un espace $(\mathfrak{F})$, $\mathfrak{H}(O, E)$ est un espace $(\mathfrak{F})$. D'ailleurs les réciproques de ces trois remarques sont vraies, car $\mathfrak{H}(O, E)$ contient un sous-espace *fermé* isomorphe à E, savoir le sous-espace formé des applications constantes de O dans E.

Si O est une partie ouverte de la sphère de Riemann, on désigne encore par $\mathfrak{H}(O, E)$ l'espace des fonctions holomorphes sur O à valeurs dans E, muni de la topologie de la convergence compacte. Les propriétés élémentaires que nous venons d'exposer sont encore vraies, sauf que, si $\infty \in O$, la dérivation d/dz n'est plus définie pour les éléments de $\mathfrak{H}(O, E)$, et il faut la remplacer par un autre «champ de dérivations» pour exprimer les propriétés qui la faisaient intervenir.

2. Les espaces $P(\Omega_1, E)$, $P(\Omega_2, E)$, et leur accouplement. Dans toute la suite de ce travail, nous considérons le corps complexe comme une partie ouverte de la sphère de Riemann Ω, variété holomorphe compacte obtenue à partir de $\boldsymbol{C}$ par adjonction du

point ∞. Si O est une partie ouverte de Ω, on désignera (en suivant la notation de [7]) par $P(O, E)$ l'espace des fonctions holomorphes sur O à valeurs dans E qui s'annulent au point ∞ si $\infty \in O$. Si $\infty \notin O$, on a donc $P(O, E) = \mathfrak{H}(O, E)$, autrement c'est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathfrak{H}(O, E)$ qu'on obtient (hyperplan si $E = \boldsymbol{C}$). $P(O, E)$ sera bien entendu muni de la topologie de la convergence compacte.

Nous aurons besoin, pour un emploi ultérieur, des définitions très générales suivantes. Soit Ω_1 une partie quelconque d'un espace topologique Ω, E un ensemble. Si on considère l'ensemble des applications de voisinages (variables) de Ω_1 dans E, la relation: «f et g coïncident dans un voisinage de Ω_1» est une relation d'équivalence. Une classe d'équivalence pour cette relation sera dite une «fonction locale sur Ω_1, à valeurs dans E». Si f est une fonction locale sur Ω_1 on définit évidemment $f(z)$ pour $z \in \Omega_1$, mais il ne suffit pas de connaitre les $f(z)$ $(z \in \Omega_1)$ pour que f' soit déterminée. C'est seulement dans le cas où Ω_1 est ouvert que les fonctions locales sur Ω_1 s'identifient aux fonctions ordinaires sur Ω_1. — Si E est un espace vectoriel (resp. une algèbre etc.) l'ensemble des fonctions locales sur Ω_1 à valeurs dans E est muni de façon évidente d'une structure d'espace vectoriel (resp. d'algèbre etc.). Pour l'instant, nous avons besoin du cas où E est un espace vectoriel localement convexe, Ω la sphère de Riemann; on peut alors considérer les applications locales de Ω_1 dans E qui proviennent de fonctions *holomorphes* définies au voisinage de Ω_1, elles forment un sous-espace vectoriel de l'espace de toutes les applications locales de Ω_1 dans E. On les appellera des «fonctions localement holomorphes sur Ω_1». On désignera encore par $P(\Omega_1, E)$ l'ensemble des applications localement holomorphes de Ω_1 dans E qui s'annulent au point ∞ si $\infty \in \Omega_1$. Si donc Ω_1 est ouvert, cette notation est bien compatible avec la notation précédente.

Soient maintenant Ω_1 et Ω_2 deux parties complémentaires non vides de Ω, et soient E, E' deux espaces vectoriels en dualité séparée. Nous allons, sous des conditions très générales, définir alors une dualité séparante entre les espaces $P(\Omega_1, E)$ et $P(\Omega_2, E')$, (E et E' étant considérés comme topologisés par exemple par la topologie faible, ce qui fixe la signification de $P(\Omega_1, E')$ et $P(\Omega_2, E)$). Soit $\bar{f} \in P(\Omega_1, E)$, $\bar{g} \in P(\Omega_2, E')$, f (resp. g) un représentant de $\bar{f}$ (resp. $\bar{g}$), f étant définie sur l'ouvert U_1, g sur l'ouvert U_2. On peut supposer $\infty \notin U_1 \cap U_2$. Posons $K_2 = \complement U_2$, et considérons un ouvert U tel que $K_2 < U < \bar{U} < U_1$, et que la frontière de U soit une courbe rectifiable (formée par exemple d'arcs de cercle en nombre fini — il est facile de vérifier par le lemme de Borel-Lebesgue qu'un tel U existe). Soit alors Γ «le bord» de $\bar{U}$ (au sens algébrique, donc muni du sens de parcours positif autour de $\bar{U}$).

On pose alors

$$\langle \bar{f}, \bar{g} \rangle = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \langle f(\xi), g(\xi) \rangle \, d\xi . \tag{1}$$

Cette définition se justifie ainsi. Sous des conditions extrêmement générales, la fonction $\langle f(\xi), g(\xi) \rangle$ sera holomorphe dans $U_1 \cap U_2$: nous avons vu (c. f. § 2 remarque 4) qu'il suffit par exemple de supposer que dans E (ou dans E') l'enveloppe convexe cerclée fermée d'un ensemble compact est compact (et dans l'énoncé de cette condition, on peut remplacer la topologie faible par toute autre topologie donnant le même dual); ou, si on ne suppose *rien* sur E, que pour tout $\xi \in U_1 \cap U_2$, il existe un voisinage V de ξ dans cet ensemble tel que $g(V)$ ait dans E' une enveloppe convexe cerclée fermée *compacte*. Alors l'intégrale dans (1) a un sens, et elle ne dépend pas du choix particulier de U qu'on a pu faire, en vertu du théorème de Cauchy appliqué à la fonction holomorphe $\langle f(\xi), g(\xi) \rangle$ dans $U_1 \cap U_2$

(c. f. § 2 remarque 3 [5])). On en déduit aussitôt que l'on trouverait encore la même valeur de l'intégrale en prenant deux autres représentants f_1 et g_1 de f et g, car alors on prendra un contour Γ contenu dans la partie commune des ouverts où f et f_1, resp. g et g_1, coïncident. On a donc le droit de poser (1).

Remarquons que si on échangeait les rôles de E et E', on trouverait le même produit scalaire changé de signe — car il suffit de changer l'orientation sur le contour Γ pour trouver le «bord» algébrique de l'adhérence de l'ouvert $U' = \complement \bar{U}$ (ouvert qui satisfait bien aux conditions $K_1 \subset U' \subset \bar{U}' \subset U_2$ — où $K_1 = \complement U_1$ —).

Supposons maintenant pour fixer les idées un instant que dans E l'enveloppe convexe cerclée fermée d'un compact soit compacte. Alors (1) est défini quels que soient f et g, et c'est évidemment une forme bilinéaire sur $P(\Omega_1, E) \times P(\Omega_2, E')$. Nous allons voir qu'elle est séparante, en précisant comment on peut par exemple retrouver une $\bar{g} \in P(\Omega_2, E')$ à partir de la forme linéaire u qu'elle définit. Soit en effet g un représentant de g défini dans l'ouvert $U_2 > \Omega_2$ nous allons d'abord, pour $\xi \in \Omega_2$ donné, $\xi \neq \infty$, établir une expression des $g^{(n)}(\xi)$ à l'aide de u. Soit $x \in E$, et considérons la fonction $\dfrac{x}{(z-\xi)^{n+1}}$ de z, elle est holomorphe dans un voisinage $U_1 = \complement\{\xi\}$ de Ω_1, nulle à l'infini si $\infty \in \Omega_1$, elle définit donc un élément de $P(\Omega_1, E)$. Je dis qu'on a

$$(2) \qquad \langle x, g^{(n)}(\xi)\rangle = -u_z\left(\frac{n!\,x}{(z-\xi)^{n+1}}\right) = -\left\langle \frac{n!\,x}{(z-\xi)^{n+1}}, \bar{g}\right\rangle_z$$

(où l'indice z indique que la forme linéaire u, resp. le produit scalaire $\langle\ \rangle$, s'applique à des fonctions de z). Explicitant, (2) s'écrit en effet, en introduisant la fonction holomorphe complexe $h(z) = \langle x, g(z)\rangle$ définie dans l'ouvert $U_2 \cap \complement\{\xi\}$:

$$h^{(n)}(\xi) = \frac{n!}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{h(z)\,dz}{(z-\xi)^{n+1}}$$

où conformément aux définitions générales, on peut prendre ici pour Γ une circonférence centrée sur ξ de rayon assez petit pour que le cercle V qu'elle délimite soit contenu dans U_2, Γ étant orienté dans le *sens direct autour de* V (et non autour de $\complement \mathring{V}$, à cause du signe — que nous avons supprimé). Nous sommes donc ramenés à la formule de Cauchy classique.

Si $\xi \in \Omega_2$, mais $\xi = \infty$, les expressions $g^{(n)}(\xi)$ n'ont plus de sens, mais introduisons alors la fonction $g_1(z) = g(1/z)$, qui est holomorphe au voisinage de l'origine. On montre alors comme ci-dessus qu'on a la formule

$$(3) \qquad \langle x, g_1^{(n+1)}(0)\rangle = u_z(z^n \cdot x) = \langle z^n \cdot x, \bar{g}\rangle_z \text{ pour } n \geqq 0.$$

D'autre part, on a $g_1(0) = g(\infty) = 0$. Des formules (2) et (3) resulte bien que si on connait la forme linéaire u définie par $\bar{g}$, alors les représentants g de $\bar{g}$ sont connus au voisinage de tous les points de Ω_2, donc $\bar{g}$ est lui-même parfaitement déterminé.

En résumé, nous pouvons donc énoncer la

Proposition 1. *La formule* (1) *définit une dualité séparante entre les espaces* $P(\Omega_1, E)$ *et* $P(\Omega_2, E')$ (*lorsqu'on suppose que dans* E *l'enveloppe convexe cerclée fermée d'un compact est compacte*).

---

[5]) Nous admettrons de plus le résultat suivant, que nous énonçons pour des variétés de dimension n: Soit U_1 une variété orientée à n dimensions, K une partie compacte de U_1 (K_2 dans les notations précédentes). Alors pour une partie ouverte relativement compacte U contenant K, et ayant pour frontière une variété à $n-1$ dimensions, la classe d'homologie *dans* $U_1 \cap \complement K$ du bord algébrique ∂U de U ne dépend pas de U. — En effet, si on remplace U par un ouvert analogue U', $\partial U - \partial U'$ est le bord de la „chaine" $U - U'$, et on vérifie aussitôt qu'on peut remplacer cette chaine par une chaine portée par $\complement K$.

Evidemment, la démonstration et par suite la conclusion subsiste si on ne suppose plus rien sur E, mais en restreignant l'un des espaces, par exemple $P(\Omega_2, E')$, à l'espace formé des fonctions holomorphes locales sur Ω_2 qui ont «localement une image équicontinue», par quoi nous entendons: il existe un représentant g de $\bar{g}$ défini dans U tel que pour tout $z \in U$ existe un voisinage U' de z dans U tel que $g(U')$ soit partie équicontinue de E' (pour quelque topologie localement convexe supposée donnée sur E, et donnant pour dual E'). C'est dans ce cas que nous nous plaçons dans la suite de ce paragraphe.

3. Le théorème de dualité pour $P(O, E)$, O ouvert.

Théorème 2 (*J. Silva*). *Soit O une partie ouverte de la sphère de Riemann, non vide et distincte de Ω, E un espace vecioriel localement convexe. Alors le dual de l'espace vectoriel localement convexe $P(O, E)$ s'identifie, par la dualité définie plus haut (formule* (1)), *au sous-espace de $P(\complement O, E')$ formé des fonctions holomorphes locales ayant localement une image équicontinue* (voir la définition fin du numéro précédent).

Remarquons d'ailleurs que si g est fonction holomorphe à valeurs dans E', elle transforme un compact en une partie de E' qui est compacte pour toute topologie sur E' donnant pour dual E (en particulier pour la topologie faible, et même pour la topologie $\tau(E', E)$ de Mackey). Dans les cas usuels (notamment si E est un espace $(\mathfrak{F})$, plus généralement si c'est un espace «tonnelé» — c. f. [3] —) une telle partie de E' est forcément équicontinue, de sorte que l'énoncé du théorème se simplifie alors: le dual de $P(O, E)$ s'identifie à tout l'espace $P(\complement O, E')$.

Démonstration du théorème 2. Soit $\bar{g} \in P(\complement O, E')$ ayant une image localement équicontinue, et g un représentant de $\bar{g}$, défini dans l'ouvert U. On peut supposer, à cause de la *compacité* de $\complement O$, que $g(U)$ est déjà une partie équicontinue de E'. Montrons que

$$\langle f, \bar{g} \rangle = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \langle f(\xi), g(\xi) \rangle \, d\xi$$

est forme linéaire continue sur $P(O, E)$, c'est à dire bornée sur un voisinage de l'origine. Mais soit $V = (g(U))^0$ le polaire de $g(U)$, c'est donc un voisinage de O dans E. Si donc $f(\Gamma) < V$, on a (formule de la moyenne) $| \langle f, \bar{g} \rangle | \leqq \frac{l}{2\pi}$, l étant la longueur de Γ. Mais O étant ouvert, Γ peut être choisi indépendant de f, et l'ensemble des $f \in P(O, E)$ tels que $f(\Gamma) < V$ est un voisinage de l'origine. Donc toute $\bar{g}$ du type envisagé définit bien une forme linéaire continue sur $P(O, E)$, et on a vu (proposition 1) que l'application qui à toute $\bar{g}$ fait correspondre la forme linéaire qu'elle définit, est linéaire et biunivoque. Reste à montrer que *toute* forme linéaire continue u sur $P(O, E)$ peut s'obtenir par une $\bar{g}$ comme ci-dessus.

Par hypothèse, il existe un ensemble compact $K < O$ et un voisinage V de l'origine dans E (que nous prendrons convexe cerclé) tels que

$$f(K) < V \text{ implique } | u(f) | \leqq 1. \tag{4}$$

Soit alors O_1 un ensemble ouvert tel que $K < O_1 < \bar{O}_1 < O$, et pour toute $f \in P(O, E)$ soit $\tilde{f}$ sa restriction à O_1. L'application $f \to \tilde{f}$ est évidemment une application linéaire continue de $P(O, E)$ dans $P(O_1, E)$. Soit H l'image de $P(O, E)$ par cette application, il est immédiat d'après (4) que $u(f) = 0$ si $\tilde{f} = 0$, de sorte que l'on peut poser $u(f) = \tilde{u}(\tilde{f})$, où $\tilde{u}$ est une forme linéaire sur H. On *a* alors $| \tilde{u}(f) | \leqq 1$ pour toute $\tilde{f} \in H$ telle que $\tilde{f}(K) < V$. L'ensemble de *toutes* les fonctions $\in P(O_1, E)$ qui appliquent K dans V étant un voisinage

convexe cerclé de l'origine dans cet espace, il resulte du théorème de Hahn-Banach qu'on peut prolonger $\tilde{u}$ en une forme linéaire v définie dans tout l'espace, et en module $\leqq 1$ sur ce voisinage, on a donc

$$(5) \qquad u(f) = v(\tilde{f}) \text{ où } |v(F)| \leqq 1 \text{ si } F(K) < V(F \in P(O_1, E)).$$

Soit maintenant O_2 un ouvert tel que $\bar{O}_1 < O_2 < \bar{O}_2 < O$, et dont la frontière soit une courbe rectifiable. Si Γ est le «bord» algébrique de $\bar{O}_2$, on a, pour toute $f \in P(O, E)$, la formule de Cauchy

$$(6) \qquad f(z) = \tilde{f}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \text{ pour } z \in O_1.$$

Nous allons mettre cette formule sous la forme globale

$$(7) \qquad \tilde{f} = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma f(\xi) \otimes \varphi_\xi d\xi \quad \text{(intégrale faible dans } P(O_1, E))$$

avec les conventions suivantes. Posons pour $\xi \in \complement O_1$

$$(8) \qquad \varphi_\xi(z) = \frac{1}{\xi - z} \text{ si } \xi \neq \infty; \quad \varphi_\infty(z) = 0 \text{ si } \infty \in \complement O_1$$

en considérant φ_ξ comme un élément de l'espace $P(O_1)$ des fonctions holomorphes complexes sur O_1. L'application $\xi \to \varphi_\xi$ de $\complement O_1$ dans $P(O_1)$ est continue (vérification triviale) et holomorphe dans $\complement \bar{O}_1$ (ce deuxième point resulte aussitôt, en vertu de la remarque 1 du § 2, du fait que $\varphi_\xi(z)$ est, pour z fixe, fonction holomorphe de ξ). D'autre part, si φ est un élément quelconque de $P(O_1)$ et $a \in E$, posons

$$(9) \qquad a \otimes \varphi(z) = \varphi(z)\, a$$

on a donc $a \otimes \varphi \in P(O_1, E)$. L'application $(a, \varphi) \to a \otimes \varphi$ de $E \times P(O_1)$ dans $P(O_1, E)$ est bilinéaire et continue par rapport à chaque variable. Par suite, l'application $\xi \to f(\xi) \otimes \varphi_\xi$ est holomorphe dans $O \cap \complement \bar{O}_1$ (remarque 4 du § 2, qui s'applique ici, $P(O_1)$ étant un espace complet). Par suite l'intégrale faible du deuxième membre de (7) existe — c'est tout au moins un élément du complété de $P(O_1, E)$, donc si veut un élément F de $P(O_1, \bar{E})$ où $\bar{E}$ désigne le complété de E. Qu'on ait alors bien $F = \tilde{f}$, ou, ce qui revient au même, $F(z) = \tilde{f}(z)$ pour $z \in O_1$ n'est autre que la formule (6).

La formule (7) étant ainsi expliquée et établie, on peut écrire, d'après la définition de l'intégrale faible

$$(10) \qquad u(f) = v(\tilde{f}) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma v(f(\xi) \otimes \varphi_\xi)\, d\xi \text{ pour toute } f \in P(O, E).$$

Mais $v(a \otimes \varphi)$ est une forme bilinéaire sur $E \times P(O_1)$, continue par rapport à chaque facteur, on a par suite

$$(11) \qquad v(a \otimes \varphi) = \langle a, L(\varphi) \rangle$$

où L est une application linéaire faiblement continue de $P(O_1)$ dans E'. Posons

$$(12) \qquad g(\xi) = L(\varphi_\xi)$$

alors (10) s'écrit, en vertu des deux formules précédentes

$$u(f) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \langle f(\xi), g(\xi) \rangle\, d\xi.$$

Dans cette formule, $g(\xi)$ est une fonction holomorphe dans $\complement \bar{O}_1$, (qui est un voisinage de $\complement O$) et nulle à l'infini si $\infty \in \complement O$, comme il résulte aussitôt de la définition (12). Il reste

à démontrer que g applique un voisinage de $\complement O$ dans une partie équicontinue de E'. Soit en effet U un voisinage de $\complement O$ ne rencontrant pas $\overline{O}_1$, montrons que $g(U) < MV^0$ pour un nombre $M > 0$ convenable. Il revient au même de dire que $|\langle x, g(\xi)\rangle| \leqq M$ si $x \in V$, $\xi \in U$, or on a par définition ((11) et (12)):

$$\langle x, g(\xi)\rangle = v(x \otimes \varphi_\xi),$$

d'où, en vertu de (5) $|\langle x, g(\xi)\rangle| \leqq \lambda$ avec $\lambda = \sup\limits_{z \in K} |\varphi_\xi(z)|$. Mais si ξ parcourt U, λ reste borné supérieurement par un nombre M inverse de la distance de U à K. Le théorème 2 est donc complètement démontré.

De plus, on se convainc aisément que le même raisonnement, appliqué simultanément aux formes linéaires de tout un ensemble de formes, donne le critère suivant, qui sera essentiel pour la suite:

Proposition 2. *Sous les conditions du théorème 2, pour qu'une partie du dual de $P(O, E)$ soit équicontinue, il faut et il suffit qu'elle provienne d'un ensemble A de fonctions holomorphes définies dans un même voisinage U de $\complement O$, et tel que $\bigcup\limits_{g \in A} g(U)$ soit une partie équicontinue de E'.*

4. Sur une extension du théorème de dualité. On peut se demander si le raisonnement du théorème 2 ne donnerait pas les applications linéaires u de $P(O, E)$ dans un *espace de Banach F*. A première vue se présente la difficulté suivante: l'application linéaire $\tilde{u}$ qu'on définirait sur le sous-espace H de $P(O_1, E)$ ne pourra à priori plus être prolongée à tout l'espace, car le théorème de Hahn-Banach ne s'appliquera plus. Cette difficulté disparaitrait pourtant *si H était dense dans $P(O_1, E)$*, car alors $\tilde{u}$ se prolongerait simplement par continuité en une application linéaire continue définie sur $P(O_1, E)$. On aura même encore la formule (3) par passage à la limite, car si $F \in P(O_1, E)$ applique K dans V, comme par hypothèse elle peut être approchée uniformément sur tout compact par des $\tilde{f} \in H$, on voit aussitôt qu'elle peut même être approchée par des $\tilde{f} \in H$ appliquant K dans V (car K est lui-même un compact $< O_1$). Mais il est possible de montrer que par un *choix convenable* de O_1, on peut supposer effectivement que H est dense dans $P(O_1, E)$; de façon précise:

Lemme. *Soit O un ouvert non vide de la sphère de Riemann Ω, distinct de Ω, K un compact $< O$. Alors il existe un ouvert O_1 tel que $K < O_1 < \overline{O}_1 < O$, et tel que l'image canonique de $P(O, E)$ dans $P(O_1, E)$ y soit dense (quel que soit d'ailleurs l'espace localement convexe E).*

Montrons qu'il suffit en effet de prendre O_1 avec une frontière assez simple (formée par exemple d'un nombre fini d'arcs de courbe dérivables sans points doubles), et tel que, si Γ_i désignent les éventuels contours simples *intérieurs* de la frontière de O_1 (nous supposons $\infty \notin O$ pour fixer les idées), il y ait au moins un point z_i de $\complement O$ dans l'intérieur U_i du contour Γ_i (cela est loisible, car sinon on rajouterait à O_1 les adhérences des U_i qui mettraient cette hypothèse en défaut). — En effet, soit alors $F \in P(O_1, E)$, on sait que F est somme de fonctions holomorphes F_i définies respectivement dans $\complement \overline{U}_i$, et d'une fonction holomorphe F_0 définie dans l'ouvert U_0 des points intérieurs au contour extérieur Γ_0 de la frontière de O_1 (comme on voit élémentairement sur la formule de Cauchy donnant F par une intégrale sur un contour voisin de la frontière de O_1). Il faut montrer que F_0 et les F_i peuvent s'approcher uniformément sur tout compact $K_1 < O_1$ par des fonctions $\tilde{f} \in H$. On est donc ramené au problème suivant: Etant donnés une fonction holomorphe à valeurs vectorielles $G(z)$ définie à l'extérieur d'un contour dérivable fermé γ sans points doubles du plan complexe (G étant holomorphe aussi au point ∞), un point ξ à l'intérieur

et un compact K à l'extérieur de ce contour; approcher G uniformément sur K par des fonctions holomorphes dans $\mathbf{C}\{\xi\}$. (Le cas de la fonction F_0 se ramène évidemment à celui-ci par transformation $z \to 1/z$). En premier lieu, on tire facilement de la formule de Cauchy (valable pour $G(\infty) = 0$, ce qu'on peut évidemment supposer),

$$G(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{G(\eta)\, d\eta}{\eta - z},$$

que $G(z)$ peut s'approcher uniformément sur K par des fonctions du type $H(z) = \dfrac{a}{\eta - z}$, où $a \in E$, $\eta \in \gamma$. On est donc ramené à approcher une fonction *complexe* du type $\dfrac{1}{\eta - z}$, par des fonctions holomorphes dans $\mathbf{C}\{\xi\}$. Mais cela est facile: on démontre par exemple que l'ensemble des $\xi \in \mathbf{C}K$ qui sont tels que $\dfrac{1}{\eta - z}$ puisse s'approcher uniformément sur K par des fonctions holomorphes dans $\mathbf{C}\{\xi\}$, est à la fois ouvert et fermé dans $\mathbf{C}K$. Comme il contient η, donc des points intérieurs au contour γ, il doit contenir *tout* l'intérieur (connexe) de ce contour, c. q. f. d.

Grâce à ce lemme, le raisonnement du théorème 1 permet aussi de déterminer les applications linéaires continues de $P(O, E)$ dans un espace de Banach quelconque. Mais nous exposerons cette extension au § 5 par une autre méthode, qui consiste à se ramener au cas où F est le corps complexe, et qui semble susceptible d'une plus grande généralité. Néanmoins, la possibilité de faire le raisonnement directement est peut-être digne de remarque.

5. Les espaces vectoriels topologiques $P(\Omega_1, E)$ pour Ω_1 quelconque, et le théorème de dualité général. Si Ω_1 est maintenant une partie *quelconque* de Ω, non vide et distincte de Ω, E un espace localement convexe, il est naturel de chercher une topologie localement convexe sur $P(\Omega_1, E)$ qui permette d'étendre le théorème 2. Nous allons procéder de façon analogue à celle de M. Köthe (c. f. [7]): pour tout ouvert O contenant Ω_1 et distinct de Ω, considérons l'application linéaire naturelle ψ_{O,Ω_1} de $P(O, E)$ dans $P(\Omega_1, E)$ (opération de «restriction» d'une fonction locale). Il existe sur $P(\Omega_1, E)$ une topologie localement convexe T qui est la plus fine de toutes celles qui rendent continues toutes les applications ψ_{O,Ω_1}: c'est celle dont les voisinages convexes cerclés de l'origine sont les ensembles convexes cerclés V tels que pour tout ouvert O contenant Ω_1, $\psi_{O,\Omega_1}^{-1}(V)$ soit voisinage de l'origine dans $P(O, E)$. Cette notion peut se ramener à celle de limite inductive dans un sens généralisé (généralisation évidente de la définition donnée dans [4]): Soit H_O l'image de $P(O, E)$ dans $P(\Omega_1, E)$, les H_O forment une famille filtrante croissante de sous-espaces vectoriels dont la réunion est $P(\Omega_1, E)$, et la topologie T est la limite inductive généralisée de ces sous-espaces, quand chaque H_O est muni de la topologie quotient de celle de $P(O, E)$ par le noyau de ψ_{O,Ω_1}. Mais on fera attention que si $O_1 < O_2$, la topologie induite sur H_{O_2} par H_{O_1} n'est en général pas la topologie propre de H_{O_2} (on peut seulement dire qu'elle est moins fine) de sorte que, même si Ω_1 admet une *suite* fondamentale de voisinages O_i, on n'est pas en droit d'appliquer les résultats de [4]. Nous verrons pourtant ultérieurement que bien des resultats relatifs aux espaces $(\mathfrak{L}\mathfrak{F})$ sont encore valables ici (§ 8).

On se convainc facilement que la topologie T est séparée, car elle est plus fine que la «topologie de la convergence compacte de $\bar{f}$ et de toutes ses dérivées partielles», topologie qui pourrait se définir de façon évidente, et qui est localement convexe, séparée et rend continues les applications ψ_{O,Ω_1}. Mais le fait que $P(\Omega_1, E)$ est séparé resultera de la détermination de son dual, qui se trouvera être séparant (théorême 2 bis).

Dorénavant, le symbole $P(\Omega_1, E)$ désignera l'espace vectoriel *topologique* que nous venons de définir, même si ultérieurement nous serons amenés à y définir d'autres topologies, en vue de les comparer à la topologie T. Remarquons encore que pour E donné, les espaces $P(\Omega_1, E)$ correspondants aux diverses parties de Ω sont essentiellement distincts, car chacun d'eux est défini par celles des fonctions du type $\frac{x}{z-z_0}$ qu'il «contient»: ce sont celles pour lesquelles $z_0 \in \complement\Omega_1$.

Le resultat final de ce paragraphe sera le

Théorème 2 bis. *Soient Ω_1 et Ω_2 deux parties complémentaires non vides de la sphère de Riemann, E un espace vectoriel localement convexe. Le dual de $P(\Omega_1, E)$ est alors encore donné par l'énoncé du théorème* 2.

Démonstration. On vérifie tout de suite, en vertu de la définition de la topologie T, que pour qu'une application linéaire u de $P(\Omega_1, E)$ dans un espace localement convexe quelconque soit continue, il faut et il suffit que pour tout ouvert $O > \Omega_1$, l'application composée $u \circ \psi_{O,\Omega_1}$ soit continue. Il resulte alors du théorème 2 que la forme linéaire definie par une $\bar{g} \in P(\Omega_2, E')$ ayant localement une image équicontinue, est continue. De plus, la proposition 1 montre encore que l'application qui à $\bar{g}$ fait correspondre la forme linéaire sur $P(\Omega_1, E)$ qu'elle définit, est linéaire et *biunivoque*. Reste à montrer que toute forme linéaire continue u sur $P(\Omega_1, E)$ peut s'obtenir ainsi. Soit K un compact $< \Omega_2$, O son complémentaire, $u \circ \psi_{O,\Omega_1}$ est alors une forme linéaire continue sur $P(O, E)$, elle provient donc (théorème 2) d'une $\overline{g_K} \in P(K, E')$ bien déterminée. On vérifie aussitôt que si $K_1 < K_2$ sont deux compacts contenus dans Ω_2, alors $\overline{g_{K_1}}$ est la restriction de $\overline{g_{K_2}}$ à K_1 (car cette restriction définit bien la forme $u \circ \psi_{O_1,\Omega_1}$ sur $P(O_1, E)$). Il suffit maintenant que nous demontrions l'existence d'une fonction holomorphe $g(z)$ sur un ouvert $U > \Omega_2$, à valeurs dans E', ayant localement une image équicontinue, et telle que pour tout compact $K < \Omega_2$, la «restriction» de g à K soit $\overline{g_K}$. Car alors u sera bien la forme linéaire définie par l'élement de $P(\Omega_2, E')$ défini par g, comme il resulte trivialement des définitions. — L'existence d'une telle g, évidente dans le cas où Ω_2 est ouvert, donc Ω_1 fermé, nécessite une démonstration spéciale dans le cas général. Notons d'abord qu'il est inutile de supposer que g ait localement une image équicontinue. Car s'il n'en était pas ainsi, comme pour tout $\xi \in \Omega_2$, $\overline{g_\xi}$ a localement une image équicontinue, donc provient d'une $g_\xi(z)$ holomorphe définie dans un voisinage ouvert U_ξ de ξ, telle que $g_\xi(U_\xi)$ soit partie équicontinue de E' — en restreignant g à la réunion des U_ξ, la propriété voulue sera vérifiée. Nous sommes donc en définitive ramené à établir le lemme suivant, qui nous sera encore utile par ailleurs:

Lemme 1. *Soit A une partie de Ω, non vide et distincte de Ω, F un espace vectoriel localement convexe. Supposons que pour tout compact $K < A$, on se soit donnée une $\overline{g_K} \in P(K, F)$ de telle façon que $K_1 < K_2$ implique que $\overline{g_{K_1}}$ soit la restriction de $\overline{g_{K_2}}$ à K_1. Alors il existe une fonction holomorphe $g(z)$ définie dans un ouvert $U > A$, telle que pour tout compact $K < A$, $\overline{g_K}$ soit la restriction de g à K.*

Il revient évidemment au même de dire que pour tout $\xi \in A$, $\overline{g_\xi}$ est la restriction de g à ξ. Pour tout $\xi \in A$, soit g_ξ un représentant de $\overline{g_\xi}$ défini sur un voisinage U_ξ de ξ. Montrons qu'il existe un voisinage $V_\xi < U_\xi$ tel que $\eta \in V_\xi \cap A$ implique que $\overline{g_\eta}$ soit la restriction de g_ξ à η. Autrement en effet, il existerait une suite $(\xi_i)_i$ d'éléments de $U_\xi \cap A$ tendant vers ξ, et telle que l'on ait $\overline{g_{\xi_i}} \neq$ restriction de g_ξ à ξ_i. Mais soit alors K le compact réunion de ξ et des ξ_i, et g_K un représentant de $\overline{g_K}$ défini dans un voisinage U de K. La restriction de g_K à ξ étant $\overline{g_\xi}$, g_K et g_ξ coïncident dans un voisinage V de ξ, et pour $\xi_i \in V$, $\overline{g_{\xi_i}}$ est d'après l'hypothèse la restriction de g_K à ξ_i, donc aussi celle de g_ξ, ce qui implique contradiction.

Par suite, pour tout $\xi \in A$, existe un $r_\xi > 0$ et un représentant $g_\xi(z)$ de $\overline{g_\xi}$ défini dans le cercle V_ξ des z tels que $\| z - \xi \| < r_\xi$, de telle sorte que $\eta \in V_\xi \cap A$ implique que $\overline{g_\eta}$ est la restriction de g_ξ à η. (Pour commodité, nous posons $\| z - \xi \|$ = distance des points z, ξ lorsque Ω est supposé plongé dans $\boldsymbol{R}^3$ de la façon usuelle.) Soit alors W_ξ le cercle $\| z - \xi \| < \frac{1}{2} r_\xi$, il est immédiat que si ξ, $\eta \in A$, g_ξ et g_η coïncident dans $W_\xi \cap W_\eta$. Il existe par suite une fonction holomorphe dans $U = \bigcup_{\xi \in A} W_\xi$ qui prolonge les g_ξ, et le lemme est démontré.

Le théorème 2 bis se trouve par là complètement établi. Nous aurons encore besoin par la suite du resultat plus précis suivant:

Proposition 2 bis. *Pour qu'une partie du dual de $P(\Omega_1, E)$ soit équicontinue, il faut et il suffit qu'elle provienne d'un ensemble A de fonctions holomorphes définis dans un même voisinage U de Ω_2, tel que pour tout compact $K \subset U$, $\bigcup_{f \in A} f(K)$ soit une partie équicontinue de E'.*

Cette proposition se déduisant de la proposition 2 analogue exactement comme le théorème 2 bis se déduit du théorème 2, nous nous dispensons d'en répéter la démonstration. Notons seulement qu'on est ramené à établir une forme plus générale du lemme précédent, relative au cas de la donnée simultanée de divers systèmes $(\overline{g_K})_K$, sans que d'ailleurs rien dans la démonstration soit changé.

§ 5. Structure des application linéaires bornées d'espaces $P(\Omega_1, E)$.

1. Le théorème général. Une application linéaire d'un espace localement convexe H dans un autre F sera dite bornée, si elle transforme un voisinage convenable de l'origine dans H en une partie bornée de F. Une telle application est à fortiori continue. D'ailleurs, si H *ou* F est normable, toute application linéaire continue de H dans F est bornée (car dans le premier cas, elle transforme une *boule* de H dans une partie bornée de F, et dans le second cas l'image inverse d'une *boule* de F est un voisinage de l'origine dans H); mais c'est là un fait special à ce cas: l'application identique d'un espace vectoriel localement convexe sur lui-même est bornée si et seulement si il admet un voisinage borné de l'origine, c'est à dire s'il est normable. Mais rappelons encore le cas important bien connu suivant: si H est un espace $(\mathfrak{F})$, et si F est le dual faible G' d'un espace $(\mathfrak{F})$ G, alors toute application linéaire continue de H dans F est bornée (et à fortiori continue même si on munit $F = G'$ de la topologie forte). Le plus souvent, on énonce ce resultat sous la forme équivalente: toute forme bilinéaire sur le produit $H \times G$ de deux espaces $(\mathfrak{F})$, qui est continue par rapport à chaque facteur, est continue. Un résultat analogue vaut pour les formes bilinéaires sur le produit de deux duals E', F' d'espaces $(\mathfrak{F})$ E, F (c. f. [4] § 14), résultat qu'on peut énoncer ainsi: toute application faiblement continue de E' dans F est bornée pour les topologies fortes.

Dans ce paragraphe nous déterminons les applications linéaires bornées d'un espace $P(\Omega_1, E)$ dans un espace localement convexe F complet quelconque. Si donc F est un espace de Banach; ou si Ω_1 est ouvert, E un espace $(\mathfrak{F})$ et F un dual d'espace $(\mathfrak{F})$ — nous obtiendrons *toutes* les applications linéaires continues de $P(\Omega_1, E)$ dans F. Mais il n'en sera plus ainsi dans le cas général, et dans *aucun* cas nous n'obtenons ainsi *tous* les *endomorphismes* de l'espace $P(\Omega_1, E)$ — car cet espace n'est jamais normable.

Nous aurons encore besoin d'une généralisation de l'accouplement entre $P(\Omega_1, E)$ et $P(\Omega_2, E')$ construit dans le paragraphe précédent. Soient E_1 et E_2 deux espaces localement convexes, B une application bilinéaire de $E_1 \times E_2$ dans un troisième espace localement convexe F, continue par rapport à chaque facteur. On suppose que dans F l'enveloppe

convexe cerclée fermée d'un compact est compacte, de façon à permettre l'intégration de fonctions continues à valeurs dans F. Soient enfin Ω_1 et Ω_2 deux parties complémentaires non vides de Ω. Alors pour $\bar{f} \in P(\Omega_1, E_1)$, $\bar{g} \in P(\Omega_2, E_2)$, on pose

$$B(\bar{f}, \bar{g}) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} B(f(\xi), g(\xi))\, d\xi \tag{1}$$

en précisant comme dans le § 3 la signification du deuxième membre. Pour simplifier l'exposé, nous supposons dans toute la suite que E_1 (qui deviendra plus bas E) satisfait à la condition a) de la remarque 4 du § 2, condition qui assure l'holomorphie de la fonction sous le signe somme. Cette condition n'est pas plus essentielle dans le théorème 3 qui suit que dans le théorème 2, mais mettra peut-être le lecteur plus à l'aise.

Supposons maintenant l'accouplement B séparant dans E_2, i. e. que $B(x_1, x_2) = 0$ pour tout $x_1 \in E_1$ implique $x_2 = 0$. Alors on montre exactement comme dans le § 4 que l'accouplement entre $P(\Omega_1, E_1)$ et $P(\Omega_2, E_2)$ est séparant dans ce deuxième espace.

Ces considérations permettent de construire des applications linéaires de $P(\Omega_1, E)$ dans F, puisque pour $\bar{g}$ donnée l'application $\bar{f} \to B(\bar{f}, \bar{g})$ est linéaire. On obtient manifestement le plus grand choix possible d'applications linéaires en prenant $E_2 = \mathfrak{L}_s(E_1, F)$ espace de toutes les applications linéaires continues de E_1 dans F, muni de la topologie de la convergence simple, avec l'accouplement naturel $B(x, u) = u \cdot x$ pour $x \in E$, $u \in \mathfrak{L}_s(E, F)$ (désormais, nous remplaçons E_1 par E). Sous ces conditions, si $\bar{f} \in P(\Omega_1, E)$, $\bar{L} \in P(\Omega_2, \mathfrak{L}_s(E, F))$, nous écrirons la formule (1) sous la forme

$$\bar{L} \cdot \bar{f} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} L(\xi) \cdot f(\xi)\, d\xi. \tag{2}$$

D'après ce qui précède, on obtient ainsi une application linéaire *biunivoque* de $P(\Omega_2, \mathfrak{L}_s(E, F))$ dans l'espace de toutes les applications linéaires de $P(\Omega_1, E)$ dans F. Comme nous l'avons annoncé, on n' obtient en général pas ainsi toutes les applications linéaires continues, mais du moins les applications linéaires bornées lorsque E est complet. On a en effet le

Théorème 3. *Soient E et F deux espaces localement convexes, on suppose que F est complet, et que dans E l'enveloppe convexe cerclée fermée d'un compact est compacte. Soient Ω_1 et Ω_2 deux parties complémentaires non vides de la sphère de Riemann. Alors les applications linéaires bornées de $P(\Omega_1, E)$ dans F correspondent biunivoquement, par la formule* (2), *aux fonctions holomorphes locales $\bar{L}$ sur Ω_2 à valeurs dans $\mathfrak{L}_s(E, F)$, qui s'annulent à l' ∞ si $\infty \in \Omega_2$, et satisfont à l'hypothèse qui suit: il existe un représentant L de $\bar{L}$ défini dans un voisinage U_2 de Ω_2, et un borné A dans F, tels que pour tout compact $K \subset U_2$ existe un voisinage V_K de O dans E, tel que $\bigcup_{u \in L(K)} u(V_K) \subset A$.*

Remarques. L'hypothèse supplémentaire sur $\bar{L}$ signifie aussi que si on considère l'espace normé $F_A = \boldsymbol{C} \cdot A$ engendré par A — muni de la topologie définie par la «boule» A — (il est évidemment possible de supposer A convexe cerclé fermé), alors $L(K)$ est une partie équicontinue de l'espace $\mathfrak{L}_s(E, F_A)$ pour tout compact $K \subset U_2$; donc, si on veut, que L a localement une image équicontinue, en tant qu'application dans $\mathfrak{L}_s(E, F_A)$. Cette hypothèse sera d'ailleurs superflue dans le cas important où E est un espace $(\mathfrak{F})$ et F un espace de Banach ou un dual fort d'espace $(\mathfrak{F})$, car alors toute partie bornée de $\mathfrak{L}_s(E, F)$ applique un voisinage de l'origine dans E en une même partie bornée de F (ce qui est une forme renforcée bien connue d'un resultat rappelé au début de ce paragraphe). — Remarquons enfin que dans tous les cas il resulte de la remarque 2 du § 2

que $L(\xi)$ sera application holomorphe *en tant* qu'application dans l'espace $\mathfrak{L}_b(E, F_A)$ muni de la topologie de la convergence bornée (à fortiori, c'est une application holomorphe dans l'espace $\mathfrak{L}_b(E, F)$). Comme d'autre part une application *bornée* d'un espace $P = P(\Omega_1, E)$ dans F revient évidemment à une application *continue* de P dans un espace normé $C \cdot A$ [6]) (A partie convexe cerclée fermée de F), on voit qu'en fait l'énoncé du théorème 3 est relatif aux applications linéaires continues d'un espace $P(\Omega_1, E)$ dans un *espace* de *Banach*. Une méthode de démonstration directe pour ce cas quand Ω_1 est ouvert avait été indiqué d'ailleurs au § 4, No 4. La démonstration suivante consiste à se ramener au cas du théorème 2 bis.

Démonstration du théorème 3. Remarquons d'abord que dire qu'une application linéaire u d'un espace P dans un espace F est bornée, signifie qu'il existe un ensemble A borné convexe cerclé fermé dans F tel que $n^{-1}(A)$ soit voisinage de l'origine dans P. Mais cela équivaut encore à dire que quand y' parcourt le polaire A^0 de A dans F', les formes linéaires $y' \circ u$ forment un ensemble équicontinu de formes linéaires sur E. En effet, toutes ces formes linéaires sont majorées en module par 1 sur $n^{-1}(A)$, la condition est donc nécessaire; elle est suffisante, car alors le polaire dans E de l'ensemble des formes $y' \circ u$ ($y' \in A^0$) sera un voisinage de l'origine, or on vient de dire qu'il est contenu dans $n^{-1}(A)$.

Montrons alors en premier lieu que si $L(\xi)$ est comme dans l'énoncé du théorème 3, alors l'application linéaire qu'elle définit est bornée. Il suffit donc de montrer que l'ensemble des formes linéaires $\bar{f} \to \langle \bar{L} \cdot \bar{f}, y' \rangle$ sur $P(\Omega_1, E)$ est borné quand y' parcourt le polaire A^0 du borné $A < F$ défini dans l'énoncé du théorème. Or on a

$$\langle \bar{L} \cdot \bar{f}, y' \rangle = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \langle L(\xi) \cdot f(\xi), y' \rangle \, d\xi = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \langle f(\xi), {}^tL(\xi) \cdot y' \rangle \, d\xi$$

soit, en posant

$$g_{y'}(\xi) = {}^tL(\xi) \cdot y' \tag{3}$$

$$\langle \bar{L} \cdot \bar{f}, y' \rangle = \langle \bar{f}, \overline{g_{y'}} \rangle \tag{4}$$

où $\overline{g_{y'}}$ est l'élément de $P(\Omega_2, E')$ induit par $g_{y'}$. Pour prouver l'équicontinuité de l'ensemble des formes linéaires définies par les $g_{y'} \in P(U, E')$ quand y' parcourt A^0 il suffit (proposition 2 bis) de montrer que pour tout compact $K < U$, $\bigcup_{y' \in A^0} g_{y'}(K)$ est partie équicontinue de E'. En fait, nous allons voir qu'elle est contenue dans V_{K^0} (V_K étant défini comme dans l'énoncé). Il faut donc vérifier que $y' \in A^0$, $\xi \in K$ implique $g_{y'}(\xi) \in V_{K^0}$, i. e. $|\langle x, g_{y'}(\xi) \rangle| \leqq 1$ pour tout $x \in V_K$. Mais par définition (3), on a $\langle x, g_{y'}(\xi) \rangle = \langle L(\xi) \cdot x, y' \rangle$ et par définition de V_K, on a $L(\xi) \cdot x \in A$ si $\xi \in K$, $x \in V_K$, d'où resulte bien l'inégalité voulue.

Supposons maintenant donnée une application linéaire bornée u de $P(\Omega_1, E)$ dans F, il existe donc un ensemble borné convexe cerclé fermé $A < F$ tel que ${}^tu(A^0)$ soit partie équicontinue du dual de $P(\Omega_1, E)$. Par suite (proposition 2 bis) les formes de ${}^tu(A^0)$ proviennent d'un ensemble B de fonctions holomorphes définies dans un même ouvert $U > \Omega_2$, à valeurs dans E', telles que pour tout compact $K < U$, l'ensemble $\bigcup_{g \in B} g(K)$ soit une partie équicontinue M_K de E'. D'ailleurs, en diminuant au besoin U, on peut supposer que U est réunion de cercles ouverts centrés sur les points de Ω_2. Soit alors $y' \in F'$, il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda y' \in A^0$, donc ${}^tu(\lambda y')$ et par suite ${}^tu(y')$ lui-même provient d'une fonction holo-

[6]) On montre d'ailleurs que les espaces F_A sont complets si F l'est. En fait, il suffit même que les parties A bornées et fermées de F soient complètes. Il suffirait donc de faire cette hypothèse sur F dans l'énoncé du théorème 3.

morphe définie dans U. Mais en vertu de l'hypothèse faite sur U, cette fonction holomorphe est unique, car deux fonctions holomorphes dans U qui induisent les mêmes éléments de $P(\Omega_2, E')$ sont forcément identiques. Soit donc $g_{y'}$ la fonction holomorphe sur U qui correspond à la forme ${}^t u(y')$, il resulte aussitôt de ce qui précède que l'application $y' \to g_{y'}$ est application *linéaire* de F' dans $P(U, E')$ définie par

$$(5) \qquad \langle u(\bar{f}), y' \rangle = \langle \bar{f}, \overline{g_{y'}} \rangle$$

(où $\overline{g_{y'}}$ désigne l'élément de $P(\Omega_2, E')$ induit par $g_{y'}$); et de plus $y' \in A^0$ implique $g_{y'} \in B$. — Pour tout $\xi \in U$, $g_{y'}(\xi)$ est donc une application linéaire $l(\xi)$ de F' dans E'. Nous allons montrer plus bas qu'elle est faiblement continue, admettons le pour l'instant. Soit alors $L(\xi)$ la transposée de l'application $l(\xi)$. Montrons que conformément à l'enoncé du théorème 3, pour tout compact $K < U$ existe un voisinage V_K de 0 dans E tel que $\bigcup_{\xi \in K} L(\xi)(V_K) < A$. On prendra en effet $V_K = (M_K)^0$, il faut montrer que $\xi \in K$, $x \in (M_K)^0$, implique $L(\xi) \cdot x \in A$, i. e. $|\langle L(\xi) \cdot x, y' \rangle| \leqq 1$ pour tout $y' \in A^0$. Mais par définition

$$\langle L(\xi) \cdot x, y' \rangle = \langle x, g_{y'}(\xi) \rangle,$$

et par définition de M_K on a $g_{y'}(\xi) \in M_K$ si $\xi \in K$, $y' \in A^0$, d'où resulte bien l'inégalité voulue. — En particulier, pour tout $\xi \in U$, on a $L(\xi) \in \mathfrak{L}_s(E, F)$, montrons que l'application $\xi \to L(\xi)$ est bien holomorphe. Il suffit de montrer que pour tout $x \in E$ et $y' \in F'$, $\langle L(\xi) \cdot x, y' \rangle$ est fonction holomorphe, or on a bien $\langle L(\xi) \cdot x, y' \rangle = \langle x, g_{y'}(\xi) \rangle$.

Reste à voir que l'application linéaire $l(\xi)$ de F' dans E' est bien faiblement continue, donc que pour $x \in E$ donné, $\langle x, g_{y'}(\xi) \rangle$ est forme linéaire sur F' provenant d'un élément de F. Mais quand y' parcourt A^0, l'ensemble des $g_{y'}(\xi)$ est une partie équicontinue de E', donc $\langle x, g_{y'}(\xi) \rangle$ reste borné sur A^0. C'est donc une forme linéaire *fortement continue* sur F', c'est à dire un élément du bidual F'' de F. Supposant fixé x une fois pour toutes, nous désignons par $h(\xi)$ cet élément de F''. Cet $h(\xi)$ est application faiblement holomorphe de U dans F'', puisque par définition on a

$$(6) \qquad \langle h(\xi), y' \rangle = \langle x, g_{y'}(\xi) \rangle \qquad \text{pour } y' \in F'.$$

Nous voulons montrer que $h(\xi)$ prend en fait ses valeurs dans F. Notons d'abord que $h(\xi)$ est même holomorphe quand on munit F'' de la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de F' (topologie qui induit sur F la topologie propre de F). En effet, si $\bar{A} = A^{00}$ désigne le bipolaire de A *dans* F'', il est immédiat de vérifier que pour tout compact $K < U$, $h(K)$ est contenu dans $\lambda \bar{A}$ pour un $\lambda > 0$ convenable, d'où suit (§ 2, remarque 2) que h est application holomorphe dans l'espace $\boldsymbol{C} \cdot \bar{A}$ engendré par $\bar{A}$, et muni de la topologie définie par la «boule» $\bar{A}$. A fortiori, $\bar{A}$ étant manifestement une partie bornée de F'', $h(\xi)$ sera application holomorphe dans F''. — Utilisons maintenant le fait que U est réunion de cercles U_η centrés sur les points η de Ω, il suffit de montrer que dans chaque U_η, h est application *dans* F. Prenons $\eta \neq \infty$ pour fixer les idées. F étant complet donc sous-espace *fermé* de F'', il suffit de montrer que $h^{(n)}(\eta) \in F$ pour tout entier $n \geqq 0$. Mais si $y' \in F'$, on a

$$\langle h^{(n)}(\eta), y' \rangle = \frac{d^n}{d\eta^n} \langle h(\eta), y' \rangle = \frac{d^n}{d\eta^n} \langle x, g_{y'}(\eta) \rangle = \langle x, g_{y'}^{(n)}(\eta) \rangle.$$

La formule (2) du § 4 donne alors

$$\langle h^n(\eta), y' \rangle = \langle \frac{n!\, x}{(z-\eta)^{n+1}}, \overline{g_{y'}} \rangle_z,$$

soit en vertu de (5):

$$\langle h^{(n)}(\eta), y' \rangle = \langle u_z\left(\frac{n!\, x}{(z-\eta)^{n+1}}\right), y' \rangle \text{ d'où } h^{(n)}(\eta) = u_z\left(\frac{n!\, x}{(z-\eta)^{n+1}}\right) \in F.$$

Bien entendu, la démonstration analogue vaut si $\eta = \infty$, en faisant une inversion $z \to 1/z$ et en appliquant la formule (3) du § 4. Le théorème 3 est ainsi démontré.

Remarque 1. Il resulte de la démonstration du théorème 3 que si u est une application linéaire de $P(\Omega_1, E)$ dans F qui transforme un voisinage de l'origine en une partie bornée B de F, le borné A qui figure dans l'énoncé du théorème 3 peut être pris identique à B. Cela resulte d'ailleurs aussi directement du théorème 3 appliqué aux applications linéaires bornées dans $\boldsymbol{C} \cdot B$.

Remarque 2. Nous dirons qu'un ensemble M d'applications linéaires d'un espace localement convexe P dans un autre F est *uniformément borné*, s'il existe un voisinage V de l'origine dans P tel que $\bigcup_{u \in M} u(V)$ soit partie bornée de F. Nous laissons alors au lecteur le soin de se convaincre de la validité de l'énoncé suivant généralisant le théorème 3:

Les ensembles uniformément bornés d'applications linéaires de $P(\Omega_1, E)$ dans F sont ceux qui proviennent d'un ensemble (L_i) d'applications holomorphes $L_i(\xi)$ définies dans un même voisinage U de Ω_2, à valeurs dans $\mathfrak{L}_s(E, F)$, et telles que pour tout compact $K \subset U$, l'ensemble des $L_i(\xi)$ ($\xi \in K$, i quelconque) soit partie uniformément bornée de $\mathfrak{L}_s(E, F)$.

2. Autres théorèmes de structure d'applications linéaires bornées, et exemples. Pour établir le théorème 3, nous nous sommes ramenés par transposition au problème facile de déterminer certaines applications linéaires de F' dans $P(\Omega_2, E')$. Enonçons dans cet ordre d'idées les deux propositions suivantes, dont la démonstration est évidente:

Proposition 3. *Si O est une partie ouverte non vide de Ω distincte de Ω, E et G deux espaces localement convexes, alors les applications linéaires continues de G dans $P(O, E)$ correspondent biunivoquement aux applications holomorphes $L(\xi)$ de O dans $\mathfrak{L}_s(G, E)$, s'annulant à l'infini si $\infty \in O$, et telles que pour tout compact $K \subset O$, $L(K)$ soit partie équicontinue de $\mathfrak{L}_s(G, E)$, par la formule*

$$u(y)(\xi) = L(\xi) \cdot y \tag{7}$$

(notons que si G est «tonnelé», i. e. toute partie bornée de son dual équicontinue — c. f. [3] — alors toute partie bornée de $\mathfrak{L}_s(G, E)$ est équicontinue, de sorte que la restriction faite sur $L(\xi)$ est alors inutile).

Proposition 3 bis. *Soit $\Omega_1 \neq \Omega$ une partie non vide de Ω, E et G deux espaces localement convexes, u une application linéaire de G dans $P(\Omega_1, E)$ appliquant un voisinage V de l'origine en une partie de $P(\Omega_1, E)$ qui provient d'une partie bornée A d'un $P(O, E)$, où O est un voisinage ouvert de Ω_1.* (A borné signifie que pour tout compact $K \subset O$, $\bigcup_{f \in A} f(K)$ est partie bornée de E). *Alors il existe un voisinage U de Ω_1 et une application holomorphe $L(\xi)$ de U dans $\mathfrak{L}_s(G, E)$, s'annulant au point ∞ si $\infty \in \Omega_1$, telle que pour tout compact $K \subset U$, $\bigcup_{\xi \in K} L(\xi) \cdot (V)$ soit partie bornée de E, et qu'on ait*

$$u(y) = \text{restriction à } \Omega_1 \text{ de } \xi \to L(\xi) \cdot y. \tag{7 bis}$$

(Ici, on prend pour U une réunion de cercles ouverts centrés sur les points de Ω_1, et contenu dans O.) Cette proposition est surtout intéressante lorsque toute partie bornée de $P(\Omega_1, E)$ est contenue dans l'image canonique d'une partie bornée d'un $P(O, E)$, auquel cas on obtient *toutes* les applications linéaires bornées de G dans $P(\Omega_1, E)$. Nous verrons plus bas que c'est notamment le cas si E est un espace de Banach, ou plus généralement un sous-espace fermé d'un dual fort d'espace $(\mathfrak{F})$ (prop. 12).

Comme application de ce qui précède, déterminons par exemple sous des conditions générales les endomorphismes *bornés* d'un espace $P(\Omega_1, E)$ ou plus généralement les applications linéaires bornées d'un espace $P(\Omega_1, E)$ dans un espace $P(\Sigma_1, F)$, où Σ_1 est une

autre partie de Ω, non vide et distincte de Ω, F un deuxième espace localement convexe. On suppose soit que Σ_1 est ouvert, soit que F est un sous-espace vectoriel fermé d'un dual fort d'espace $(\mathfrak{F})$, et de toutes façons nous supposons F complet, pour que $P(\Sigma_1, F)$ soit complet (c. f. § 8, prop. 15). Soit donc u une application linéaire appliquant un voisinage de l'origine de $P(\Omega_1, E)$ dans une partie bornée A de $P(\Sigma_1, F)$. On peut trouver un voisinage V_1 de Σ_1, réunion de cercles ouverts centrés sur les points de Σ_1 pour que la restriction de $P(V_1, F)$ à $P(\Sigma_1, F)$ soit application biunivoque, et une partie bornée B de $P(V_1, F)$, telle que A soit l'image canonique de B. B étant bornée, pour tout compact $K_1 < U_1$, $\bigcup_{f \in B} f(K) = M_{K_1}$ est une partie bornée de F. — D'après le théorème 3 et la remarque 1 qui le suit, à u correspond une application holomorphe $L(\xi)$ d'un voisinage U_2 de Ω_2 dans $\mathfrak{L}_s(E, P(\Sigma_1, F))$, telle que pour tout compact $K_2 < U_2$, existe un voisinage W_{K_2} de l'origine dans E tel que $\bigcup_{\xi \in K_2} L(\xi) \cdot (W_{K_2}) < A$. En particulier, si $\xi \in K_2$, $L(\xi)$ étant une application linéaire de E dans $P(\Sigma_1, F)$ appliquant le voisinage W_{K_2} de l'origine dans la partie bornée A, il lui correspond (proposition 3 bis) une application holomorphe $\eta \to L(\xi, \eta)$ de V_1 dans $\mathfrak{L}_s(E, F)$, telle que pour tout compact $K_1 < V_1$, on ait $\bigcup_{\eta \in K_1} L(\xi, \eta) \cdot W_{K_2} \in M_{K_1}$ et que l'on ait

$$L(\xi) \cdot x = \text{restriction à } \Sigma_1 \text{ de } \eta \to L(\xi, \eta) \cdot x.$$

On aura de plus $L(\xi, \eta) = 0$ si $\xi = \infty \in \Omega_2$ ou $\eta = \infty \in \Sigma_1$. D'autre part, $L(\xi, \eta)$ est holomorphe dans $U_2 \times V_1$, ce qui signifie: pour tout $x \in E$, $L(\xi, \eta) \cdot x$ est application holomorphe de $U_2 \times V_1$ dans F. Il revient en effet au même de dire que l'application $\xi \to L(\xi, \eta) \cdot x$ de U_2 dans $P(V_1, F)$ est holomorphe. Soit donc $\xi_0 \in U_2$, et soit K_2 un voisinage compact de ξ_0 dans U_2; comme l'application $\xi \to L(\xi) \cdot x$ de U_2 dans $P(\Sigma_1, F)$ est holomorphe et applique K_2 dans une partie λA $(\lambda > 0)$, elle est même holomorphe au voisinage de ξ_0 en tant qu'application dans l'espace normé $\boldsymbol{C} \cdot A$ muni de la topologie définie par la «boule» A (§ 2, remarque 2). Par suite $\xi \to L(\xi) \cdot x$ est application holomorphe de U_2 dans $\boldsymbol{C} \cdot A$. Remarquons maintenant que l'application linéaire qui à toute $\tilde{f} \in \boldsymbol{C} \cdot A$ fait correspondre la $f \in P(V_1, F)$ dont elle est l'image, est continue, car elle transforme la boule A dans le borné B. Mais l'application $\xi \to L(\xi, \eta) \cdot x$ est l'application composée de l'application holomorphe $\xi \to L(\xi) \cdot x$ et de l'application linéaire précédente, elle est donc holomorphe.

Si nous explicitons maintenant u à partir de $L(\xi, \eta)$, nous trouvons aussitôt, pour une $f \in P(\Omega_1, E)$ ayant un représentant f défini dans le voisinage U_1 de Ω_1:

$$(8) \qquad u \cdot f = \text{restriction à } \Sigma_1 \text{ de } \eta \to \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma L(\xi, \eta) \cdot f(\xi)\, d\xi$$

où le contour Γ satisfait aux conditions usuelles relativement aux voisinages ouverts U_1 et U_2 de Ω_1, Ω_2. Comme nos raisonnements étaient évidemment réversibles, on obtient en définitive l'énoncé:

Proposition 4. *Soient (Ω_1, Ω_2) et (Σ_1, Σ_2) deux couples de parties complémentaires non vides de Ω, E et F deux espaces localement convexes, on suppose que Σ_1 est ouvert et F complet, ou que F est un sous-espace fermé d'un dual fort d'espace $(\mathfrak{F})$. Alors toute application linéaire bornée u de $P(\Omega_1, E)$ dans $P(\Sigma_1, F)$ est définie grâce à la formule* (8) *ci-dessus, par une fonction holomorphe $L(\xi, \eta)$ dans le produit d'un voisinage ouvert U_2 de Ω_2 par un voisinage ouvert V_1 de Σ_1, à valeurs dans $\mathfrak{L}_s(E, F)$, ayant localement une image uniformément bornée, et telle que $L(\xi, \eta) = 0$ si $\xi = \infty \in \Omega_1$ ou si $\eta = \infty \in \Sigma_1$. Réciproquement, pour toute fonction holomorphe $L(\xi, \eta)$ telle que ci-dessus, la formule* (8) *définit une application linéaire*

bornée de $P(\Omega_1, E)$ dans $P(\Sigma_1, F)$. Deux telles fonctions holomorphes définissent la même application linéaire si et seulement si elles coïncident dans un voisinage de $U_2 \times V_1$.

Supposons pour simplifier que E et F sont tonnelés, alors (théorème 2 bis) les duals de $P(\Omega_1, E)$ et $P(\Sigma_1, F)$ sont respectivement $P(\Omega_2, E')$ et $P(\Sigma_2, F')$. Le lecteur vérifiera alors aisément que l'application linéaire transposée de l'application linéaire définie par la formule (8) est donnée par la formule analogue à la formule (8), où le «noyau» $L(\xi, \eta)$ est remplacé par le «noyau transposé» $(\eta, \xi) \to {}^tL(\xi, \eta)$

$$(9) \qquad {}^tu \cdot \bar{h} = \text{restriction à } \Omega_2 \text{ de } \xi \to \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma {}^tL(\xi, \eta) \cdot h(\eta)\, d\eta.$$

Remarquons encore que dans certains cas, par exemple si on se borne à étudier les endomorphismes bornés de l'espace $P(O)$ (O, partie ouverte de Ω), la formule intégrale (8) permet de développer une théorie spectrale d'un opérateur u toute analogue à la théorie de Fredholm. Cela peut être considéré comme une conséquence d'une théorie de Fredholm abstraite, que je publierai ailleurs.

§ 6. Détermination des applications linéaires continues quelconques d'espaces $P(\Omega_1, E)$.

1. Applications linéaires continues d'espaces $P(H, E)$, H compact. Reprenons la formule (2) du § 5

$$(1) \qquad L \cdot f = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma L(\xi) \cdot f(\xi)\, d\xi.$$

En général, les applications linéaires continues d'un espace $P(\Omega_1, E)$ dans un espace localement convexe F ne peuvent être définies toutes à l'aide des fonctions holomorphes locales sur Ω_2, à valeurs dans $\mathfrak{L}_s(E, F)$. Pourtant, si Ω_1 est *fermé*, à la très élémentaire proposition 3 correspond ici la proposition «duale»

Proposition 5. *Soit $K \neq \Omega$ une partie compacte non vide de la sphère de Riemann Ω, E et F deux espaces localement convexes, on suppose que dans E et dans F l'enveloppe convexe cerclée fermée d'un compact est compacte. Alors les applications linéaires continues de $P(K, E)$ dans F s'identifient par la formule* (1) *aux applications holomorphes $L(\xi)$ de $O = \complement K$ dans $\mathfrak{L}_s(E, F)$, s'annulant au point ∞ si $\infty \in O$, et telles que pour tout compact $K_1 < O$, l'ensemble $L(K_1)$ soit une partie équicontinue de $\mathfrak{L}_s(E, F)$.*

On vérifie d'abord que l'application linéaire u définie par une fonction holomorphe $L(\xi)$ dans O à valeurs dans $\mathfrak{L}_s(E, F)$ est continue si et seulement si la condition supplémentaire envisagée sur $L(\xi)$ dans l'énoncé est satisfaite. Il faut en effet exprimer que l'application transposée u' transforme toute partie équicontinue B de F' en une partie équicontinue du dual de $P(K, E)$, dual qui d'après le théorème 2 bis peut se plonger dans l'espace $P(O, E')$. Mais avec cette identification, la transposée u' est évidemment donnée par

$$u' \cdot y'(\xi) = {}^tL(\xi) \cdot y'$$

et en vertu de la proposition 2 bis, il reste à exprimer que pour tout compact $K_1 < O$, l'ensemble des ${}^tL(\xi) \cdot y'$ ($y' \in B$, $\xi \in K_1$) est partie équicontinue de E'. Mais cela signifie que quand ξ parcourt un compact $K_1 < O$, les ${}^tL(\xi)$ transforment toute partie équicontinue B de F' en une partie équicontinue de E', ce qui est une autre manière d'exprimer que l'ensemble des $L(\xi)$ ($\xi \in K_1$) est équicontinu.

Montrons enfin que toute application linéaire continue u de $P(K, E)$ dans F peut s'obtenir ainsi. En effet, considérons l'application transposée u', qui est une application linéaire de F' dans $P(O, E')$. Munissons E' de la topologie faible, alors $P(O, E'_f)$ a pour dual $P(K, E)$ (théoreme 2 bis) donc l'application u' est faiblement continue de F' dans

$P(O, E'_f)$, et par suite continue si on munit F' de la topologie de Mackey $\tau(F', F)$. Donc (proposition 3) elle est définie par la formule

$$u' \cdot y'(\xi) = l(\xi) \cdot y'$$

où $l(\xi)$ est une application holomorphe de O dans $\mathfrak{L}_s(F'_\tau, E'_f)$. De plus, le fait que u est continue, i. e. que u' transforme toute partie équicontinue B de F' en une partie équicontinue de $P(O, E')$, s'exprime encore comme ci-dessus par la condition que quand ξ parcourt un compact $K_2 \subset O$, l'ensemble des $l(\xi)$ transforme toute partie équicontinue de F' en une partie équicontinue de E', ce qui signifie aussi que les $l(\xi)$ sont transposées d'applications linéaires $L(\xi)$ de E dans F, équicontinues dans leur ensemble. Il est évident de plus que $L(\xi)$ est application holomorphe de O dans $\mathfrak{L}_s(E, F)$. Enfin, u est bien l'application linéaire L définie par la formule (1); car on a déjà dit que la transposée de cette dernière est $y' \to {}^tL(\xi) \cdot y'$, c'est dire précisément u'.

2. Applications linéaires continues d'un espace $P(\Omega_1)$ dans un espace complet F. Soit toujours Ω_1 une partie non vide de la sphère de Riemann Ω, distincte de Ω, E et F deux espaces localement convexes. Au § 4, nous avons déterminé les applications linéaires continues de $P(\Omega_2, E)$ dans F lorsque F est un espace de Banach: elles correspondent biunivoquement aux fonctions localement holomorphes L sur $\Omega_2 = \complement\Omega_1$, à valeurs dans $\mathfrak{L}_s(E, F)$, s'annulant au point ∞ si $\infty \in \Omega_2$, et qui ont localement une image équicontinue. Nous allons en déduire une représentation pour *toutes* les applications linéaires continues d'un espace $P(\Omega_1)$ dans un espace F *complet quelconque*, à l'aide d'une généralisation adéquate de la notion de fonction holomorphe locale employée jusqu'ici.

Soit d'abord F un espace localement convexe séparé quelconque (pas nécessairement complet), $\mathfrak{V}$ un système fondamental de voisinages convexes cerclés fermés de l'origine dans F. Pour tout $V \in \mathfrak{V}$, soit F_V l'espace de Banach qu'on obtient en munissant F de la topologie définie par l'unique voisinage V, en passant à l'espace normé séparé correspondant (quotient de F par le sous-espace des $x \in F$ tels que $\lambda x \in V$ quel que soit $\lambda > 0$) et complétant ce dernier espace. Il y a une application linéaire continue canonique φ_V de F dans F_V, dont l'image est partout dense, d'où une application linéaire continue canonique $\varphi(x) = (\varphi_V x)_{V \in \mathfrak{V}}$ de F dans le produit topologique $\mathfrak{F} = \prod_{V \in \mathfrak{V}} F_V$ des espaces F_V; cette application est un isomorphisme vectoriel topologique dans, de sorte que F s'identifie à un sous-espace vectoriel F_0 de $\mathfrak{F}$. — Si $V, W \in \mathfrak{V}$, $V \subset W$, on a aussi une application linéaire continue naturelle $\varphi_{V,W}$ de F_V dans F_W définie par la condition $\varphi_{V,W}\, \varphi_V x = \varphi_W x$ pour $x \in F$. Par suite, si $X = (X_V)_{V \in \mathfrak{V}} \in F_0$, on a

$$\varphi_{V,W} X_V = X_W \qquad (V \subset W). \tag{2}$$

Par continuité, on a donc $\varphi_{V,W} X_V = X_W$ dès que $X \in \overline{F_0}$. Montrons que les relations (2) caractérisent les éléments de $\overline{F_0}$, donc qu'on a le

Lemme 1. *Si F est un espace localement convexe séparé, $\mathfrak{V}$ un système fondamental de voisinages de l'origine, alors, avec les notations précédentes, pour que l'élément $X = (X_V)_{V \in \mathfrak{V}}$ de $\mathfrak{F} = \prod_{V \in \mathfrak{V}} F_V$ appartienne à l'adhérence de l'image canonique F_0 de F dans $\mathfrak{F}$, il faut et il suffit que pour $V, W \in \mathfrak{V}$, $V \subset W$, on ait* (2).

Corollaire. *La relation* (2) *caractérise les éléments de F_0 si F est complet* (*et dans ce cas seulement*).

En effet, $\mathfrak{F}$ étant complet et F_0 isomorphe à F, F est complet si et seulement si F_0 est sous-espace *fermé* de $\mathfrak{F}$.

La démonstration très élémentaire de ce lemme vaudrait d'ailleurs pour démontrer un résultat analogue pour des structures uniformes quelconques. — Il reste à démontrer

seulement que si on a (2) alors tout voisinage de X rencontre F_0. Mais un voisinage de X dans $\mathfrak{F}$ est défini comme l'ensemble des $Y = (Y_V)_{V \in \mathfrak{B}}$ tels que $\| Y_{V_i} - X_{V_i} \| \leqq \varepsilon$ pour tout i, où $\varepsilon > 0$ et où les V_i $(1 \leqq i \leqq n)$ forment une suite finie d'éléments de $\mathfrak{B}$. Il faut donc montrer qu'il existe $x \in F$ tel que $\| X_{V_i} - x_{V_i} \| \leqq \varepsilon$ pour tout i. Mais soit $V_0 \in \mathfrak{B}$ tel que $V_0 < \bigcap_i V_i$, on a par hypothèse $X_{V_i} = \varphi_{V_0, V_i} X_{V_0}$, et aussi $x_{V_i} = \varphi_{V_0, V_i} x_{V_0}$, d'où

$$X_{V_i} - x_{V_i} = \varphi_{V_0, V_i}(X_{V_0} - x_{V_0}).$$

Comme $\| \varphi_{V_0, V_i} \| \leqq 1$, il suffit qu'on ait $\| X_{V_0} - x_{V_0} \| \leqq \varepsilon$, ce qui est possible, l'image de F par φ_{V_0} dans F_{V_0} étant partout dense.

Le lemme précédent permet, si F est complet, de ramener dans une certaine mesure la détermination des applications linéaires continues d'un espace localement convexe P dans F, à la détermination de ses applications linéaires continues dans les espaces F_V. En effet, une application linéaire continue de P dans F peut être regardée comme une application linéaire continue de P dans $\mathfrak{F} = \prod_{V \in \mathfrak{B}} F_V$, et à ce titre s'identifie à une famille $(u_V)_{V \in \mathfrak{B}}$ d'applications linéaires continues de P dans les F_V. Réciproquement, un tel système définit une application linéaire continue de P qui est une application dans F si et seulement si pour tout $f \in P$, on a $(u_V \cdot f)_{V \in \mathfrak{B}} \in F$, i. e. d'après le lemme qui précède si et seulement si $V, W \in \mathfrak{B}$, $V < W$ implique $\varphi_{V,W}(u_V \cdot f) = u_W \cdot f$, ou enfin si on a

$$\varphi_{V,W} \circ u_V = u_W \quad \text{pour } V < W. \tag{3}$$

Supposons maintenant que P soit un espace $P(\Omega_2, E)$. Alors la donnée d'une application linéaire continue u_V de $P(\Omega_2, E)$ dans F_V revient à la donnée d'une fonction holomorphe locale $\overline{L_V}$ sur Ω_1 à valeurs dans $\mathfrak{L}_s(E, F)$, ayant localement une image équicontinue, nulle au point ∞ si $\infty \in \Omega_1$. La condition de cohérence (3) s'écrit ici

$$\overline{L_W} = \varphi_{V,W} \circ \overline{L_V} \quad \text{pour } V < W \tag{4}$$

en définissant de façon évidente le symbole $\varphi_{V,W} \circ \overline{L_V}$ (dont un représentant est $\xi \to \varphi_{V,W} L_V(\xi)$, si $L_V(\xi)$ est un représentant de $\overline{L_V}$).

Pour raccourcir un peu ce déjà trop long exposé, limitons nous maintenant au cas, le plus intéressant d'ailleurs, où $E = \boldsymbol{C}$, alors $\mathfrak{L}_s(E, F_V)$ s'identifie à F_V, et la formule (4) s'interprète en regardant $\varphi_{V,W} \circ \overline{L_V}$ comme un élément de $P(\Omega_2, E_W)$, dont un représentant est $\xi \to \varphi_{V,W}(L_V(\xi))$, $L_V(\xi)$ étant un représentant de $\overline{L_V}$. Ceci conduit à poser la

Définition. Soit Ω_1 une partie non vide d'un espace topologique Ω, F un espace vectoriel localement convexe, $\mathfrak{B}_0$ le système de ses voisinages de l'origine convexes, cerclés et fermés. On appelle *fonction locale au sens large* sur Ω_1, à valeurs dans F, tout système $(\overline{L_V})_{V \in \mathfrak{B}_0}$ de fonctions locales sur Ω_1, à valeurs respectivement dans les espaces F_V définis plus haut, qui satisfasse aux conditions de cohérence (4). Si Ω est une variété holomorphe, on appelle *fonction holomorphe locale au sens large* sur Ω_1, à valeurs dans F, une fonction locale au sens large $(\overline{L_V})_V$ telle que les $\overline{L_V}$ soient des fonctions holomorphes locales.

Si $L = (\overline{L_V})_V$ est une fonction locale au sens large sur Ω_1, il y a lieu de considérer pour tout $\xi \in \Omega_1$ l'élément $(\overline{L_V}(\xi))_{V \in \mathfrak{B}_0}$, qui est un élément du complété de F en vertu du lemme 1 — donc un élément de F si F est complet — qu'on note $L(\xi)$. — Par la suite nous supposons que Ω est la sphère de Riemann, et nous désignons par $Q(\Omega_1, F)$ l'espace des fonctions holomorphes locales aux sens large sur Ω_1, à valeurs dans F, s'annulant au point ∞ si $\infty \in \Omega_1$. Bien entendu, sur l'ensemble $Q(\Omega_1, E)$ il y a lieu de considérer la structure vectorielle induite par le produit des $P(\Omega_1, F)$ (pour $V \in \mathfrak{B}_0$) — il y aurait

même lieu de considérer la topologie induite par le produit topologique, mais nous ne nous en servirons pas par la suite. De plus, on vérifie trivialement que l'espace $Q(\Omega_1, F)$ est isomorphe canoniquement à l'espace analogue qu'on construit en se bornant à un *système fondamental* $\mathfrak{B}$ de voisinages convexes cerclés fermés de l'origine dans F; de façon précise, la projection du produit $\prod_{V \in \mathfrak{B}_0} P(\Omega_1, F)$ sur le produit partiel $\prod_{V \in \mathfrak{B}} P(\Omega_1, F)$ induit un isomorphisme de $Q(\Omega_1, F)$ sur l'espace des élements du second produit qui satisfont à la condition de cohérence (4). Notons aussi dans cet ordre d'idées que si F est normé complet, ou Ω_1 ouvert, alors $P(\Omega_1, F)$ et $Q(\Omega_1, F)$ peuvent s'identifier de façon naturelle. Mais dans le cas général (notamment si on suppose que F est un espace $(\mathfrak{F})$) on a seulement un isomorphisme naturel de $P(\Omega_1, E)$ *dans* $Q(\Omega_1, F)$, qui n'est pas forcément un isomorphisme sur.

Enfin, il y a encore lieu de remarquer que si $\infty \in \Omega_1$, F complet, alors pour une fonction holomorphe, locale au sens large sur Ω_1, $L = (\overline{L_V})_V$ donnée, et pour tout entier $n \geqq 0$, le système des $\overline{L_V^{(n)}}$ satisfait aux conditions de cohérence (4), c'est donc une fonction holomorphe locale au sens large sur Ω_1, qu'on désignera naturellement par $L^{(n)}$. On vérifie aussitôt que L est complètement déterminée quand on connait tous les $L^{(n)}(\xi)$, pour n entier $\geqq 0$ quelconque et $\xi \in \Omega_1$. D'ailleurs, même si $\infty \in \Omega_1$, on peut pour $\xi \in \Omega_1$, $\xi \neq \infty$, et tout entier $n \geqq 0$, considérer l'élément $L^{(n)}(\xi) = \left((\overline{L_V^{(n)}}(\xi))\right)_{V \in \mathfrak{B}_0} \in F$.

Les réflexions qui ont précédé la définition donnée plus haut permettent d'énoncer le

Théorème 4. *Soit $\Omega_1 \neq \Omega$ une partie non vide de la sphère de Riemann Ω, F un espace localement convexe complet. Alors les applications linéaires continues de $P(\Omega_1)$ dans F correspondent biunivoquement aux éléments de $Q(\Omega_2, F)$, — applications holomorphes locales au sens large $L = (\overline{L_V})_V$ de $\Omega_2 = \complement \Omega_1$ dans F —, par la formule*

$$\varphi_V(u \cdot \bar{f}) = \overline{L_V} \cdot \bar{f} = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma L_V(\xi) \cdot f(\xi)\, d\xi \tag{5}$$

(où f est un représentant de $\bar{f}$, L_V un représentant de $\overline{L_V}$, et où le contour Γ est défini comme usuellement).

Si u est l'application linéaire qui correspond à $L \in Q(\Omega_2, F)$, on a la formule

$$L^{(n)}(\xi) = u_z\left(\frac{n!}{(z-\xi)^{n+1}}\right) \quad \text{si } \xi \in \Omega_2,\ \xi \neq \infty,\ n \geqq 0, \tag{6}$$

qui détermine L à l'aide de u au moins dans le cas où $\infty \notin \Omega_2$, plus généralement si ∞ n'est pas point isolé de Ω_2. Pour vérifier (6), il suffit de vérifier qu'on a bien $\varphi_V L^{(n)}(\xi) = \varphi_V u_z\left(\frac{n!}{(z-\xi)^{n+1}}\right)$ pour tout $V \in \mathfrak{B}_0$, mais le premier membre est par définition $\overline{L_V^{(n)}}(\xi)$ et le second est d'après (5) égal à $\overline{L_V} \cdot \left(\frac{n!}{(z-\xi)^{n+1}}\right)$, on est donc ramené à la formule (6) dans le cas où F est un espace de Banach. Mais dans ce cas elle a été établie au cours de la démonstration du théorème 3, et peut d'ailleurs se déduire alors directement de la formule analogue: formule (2) du § 4. — Si $\infty \in \Omega_2$, il y a lieu de compléter la formule (6) par la formule analogue à la formule (3) du § 4, que nous n'écrirons pas.

3. Exemples d'applications holomorphes locales au sens large. Le théorème 4 n'aurait guère d'intérêt si dans des cas particuliers importants, la notion de fonction holomorphe au sens large ne pouvait s'interpréter simplement (d'ailleurs, le théorème 4 a été inspiré précisément par une représentation plus concrète des endomorphismes d'un espace $P(O)$ donnée par G. Köthe — c. f. [7]). Nous allons donc donner quelques exemples, relatifs à des espaces F de divers types particulièrement fréquents.

a) Soit F l'espace des fonctions complexes continues sur un espace localement compact M, muni de la topologie de la convergence compacte. On suppose M réunion d'une *suite* de compacts (« dénombrable à l'infini » avec la terminologie de [2]). Alors les fonctions holomorphes au sens large sur Ω_1, à valeurs dans F, s'identifient aux classes de fonctions complexes continues $f(z, t)$, holomorphes en z, définies dans des voisinages ouverts (variables) U de la partie $\Omega_1 \times M$ de l'espace topologique $\Omega \times M$; deux telles fonctions étant mises dans la même classe si et seulement si elles coïncident dans un voisinage de $\Omega_2 \times M$, i. e. si elles définissent la même fonction locale sur $\Omega_2 \times M$ (c. f. § 4, No 2).

Démonstration. On voit immédiatement que M sera même réunion d'une suite *croissante* de compacts K_i, tels que tout compact $K \subset M$ soit contenu dans l'un des K_i. Alors un système fondamental de voisinages de l'origine dans F est la suite $(V_n)_n$, où pour tout entier $n > 0$, V_n désigne l'ensemble des $f \in F$ telles que $|f(K_n)| \leqq \frac{1}{n}$. Alors F_{V_n} s'identifie à l'espace $C(K_n)$ des fonctions continues sur K_n, comme il resulte immédiatement du théorème de Tychonoff.

Soit alors $f(z, t)$ une fonction complexe continue définie dans le voisinage U de $\Omega_1 \times M$, holomorphe en z. Pour tout n, il existe un voisinage ouvert U_n de Ω_1 tel que $U_n \times K_n \subset U$. En effet, soit $\xi \in \Omega_1$, on a $\{\xi\} \times K_n \subset U$, d'où aussitôt l'existence d'un voisinage U_ξ de ξ tel que $U_\xi \times K_n \subset U$ (car $\{\xi\} \times K_n$ est compact), il suffit alors de poser $U_n = \bigcup_{\xi \in \Omega_1} U_\xi$. Alors la restriction de $f(z, t)$ à $U_n \times K$ s'identifie à une application holomorphe de U_n dans $F_{V_n} = C(K_n)$ (§ 3, ex. a)) que nous désignerons par $L_n(z)$. Soit $\overline{L_n}$ la fonction holomorphe locale sur Ω_1 (au sens strict) qu'elle définit, il est immédiat de vérifier que le système des $\overline{L_n}$ vérifie les conditions de cohérence (4), et définit donc une fonction holomorphe locale au sens large sur Ω_1 à valeurs dans F. Il est immédiat de plus que cette fonction locale ne change pas si on change les U_n. Enfin, on vérifie immédiatement que si $f(z, t)$ et $g(z, t)$ sont des fonctions complexes continues, holomorphes en z, définies respectivement dans des voisinages ouverts U et V de $\Omega_2 \times M$, alors les fonctions holomorphes locales au sens large qu'elles définissent sont identiques si et seulement si f et g coïncident dans un voisinage convenable de $\Omega_2 \times M$.

Il reste donc à montrer que toute fonction holomorphe locale au sens large $L = (\overline{L_n})_n$ peut s'obtenir de la façon précédente. Mais pour tout n, $\overline{L_n}$ provient d'une fonction holomorphe définie dans un voisinage U_n de Ω_1, à valeurs dans $C(K_n)$, qui elle-même s'identifie (§ 3, ex. a)) à une fonction $f_n(z, t)$ continue holomorphe en z définie sur $U_n \times K$. Les U_n sont en partie arbitraire, montrons de proche en proche que, en les remplaçant au besoin par des ouverts U'_n plus petits, on peut supposer que la suite des U_n est décroissante et que $m > n$, $z \in U_m$, $t \in K_n$ implique $f_m(z, t) = f_n(z, t)$. Alors nous poserons $U = \bigcup_n U_n \times \mathring{K}_n$, c'est là un voisinage de $\Omega_1 \times M$, et si $(z, t) \in U$, on pourra poser sans ambiguïté $f(z, t) = f_n(z, t)$ pour $z \in U_n$, $t \in K_n$; la fonction $f(z, t)$ ainsi construite satisfera bien aux conditions voulues. — Pour déterminer à partir des suites $(U_n)_n$, $(f_n)_n$, une suite décroissante $(U'_n)_n$ d'ouverts satisfaisant aux hypothèses de cohérence posées ci-dessus, on commence par poser $U'_1 = U_1$, puis supposant construite la suite décroissante $(U'_i)_i$ jusqu'au rang n, de telle façon que pour $i \leqq n - 1$, $z \in U'_{i+1}$, $t \in K_i$, on ait $f_i(z, t) = f_{i+1}(z, t)$, on poursuit la récurrence en notant que la condition de cohérence (3) entre $\overline{L_n}$ et $\overline{L_{n+1}}$ s'interprète en effet par l'existence d'un voisinage ouvert $U'_{n+1} \subset U_{n+1} \cap U'_n$ de Ω_1 tel que $z \in U'_{n+1}$, $t \in K_n$ implique $f_n(z, t) = f_{n+1}(z, t)$. Par là, notre assertion se trouve complètement démontrée.

b) Soit F l'espace $\mathfrak{E}(\bar{O})$ des fonctions indéfiniment différentiables sur l'adhérence d'un ouvert relativement compact $O \subset \boldsymbol{R}^m$, muni de la topologie de la convergence uniforme de la fonction variable et de chacune de ses dérivées. Alors les fonctions holomorphes locales sur Ω_1, à valeurs dans F, s'identifient aux classes de fonctions $f(z, t)$ définies dans le produit d'un voisinage ouvert U de Ω_1 par $\bar{O}$, holomorphes en z, et telles que pour tout entier $n \geqq 0$, existe un voisinage $U_n \subset U$ de Ω_1, tel que les dérivées partielles par rapport à t, d'ordre $\leqq n$, existent et soient continues dans $U_n \times \bar{O}$; deux telles fonctions $f(z, t)$, $g(z, t)$ étant mises dans la même classe si et seulement si elles coïncident dans un voisinage de la partie $\Omega_1 \times \bar{O}$ de $\Omega \times \bar{O}$.

La démonstration de cet énoncé est toute analogue à la précédente. Ici une suite fondamentale de voisinages de l'origine dans F est $(V_n)_n$; où pour tout entier $n \geqq 0$, V_n désigne l'ensemble des $f \in F$ telles que $\| D^p f \|_\infty \leqq \frac{1}{n}$ pour tout indice de dérivation multiple p d'ordre $|p| \leqq n$. F_{V_n} s'identifie ici de façon naturelle à l'espace $\mathfrak{E}^{(n)}(\bar{O})$ des fonctions n fois continûment différentiables sur $\bar{O}$, muni de la convergence de la convergence uniforme de la fonction et de ses dérivées d'ordre $\leqq n$. Soit alors $f(z, t)$ une fonction telle que envisagée dans l'énoncé, on voit comme précédemment, en vertu ce fois-ci de § 3, ex. b), que cette fonction définit bien une fonction holomorphe locale au sens large sur Ω_1, à valeurs dans F, car pour tout n, la restriction de $f(z, t)$ à $U_n \times \bar{O}$ s'identifie à une application holomorphe $L_n(z)$ de U_n dans $\mathfrak{E}^{(n)}(\bar{O})$, et la condition de cohérence (4) est encore trivialement satisfaite. De plus, on vérifie trivialement que la fonction holomorphe locale au sens large ainsi définie sur Ω_1 ne dépend pas du choix plus particulier des U_n, et que deux fonctions $f(z, t)$ et $g(z, t)$ définissent la même fonction holomorphe au sens large si et seulement si elles coïncident dans un ensemble $W \times \bar{O}$ (W, voisinage ouvert de Ω_1), ou, ce qui revient au même puisque $\bar{O}$ est compact, si elles coïncident dans un voisinage de $\Omega_1 \times \bar{O}$ dans $\Omega \times \bar{O}$.

Reste enfin à montrer que toute fonction holomorphe locale au sens large $(\overline{L_n})_n$ sur Ω_1 à valeurs dans F s'obtient ainsi. Soit $L_0(z)$ un représentant de $\overline{L_0}$, défini dans un voisinage ouvert $U_0 = U$ de Ω_1, cette fonction s'identifie (§ 3, ex. b)) à une fonction continue $f(z, t)$ sur $U \times \bar{O}$, holomorphe en z. Soit de même $L_n(z)$ un représentant de $\overline{L_n}$, défini dans un voisinage ouvert U_n de Ω_1, voisinage qu'on peut supposer contenu dans U. $L_n(z)$ s'identifie à une fonction continue $f_n(z, t)$ définie sur $U_n \times \Omega_1$, holomorphe en z et n fois continûment différentiable en t. Mais la condition de cohérence (4) signifie ici qu'en choisissant U_n assez petit, on doit avoir $f_n(z, t) = f(z, t)$ quel que soit $(z, t) \in U_n \times \Omega_n$. Il suit que $f(z, t)$ est n fois continûment différentiable en t dans $U_n \times O$. Enfin, il est évident que L est bien définie par la fonction $f(z, t)$.

Nous énoncerons sans en donner la démonstration les résultats analogues suivants:

c) Soit F l'espace de Schwarz $\mathfrak{E}(\boldsymbol{R}^m)$ des fonctions indéfiniment différentiables sur $\boldsymbol{R}^m$, muni de la topologie de la convergence compacte de la fonction et de chacune de ses dérivées. Les fonctions holomorphes locales au sens large sur Ω_1, à valeurs dans F, s'identifient aux classes de fonctions continues $f(z, t)$ définies dans un voisinage ouvert U de la partie $\Omega_1 \times \boldsymbol{R}^m$ de l'espace topologique $\Omega \times \boldsymbol{R}^m$, holomorphes en z, et telles que pour tout entier $n \geqq 0$ existe un voisinage $U_n \subset U$ de $\Omega_1 \times \boldsymbol{R}^m$ tel que $f(z, t)$ soit n fois continûment différentiable en t dans $U_n \times \boldsymbol{R}^m$; deux telles fonctions étant mises dans la même classe si et seulement si elles coïncident dans un voisinage de $\Omega_1 \times \boldsymbol{R}^m$.

d) Soit F l'espace $\mathfrak{H}(O)$ des fonctions holomorphes sur un ouvert O du plan complexe, muni de la topologie de la convergence compacte. Alors les fonctions holomorphes locales au sens large sur Ω_1, à valeurs dans F, s'identifient aux fonctions holomorphes locales (au sens strict) à valeurs complexes sur la partie $\Omega_1 \times O$ de la variété holomorphe $\Omega \times O$ (c. f. [7]).

Dans ce dernier exemple, O peut d'ailleurs être remplacé par n'importe quelle variété holomorphe. De même, dans tous les exemples précédents, Ω_1 peut être supposé une partie quelconque d'une variété holomorphe Ω quelconque, à une ou plusieurs dimensions complexes. On aurait aussi pu supposer plus généralement que les éléments des espaces F envisagés, au lieu d'être des fonctions complexes, étaient des fonctions à valeurs dans un espace de Banach donné E.

On pourrait multiplier les généralisations des exemples précédents et l'exhibition d'autres exemples, mais ce qui précède suffit sans doute à montrer comment dans chaque cas particulier le théorème 4 peut servir à une détermination « concrète » d'applications linéaires d'un espace $P(\Omega_1)$. Nous laissons aussi au lecteur le soin d'écrire les formules intégrales explicites pour les transformations linéaires définies par les fonctions holomorphes locales au sens large considérées dans les exemples précédents.

Dans tous ces exemples, F était un espace $(\mathfrak{F})$. Les méthodes employées ne sont plus valables pour des espaces tels que les duals fort d'espaces $(\mathfrak{F})$ non normables, et en particulier pour divers espace de distributions. Mais ici la question ne se pose pratiquement plus à priori, car les déterminations des applications linéaires continues d'un espace $P(\Omega_1)$ dans un espaces F n'ont guère d'intérêt pratique que si Ω_1 est fermé ou ouvert; dans le premier cas le problème est résolu par la proposition 5 de ce paragraphe, et dans le deuxième cas, $P(\Omega_1)$ étant un espace $(\mathfrak{F})$, ses applications linéaires continues dans un dual d'espace $(\mathfrak{F})$ sont bornées, de sorte qu'on peut appliquer le théorème 3 du § 5. D'ailleurs, en se basant sur cette dernière remarque, ou mieux directement par application du théorème de Baire, on peut montrer que si F est un dual d'espace $(\mathfrak{F})$, les notions d'application holomorphe locale, au sens large ou au sens strict, à valeurs dans F, sont les mêmes, ce qui résoud la question complètement.

Bibliographie.

1. *N. Bourbaki*, Algèbre Chap. III, Actual. Sc. et Ind. No. 1084, Hermann (Paris).
2. *N. Bourbaki*, Topologie Générale Chap. X, Act. Sc. et Ind. No. 1044, Hermann (Paris).
3. *N. Bourbaki*, Sur certains espaces vectoriels topologiques, Annales de Grenoble, t. 2, 1950.
4. *J. Dieudonné et L. Schwartz*, La dualité dans les espaces $(\mathfrak{F})$ et $(\mathfrak{LF})$, Annales de Grenoble, t. 1, 1949.
5. *A. Grothendieck*, Quelques résultats relatifs à la dualité dans les espaces $(\mathfrak{F})$, C. R. t. 230, p. 1561—1553, 1950.
6. *A. Grothendieck*, Critères dénombrables de compacité dans les espaces fonctionnels, Am. Journal of Math. vol. 74, 1952.
7. *G. Köthe*, Dualität in der Funktionentheorie, Crelles Journal, t. 191, 1953.
8. *G. Köthe*, Die Stufenräume, eine einfache Klasse vollkommener Räume, Mathematische Zeitschrift, t. 51, 1948.
9. *L. Schwartz*, Théorie des distributions, tomes 1 et 2, Actual. Sc. et Ind., Nos 1091 et 1122, Hermann (Paris).
10. *L. Schwartz*, Les équations d'évolution liées au produit de composition.
11. *J. Silva*, As Funções Analíticas e a Analíse Funcional, Port. Math., t 9, 1—130, 1950.

Eingegangen 7. November 1951.

Isoperimetrische und verwandte Extremalprobleme für beschränkte ebene Punktmengen.

Von *D. Ohmann* in Frankfurt a. Main.

Für konvexe Bereiche sind in der euklidischen Ebene eine Vielzahl von Extremalproblemen behandelt, die sich um die vier Größen: Umfang U, Inhalt F, Durchmesser D und Dicke Δ gruppieren. Einerseits hat man bei gegebenen Breitenextremalen D und Δ nach Extremwerten für den Umfang gefragt und andrerseits bei Vorgabe von einer oder mehrerer der Größen U, D, Δ die Bereiche maximalen oder minimalen Inhalts zu bestimmen gesucht. Für beliebige Punktmengen besteht zunächst die Aufgabe, die Maße U, F, D, Δ geeignet zu übertragen, um zu vernünftigen Problemstellungen zu gelangen. Wir werden dabei diese Maße als innere und äußere Maße im Sinne Lebesgues definieren, wobei wir innere Maße stets klein und äußere Maße stets groß schreiben werden. Dann bietet sich an, den Inhalt F durch das zweidimensionale innere (äußere) Lebesgue-Maß $m(M)$ zu ersetzen, Durchmesser und Dicke durch die entsprechenden Extremale des inneren (äußeren) Quermaßes und den Umfang durch das innere (äußere) Quermaßintegral u (U).

Wir werden dann als Ergebnis für die erste Gruppe von Extremalproblemen finden, daß zwischen dem Quermaßintegral und den Quermaßextremalen nur die der Definition unmittelbar zu entnehmenden Ungleichungen bestehen können. Weiter fällt die Gruppe von Extremalproblemen, die sich mit minimalem Maß beschäftigt, naturgemäß aus. Hingegen erweisen sich die Extremalprobleme für maximales Maß als weitgehend übertragungsfähig, da sich jeder Menge ein konvexer Bereich zuordnen läßt, dessen Inhalt das innere (äußere) Maß der Menge nicht unterschreitet, während seine linearen Abmessungen (U, D, Δ) nicht größer sind als die entsprechenden linearen inneren (äußeren) Maße der Mengen.

§ 1. Definitionen und Vorbetrachtungen.

1. Wir beginnen mit den Definitionen für die uns interessierenden linearen Maße einer ebenen Menge (daß es sich bei allen betrachteten Mengen um *beschränkte* Punktmengen der euklidischen Ebene handelt, werden wir von nun an nicht weiter betonen):

Unter dem *Normalriß* $A(\varphi)$ der Menge A in der Richtung φ verstehen wir die senkrechte Parallelprojektion von A in der Richtung φ auf eine Gerade der Richtung $\varphi + \frac{\pi}{2}$. Dann bezeichnen wir das lineare innere (äußere) Maß $m_1(A, \varphi)$ $\big(M_1(A, \varphi)\big)$ von $A(\varphi)$ als *inneres* (*äußeres*) *Quermaß* $q(\varphi)$ $\big(Q(\varphi)\big)$ in der Richtung φ. Die extremalen inneren (äußeren) Quermaße sollen *Hauptquermaße* q_1 (Q_1) und *Nebenquermaße* q_2 (Q_2) heißen:

$$(1) \qquad q_1 \geqq q(\varphi) \geqq q_2, \qquad Q_1 \geqq Q(\varphi) \geqq Q_2.$$

Als *inneres* (*äußeres*) *Quermaßintegral* verstehen wir schließlich die unteren Lebesgue-Integrale:

$$(2) \qquad u = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} q(\varphi)\, d\varphi, \qquad U = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} Q(\varphi)\, d\varphi.$$

In § 2 werden wir sehen, daß außer den sich sofort aus (1) und (2) ergebenden Ungleichungen

$$(3) \qquad \text{(a) } \pi q_1 \geqq u \geqq \pi q_2 \qquad \text{(b) } \pi Q_1 \geqq U \geqq \pi Q_2$$

keine weiteren Beziehungen zwischen u (U) und q_1, q_2 (Q_1, Q_2) bestehen können.

2. Wir notieren als unmittelbare Folgerungen aus der Definition des Normalrisses:

a) Die Normalrisse einer abgeschlossenen bzw. offenen Menge sind wieder abgeschlossen bzw. offen.

b) Der Normalriß der Vereinigungsmenge verschiedener Mengen ist gleich der Vereinigungsmenge der Normalrisse der einzelnen Mengen.

c) Das Quermaßintegral besitzt die additive Eigenschaft, daß für $A' > A$

$$u(A') \geqq u(A), \qquad U(A') \geqq U(A)$$

besteht.

3. Eine ausschlaggebende Rolle spielen in unseren späteren Betrachtungen die *Rumpfbereiche* R'_A, R''_A, die wir einer Menge A in folgender Weise zuordnen: Wir deuten die Funktion $\frac{1}{2}q(\varphi)\left(\frac{1}{2}Q(\varphi)\right)$ als Abstand von Geraden $G'(\varphi)$ ($G''(\varphi)$) der Richtung φ von einem festen Ursprung 0. Dann ist der Durchschnitt aller durch die $G'(\varphi)$ ($G''(\varphi)$) definierten und 0 enthaltenden Halbebenen nicht leer, sondern stellt einen konvexen Bereich mit Mittelpunkt dar, den wir den *inneren* (*äußeren*) *Rumpfbereich* $R'_A(R''_A)$ von A nennen wollen. Aus der Definition folgt sofort:

$$(4) \qquad q(R'_A, \varphi) \leqq q(A, \varphi), \qquad Q(R''_A, \varphi) \leqq Q(A, \varphi)$$

und mithin

$$(5) \qquad \begin{aligned} q_j(R'_A) &\leqq q_j(A), & Q_j(R''_A) &\leqq Q_j(A) \qquad (j = 1, 2), \\ u(R'_A) &\leqq u(A), & U(R''_A) &\leqq U(A). \end{aligned}$$

Der Beweis der weiteren wichtigen, aber in umgekehrter Richtung verlaufenden Ungleichung

$$(6) \qquad m(R'_A) \geqq m(A), \qquad M(R''_A) \geqq M(A)$$

soll dem § 3 als Aufgabe vorbehalten bleiben.

4. Für Rumpfbereiche beweisen wir noch den folgenden Approximationssatz:

Der Rumpfbereich einer Menge läßt sich beliebig genau durch ein Polygon mit Mittelpunkt approximieren, dessen Seiten auf erzeugenden Geraden liegen.

Dabei wollen wir unter *erzeugenden Geraden* die Geraden $G'(\varphi)$ ($G''(\varphi)$) verstehen, die wir bei der Konstruktion des Rumpfbereichs $R'_A(R''_A)$ benutzt haben.

Zum Beweis sei $S'(\varphi)$ der Parallelstreifen, der von den erzeugenden Geraden $G'(\varphi)$ und $G'(\varphi + \pi)$ begrenzt wird, und D_0 der Durchschnitt der Streifen $S'(\varphi_0)$ und $S'\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)$.

Bezeichnet dann noch $D_1(\varphi)$ den Durchschnitt $D_0 S'(\varphi)$, so möge φ_1 eine Richtung sein, in der das Maß von $D_1(\varphi_1)$ um höchstens 1 vom Minimum abweicht:

$$m[D_1(\varphi_1)] - \min m[D_1(\varphi)] < 1.$$

In gleicher Weise seien $D_2(\varphi) = D_1(\varphi_1)\, S'(\varphi)$ und φ_2 so gewählt, daß

$$m[D_2(\varphi_2)] - \min m[D_2(\varphi)] < \frac{1}{2}.$$

Durch Fortsetzung dieser Durchschnittsbildung ergibt sich schließlich eine Folge von Durchschnitten $D_j = D_j(\varphi_j)$, für die jeweils

$$D_{j+1} = D_j S(\varphi_{j+1});\ m(D_j) - \min m[D_j(\varphi)] < \frac{1}{2^j} \quad (j = 1, 2, \ldots)$$

gilt, und die eine gegen ihren Durchschnitt D^* konvergente Folge darstellen.

D^* besitzt dann die Eigenschaft, daß jeder Durchschnitt $D^* S'(\varphi)$ wieder mit D^* zusammenfällt, d. h. aber, eine Eigenschaft, die nach Konstruktion nur Untermengen des Rumpfbereichs R'_A zukommen kann. Andrerseits wird dieser von jedem Bereich D_j enthalten, so daß wir $D^* = R'_A$ folgern dürfen.

Da die D_j gemäß ihrer Konstruktion Polygone darstellen, wie sie im Approximationssatz beschrieben werden, folgt dieser aus der Konvergenz der D_j gegen $D^* = R'_A$ für den inneren Rumpfbereich. Für den äußeren Rumpfbereich lassen sich diese Entwicklungen in völlig gleicher Weise durchführen.

§ 2. Mengen mit extremalem Quermaßintegral bei vorgegebenem Haupt- und Nebenquermaß.

Bevor wir an die Bestimmung von Mengen mit extremalem Quermaßintegral herangehen, wollen wir zwei Typen von Mengen konstruieren, mit deren Hilfe wir unsere Aufgabe dann sehr einfach bewältigen werden.

1. Unter einer Menge vom Typ α wollen wir eine Menge verstehen, deren inneres und äußeres Quermaß in jeder Richtung zusammenfällt und in einer ausgezeichneten Richtung verschwindet, während es in allen übrigen Richtungen den gleichen positiven Wert annimmt:

$$q(\varphi_0) = 0;\quad q(\varphi) = a > 0 \quad (\varphi \neq \varphi_0).$$

Ein Beispiel für solche Mengen ist leicht gegeben: Umfaßt A die Menge aller Punkte mit $x^2 + y^2 \leqq \left(\frac{a}{2}\right)^2$ und rationaler Abszisse im kartesischen Koordinatensystem x, y, so ist A offenbar vom Typ α.

2. Den Typ β erklären wir umgekehrt: A ist genau dann vom Typ β, wenn das Quermaß von A in allen Richtungen verschwindet, mit Ausnahme einer ausgezeichneten Richtung φ_0, in der es einen vorgegebenen positiven Wert annehmen soll[1]):

$$q(\varphi) = 0\ (\varphi \neq \varphi_0);\quad q(\varphi_0) > 0.$$

Ein Beispiel für diese Mengenklasse ist nicht so einfach zu geben. Dazu definieren wir eine Klasse $\mathfrak{A}$ von abgeschlossenen Mengen in folgender Weise:

a) Der Normalriß $A(\varphi_0)$ der Menge $A \in \mathfrak{A}$ in der festen Richtung φ_0 stellt eine Strecke der Länge l dar.

[1]) Eine solche Menge wird auch von *S. Mazurkiewicz* und *S. Saks*, Sur les projections d'un ensemble fermé, Fundamenta 8 (1941), 109—113, konstruiert. Ob die dortige Konstruktion in gleicher Weise verläuft, ist mir nicht bekannt.

b) $A \in \mathfrak{A}$ besteht aus endlich vielen (etwa n) abgeschlossenen einander kongruenten und ähnlich liegenden Rechtecken R_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) mit den Seitenrichtungen φ_0 und $\varphi_0 + \frac{\pi}{2}$.

c) Jede Gerade der Richtung φ_0 geht durch das Innere höchstens eines Rechtecks R_ν.

Alsdann können wir zeigen: Zu $A \in \mathfrak{A}$ läßt sich bei vorgegebener Richtung φ^* und vorgegebenem $\varepsilon > 0$ eine Untermenge $A^* \in \mathfrak{A}$ von A derart angeben, daß

$$q(A^*, \varphi) \leqq l \left| \frac{\sin(\varphi - \varphi^*)}{\sin(\varphi^* - \varphi_0)} \right| + \varepsilon \tag{7}$$

statthat.

Dazu greifen wir ein beliebiges Rechteck R unter den $R_\nu < A$ heraus, dessen Seitenlängen wir mit a und b bezeichnen, und wählen auf R ein Unterrechteck $R' \leqq R$ mit den Seitenlängen a und $b' \leqq b$ in einer Weise aus (Fig. 1), daß bei passend zu bestimmendem, ganzzahligen p

$$b' = \operatorname{ctg}(\varphi^* - \varphi_0) \cdot \frac{a}{p} \tag{8}$$

gilt (in Fig. 1 ist $p = 3$).

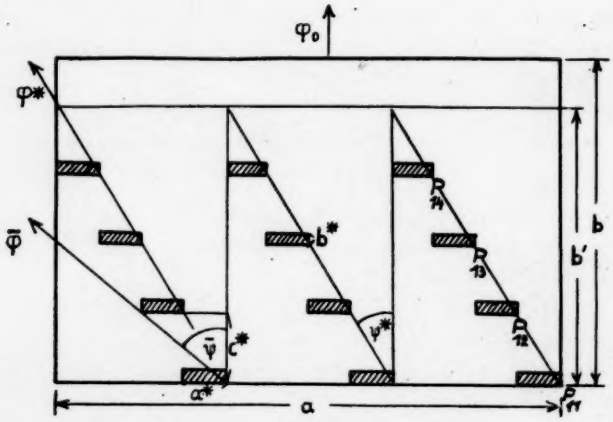


Fig. 1.

Nun teilen wir R in die Teilrechtecke T_ϱ ($\varrho = 1, \ldots, p$) mit den Seitenlängen $\frac{a}{p}$ und b'. Die eine Diagonale D_ϱ von T_ϱ hat dann die Richtung φ^*. Wir zerlegen weiter D_ϱ durch äquidistante Teilpunkte $P_{\varrho,\mu}$ in m gleiche Teile und nehmen die $P_{\varrho,\mu}$ gemäß Fig. 1 als Eckpunkte für neue Unterrechtecke $T_{\varrho,\mu}$, deren Seitenlängen durch $a^* = \frac{a}{mp}$ und b^* gegeben seien, wobei über a^* und b^* durch passende Wahl von m noch geeignet zu verfügen ist.

Verfahren wir mit allen n Rechtecken R_ν in gleicher Weise, so gilt für die Vereinigungsmenge A^* aller dabei entstehenden Rechtecke $T_{\varrho,\mu}$ sicher:

$$A^* \in \mathfrak{A} \text{ und } A^* \leqq A.$$

Um Aussagen über das Quermaß von A^* zu machen, untersuchen wir zunächst das Quermaß der Vereinigungsmenge T^* aller auf einem Rechteck T_ϱ gelegenen Rechtecke $T_{\varrho,\mu}$. Mit $\psi = \varphi - \varphi_0$ und $\delta = \operatorname{sign} \psi^*$ ($\psi^* = \varphi^* - \varphi_0$) findet man für $0 < |\psi^*| < \frac{\pi}{2}$:

$$(9)\quad q(T^*, \varphi) \leqq \begin{cases} m(a^* \cos\psi + b^* \sin|\psi|), & -\frac{\pi}{2} \leqq \delta\psi \leqq 0, \\ m(a^* \cos\psi - c^* \sin|\psi|) + a^* \cos\psi + b^* \sin|\psi|, & 0 \leqq \delta\psi \leqq \delta\psi^*, \\ m(c^* \sin|\psi| - a^* \cos\psi) + a^* \cos\psi + b^* \sin|\psi|, & \delta\psi^* \leqq \delta\psi \leqq \delta\bar{\psi}, \\ m(a^* \cos\psi + b^* \sin|\psi|), & \delta\bar{\psi} \leqq \delta\psi \leqq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Hierin haben $c^* = a^* \operatorname{ctg}|\psi^*|$ und $\bar{\psi} = \operatorname{arcctg}\frac{2a^*}{c^*}$ die aus Fig. 1 ersichtliche Bedeutung.

Da das Quermaß der Vereinigungsmenge endlich vieler Mengen höchstens so groß sein kann wie die Summe der Quermaße der Einzelmengen, haben wir

$$(10)\qquad q(A^*, \varphi) \leqq pn\, q(T^*, \varphi).$$

Damit ergibt sich aus (9), indem man c^* durch $a^* \operatorname{ctg}\psi^*$ ersetzt und aus Eigenschaft c) für Mengen der Klasse $\mathfrak{A}$ die Beziehung $l = na = mnpa^*$ folgert:

$$(11)\quad q(A^*, \varphi) \leqq \begin{cases} l\cos\psi + mnpb^*, & -\frac{\pi}{2} \leqq \delta\psi \leqq 0, \\ l\frac{\sin|\psi - \psi^*|}{\sin|\psi^*|} + np(a^* + b^*), & 0 \leqq \delta\psi \leqq \delta\bar{\psi}, \\ l\cos\psi + mnpb^*, & \delta\bar{\psi} \leqq \delta\psi \leqq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Nun haben wir bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ nur noch $m > \frac{2na}{\varepsilon}$, d. h. $a^* < \frac{\varepsilon}{2np}$ sowie $b^* < \frac{\varepsilon}{2mnp}$ zu wählen, um aus (11) die Richtigkeit von (7) erschließen zu können.

Umfaßt Φ nun die Richtungen φ_σ ($\sigma = 1, \ldots, s$), und sind die Mengen $A_\sigma \in \mathfrak{A}$ so gewählt, daß $A_\sigma \leqq A_{\sigma-1}$ und $q(A_\sigma, \varphi) \leqq l\left|\frac{\sin(\varphi - \varphi_\sigma)}{\sin(\varphi_0 - \varphi_\sigma)}\right| + \varepsilon$ besteht, so gilt bei $A_s \leqq A_\sigma$ dann für jede Richtung φ_σ

$$q(A_s, \varphi) \leqq l\left|\frac{\sin(\varphi - \varphi_\sigma)}{\sin(\varphi_0 - \varphi_\sigma)}\right| + \varepsilon.$$

Enthält dann $\Phi^{(\lambda)}$ speziell die Richtungen $\varphi_0 \pm \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\varkappa}{2^\lambda}$ ($\varkappa = 1, \ldots, 2^\lambda - 1$), so können wir von einer beliebigen Menge $A^{(0)} \in \mathfrak{A}$ ausgehend eine Folge von Mengen $A^{(\lambda)}$ ($\lambda = 1, 2, \ldots$) derart bestimmen, daß $A^{(\lambda+1)} \leqq A^{(\lambda)} \in \mathfrak{A}$ und

$$(12)\qquad q(A^{(\lambda)}, \varphi) \leqq l\left|\frac{\sin\left(\varphi - \varphi_0 \pm \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\varkappa}{2^\lambda}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\varkappa}{2^\lambda}\right)}\right| + \frac{1}{2^\lambda} \qquad (\varkappa = 1, \ldots, 2^\lambda - 1)$$

besteht. Damit sinkt jedoch der Wert von $q(A^{(\lambda)}\varphi)$ mit wachsendem λ für $\varphi \neq \varphi_0$ unter jede angebbare positive Schranke, und es gilt daher für den sicher abgeschlossenen Durchschnitt $\bar{A}$ der abgeschlossenen Mengen $A^{(\lambda)}$:

$$(13)\qquad q(\bar{A}, \varphi_0) = l; \quad q(\bar{A}, \varphi) = 0 \quad (\psi \neq \varphi_0).$$

3. Es lassen sich nun leicht die Abschätzungsmöglichkeiten für das Quermaßintegral bei vorgegebenen Quermaßextremalen diskutieren; wir werden nämlich sofort einsehen, daß außer der trivialen Ungleichung (3) keine weiteren Abschätzungen gültig sein können. Zunächst erweist jede Menge des Typs β, daß ein Analogon zu der für konvexe Bereiche bekannten Ungleichung $U \geqq 2D$ nicht besteht. Alsdann lassen sich bei gleichzeitiger Vorgabe von q_1 und q_2 (Q_1 und Q_2) stets Mengen angeben, für die in (3a) bzw. (3b) links oder rechts Gleichheit eintritt.

Ist A die Vereinigungsmenge einer unter 1. beschriebenen Menge des Typs α des Durchmessers q_1 (Q_1) und einer zu ihr konzentrischen Kreisscheibe des Durchmessers q_2 (Q_2), so tritt für A auf der rechten Seite von (3a) bzw. (3b) Gleichheit ein.

Stellt A hingegen die Vereinigungsmenge zwischen einer Kreisscheibe des Durchmessers q_2 (Q_2) und einer Menge des Typs β dar, so tritt für A in (3a) bzw. (3b) auf der linken Seite Gleichheit ein.

§ 3. Das Maß der Rumpfbereiche.

Die Extremalprobleme für maximales Maß können wir größtenteils gemeinsam behandeln, indem wir die Probleme dadurch auf die Betrachtung konvexer Bereiche zurückführen, daß wir zeigen, daß der innere (äußere) Rumpfbereich einer Menge kein geringeres inneres (äußeres) Maß besitzen kann als die Menge selbst, d. h., daß die Ungleichungen (6) gelten. Wir erweisen das zunächst für Mengen A, die aus endlich vielen konvexen Bereichen $B_\nu (\nu = 1, \ldots, n)$ bestehen, indem wir annehmen, daß (6) für jedes $m \leqq n - 1$ schon erwiesen sei. Da Ungleichung (6) für $n = 1$ zudem bekanntlich richtig ist, bleibt zu zeigen, daß sie unter dieser Voraussetzung noch für n selbst richtig bleibt.

Betrachten wir den Fall, daß einer der Bereiche B_ν verschwindenden Inhalt besitzt, so möge A^* die Menge bezeichnen, die durch Weglassung dieses Bereichs aus A entsteht. A besteht dann aus höchstens $(n - 1)$ Bereichen B_ν und es gilt offenbar:

$$m(A^*) = m(A) \text{ und } m(R'_{A^*}) \leqq m(R'_A),$$

so daß wir aus $m(A') \leqq m(R'_{A^*})$ sofort $m(A) \leqq m(R'_A)$ folgern können.

Enthält A keinen Bereich des Inhalts null, so sei H die kleinste konvexe Hülle von A und $H(t)$ der Parallelbereich zu H im Abstand t nach innen[2]), ferner $A(t)$ der Durchschnitt von A mit $H(t)$ und $n(t)$ die Anzahl der Bereiche $B_\nu(t)$, die $A(t)$ umfaßt. Alsdann sei t_0 dadurch bestimmt, daß $n(t) = n$ für $t \leqq t_0$ und $n(t) < n$ für $t > t_0$ ist.

Wir haben nun die Verringerung des Maßes von $A(t)$ bei dieser Abänderung ins Auge zu fassen. Dazu sei $A'(t)$ die Komplementärmenge zu $A(t)$ auf $H(t)$, und $C(t)$ der Rand von $H(t)$, der in den zu $A(t)$ gehörigen Teil $C^*(t)$ und den $A(t)$ angehörenden Teil $C'(t)$ zerfalle. Für die Abnahme des Maßes von $H(t)$ können wir, ein Ergebnis von G. Bol[3]) benutzend, notieren:

$$m(H) - m(H, t_0) = \int_0^{t_0} u(H, t)\, dt. \tag{14}$$

Auch die Abnahme des Maßes von $A'(t)$ ist leicht anzugeben: Da die keinem $B_\nu(t)$ zugehörigen Teile von $C(t)$ geradlinig verlaufen müssen (Fig. 2), besteht $C'(t)$ aus endlich

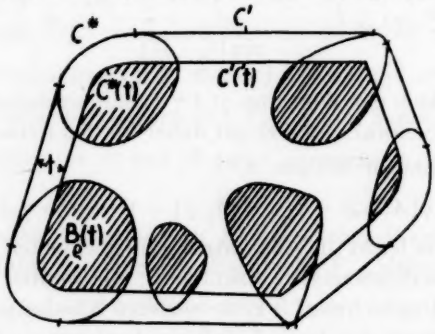


Fig. 2.

[2]) Die Parallelbereiche nach innen werden im Sinne von *G. Bol*, Isoperimetrische Ungleichungen für Bereiche auf Flächen, Jahresber. d. D. M. V. **51** (1941), 219—257, verstanden.

[3]) Siehe a. a. O. [2]) § 2 (7).

vielen geraden Stücken, die sich bei wachsendem t parallel zu sich nach innen verschieben. Damit erhalten wir aber für das Maß $m(A', t_0)$ analog zu (14):

$$m(A') - m(A', t_0) = \int_0^{t_0} L(C', t)\, dt\,. \tag{15}$$

Hierin gibt $L(C', t)$ die Gesamtlänge von $C'(t)$ an.

Für das Maß von $A(t)$ ist durch Differenzbildung wegen

$$m(A, t) = m(H, t) - m(A', t) \text{ und } L(C^*, t) = u(H, t) - L(C', t)$$

aus (14) und (15)

$$m(A) - m(A, t_0) = \int_0^{t_0} L(C^*, t)\, dt \tag{16}$$

zu folgern.

Eine ähnliche Abschätzung läßt sich nun auch noch für $m(R'_A)$ angeben. Wir beachten dazu, daß das Quermaß von A bei der Bildung der Menge $A(t)$ in beliebiger Richtung um wenigstens $2t$ sinkt, so daß wir der Konstruktion von R'_A entnehmen können, daß die Differenz zwischen den Quermaßen von R'_A und $R'_{A(t)}$ in jeder Richtung ebenfalls wenigstens $2t$ beträgt. Dann muß aber der Rumpfbereich $R'_{A(t)}$ von $A(t)$ enthalten sein im Parallelbereich $R'_A(t)$ zu R'_A im Abstand t nach innen:

$$R'_{A(t)} \leqq R'_A(t).$$

Das Gegenstück zu (16) ergibt sich daher in der Form:

$$m(R'_A) - m(R'_{A(t_0)}) \geqq \int_0^{t_0} u(R'_{A(t)})\, dt. \tag{17}$$

Um (16) und (17) zu verknüpfen, zeigen wir noch, daß stets

$$L(C^*, t) \leqq u(R'_{A(t)}) \tag{18}$$

statthat.

Das sehen wir so ein: Mißt $s(\varphi)$ die Bogenlänge von $C^*(t)$ von einem beliebigen Nullpunkt aus, so stellt $\bar{s}(\varphi) = \frac{1}{2}(s(\varphi) + s(\varphi + \pi))$ die Bogenlänge eines konvexen Bereiches mit Mittelpunkt dar, den wir mit $\bar{B}$ bezeichnen. Das Quermaß von $\bar{B}$ läßt sich alsdann durch das Stieltjes-Integral $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |\cos(\varphi - \psi)|\, d\bar{s}(\psi)$ wiedergeben. Da $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |\cos(\varphi - \psi)|\, d\bar{s}(\psi) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |\cos(\varphi - \psi)|\, ds(\psi)$ und das zweite Integral sicher nicht größer ist als das Quermaß $q(A; t, \varphi)$ von $A(t)$, haben wir $q(\bar{B}, \varphi) \leqq q(A; t, \varphi)$. Nun ergibt sich aber aus der Konstruktion des Rumpfbereichs $R'_{A(t)}$, daß er jeden konvexen Bereich enthält, für den diese letzte Beziehung gilt, woraus folgt, daß $\bar{B}$ keinen größeren Umfang als $R'_{A(t)}$ haben kann.

Aus (18) erschließen wir nun, daß für $t = t_0$

$$m(R'_A) - m(A) \geqq m(R'_{A(t_0)}) - m(A, t_0) \tag{19}$$

gilt. Da $A(t_0)$ wenigstens einen Bereich $B_\nu(t_0)$ verschwindenden Inhalts besitzt, gilt $m(R'_{A(t_0)}) \geqq m(A, t_0)$ und daher erst recht: $m(R'_A) \geqq m(A)$.

Nun zur Übertragung auf beliebige Mengen! Wir betrachten dazu zunächst den inneren Rumpfbereich R'_A der beliebigen Menge A, den wir nach dem Approximationssatz (§ 1, 4) durch ein konvexes Polygon P_n mit Mittelpunkt approximieren, dessen Seiten auf erzeugenden Geraden liegen. Dabei sei bei beliebigem $\varepsilon > 0$

$$m(P_n) - m(R'_A) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{20}$$

Haben die n Seiten die Richtungen φ_ν ($\nu = 1, \ldots, n$), so approximieren wir die Normalrisse $A(\varphi_\nu)$ von A durch abgeschlossene lineare Mengen $A'_\nu \leqq A(\varphi_\nu)$, und diese durch Mengen $A^*_\nu \geqq A'_\nu$, die sich aus endlich vielen Intervallen derart zusammensetzen, daß (D der Durchmesser von A)

$$m_1(A, \varphi_\nu) - m_1(A'_\nu) < \frac{\varepsilon}{2nD}, \tag{21}$$

$$m_1(A^*_\nu) = m_1(A, \varphi_\nu) \tag{22}$$

statthat, und betrachten den Durchschnitt A^* der aus den A^*_ν durch jeweilige Translation in der Richtung φ_ν zu erzeugenden Streifenmengen S_ν. Es ist dann $A^*(\varphi_\nu) \leqq A^*_\nu$ und wegen (22) noch $q(A^*, \varphi_\nu) \leqq q(A, \varphi_\nu)$, d. h. aber, es ist R'_{A^*} in P_n enthalten.

Nun ist wegen (21) in jeder Streifenmenge S_ν von A selbst höchstens eine Teilmenge des inneren Maßes $\frac{\varepsilon}{2n}$ nicht enthalten, so daß A bis auf höchstens eine Teilmenge des inneren Maßes $\frac{\varepsilon}{2}$ im Durchschnitt A^* der S_ν enthalten sein muß, und damit gilt:

$$m(A) - m(A^*) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{23}$$

Da nun A^* nach Konstruktion aus endlich vielen konvexen Bereichen besteht und daher $m(R'_{A^*}) \geqq m(A^*)$ gilt, folgert man aus (20) und (23) unter Benutzung von $R'_{A^*} \leqq P_n$:

$$m(R'_A) - m(A) \geqq -\varepsilon \tag{24}$$

und, da $\varepsilon > 0$ beliebig angenommen war, die erste der Ungleichungen (6).

Für den äußeren Rumpfbereich geht man in analoger Weise vor, indem man die entsprechenden Normalrisse $A(\varphi_\nu)$ zunächst durch offene Mengen und diese dann durch Mengen approximiert, die aus endlich vielen Intervallen bestehen.

§ 4. Extremalprobleme für maximales Maß.

Findet die Lösung eines Extremalproblems für maximales Maß bei vorgegebenem Quermaßintegral und Haupt- und Nebenquermaß unter Beschränkung der Betrachtung auf konvexe Bereiche B ihren Niederschlag in einer Ungleichung der Form

$$\Phi(B; q_1; q_2, u, m) \geqq 0,$$

in der Φ eine mit wachsendem q_1, q_2, u monoton zunehmende und mit wachsendem m monoton abnehmende Funktion darstellt, so ist die Übertragung auf beliebige Mengen A mit Hilfe der Rumpfbereiche R'_A und R''_A unmittelbar gegeben. Wegen (5) und (6) findet man nämlich:

$$\Phi(A; q_1, q_2, u, m) \geqq \Phi(R'_A; q_1, q_2, u, m) \geqq 0,$$
$$\Phi(A; Q_1, Q_2, U, M) \geqq \Phi(R''_A; Q_1, Q_2, U, M) \geqq 0.$$

Weiter behalten dann auch wie bei Beschränkung auf konvexe Mengen Extremalbereiche ihre Extremaleigenschaft bei, wobei aber nicht unmittelbar Aussagen darüber gemacht werden können, ob sie die einzigen Träger dieser Eigenschaft bleiben. (Wenn man nicht von Teilmengen des inneren (äußeren) Maßes null absehen will, wird dies auch keineswegs der Fall sein!)

Solche Verhältnisse liegen nun vor bei Vorgabe von:

1. u (U); 3. u und q_2 (U und Q_2);
2. q_1 (Q_1); 4. q_1 und q_2 (Q_1 und Q_2),

da die zugeordneten Funktionen

$$\Phi_1 = u^2 - 4\pi m;\ \Phi_3 = 2uq_2 - \pi q_2^2 - 4m;$$

$$\Phi_2 = \pi q_1^2 - 4m;\ \Phi_4 = q_1^2 \arcsin\frac{q_2}{q_1} + q_2\sqrt{q_1^2 - q_2^2} - 2m$$

den geforderten Monotoniebedingungen genügen und für konvexe Mengen $\Phi_j \geqq 0$ statthat.

Für beliebige Mengen ergeben sich also die Ungleichungspaare[4])

1. $u^2 - 4\pi m \geqq 0, \qquad U^2 - 4\pi M \geqq 0;$

2. $\pi q_1^2 - 4m \geqq 0, \qquad \pi Q_1^2 - 4M \geqq 0;$

3. $$2uq_2 - \pi q_2^2 - 4m \geqq 0,$$
$$2UQ_2 - \pi Q_2^2 - 4M \geqq 0;$$

4. $$q_1^2 \arcsin\frac{q_2}{q_1} + q_2\sqrt{q_1^2 - q_2^2} - 2m \geqq 0,$$
$$Q_1^2 \arcsin\frac{Q_2}{Q_1} + Q_2\sqrt{Q_1^2 - Q_2^2} - 2M \geqq 0.$$

Anders liegen die Verhältnisse bei vorgegebenem u und q_1 (U und Q_1). Hier lehrt ein Beispiel, daß die Ungleichung 1. nicht weiter verschärft werden kann: Für eine Menge des Quermaßintegrals u (U) und des Hauptquermaßes $q_1 > \frac{u}{\pi}\left(Q_1 > \frac{U}{\pi}\right)$, die sich als Vereinigungsmenge eines Kreises des Radius $\frac{u}{2\pi}\left(\frac{U}{2\pi}\right)$ und einer Menge des Typs β darstellen läßt, tritt in 1. nämlich stets Gleichheit ein.

[4]) Für Mengen, die sich aus endlich vielen konvexen Bereichen zusammensetzen, wurden die Ungleichungen 1. bis 3. behandelt von: *G. Szekeres*, Ein Problem über mehrere ebene Bereiche; *B. v. Sz. Nagy*, Über ein geometrisches Extremalproblem; *J. Favard*, Sur le problème traité par G. Szekeres et B. v. Sz. Nagy. Acta Univ. Szeged, Acta Sci. math. **9** (1940), 247—252; 253—257; 258—260.

Eingegangen 22. Mai 1951.

Einige dem Vierscheitelsatz verwandte Sätze über Eilinien.

Von *D. Ohmann* in Frankfurt a. M.

Als Folge eines allgemeinen Satzes über translationsinvariante Linearaggregate der Stützfunktion einer Eilinie werden wir eine Reihe von Sätzen beweisen, die zu dem Vierscheitelsatz in enger Beziehung stehen. Sie beziehen sich dabei in Nr. **2** auf umbeschriebene Polygone und in Nr. **3** auf Teilbogen fester Gesamtkrümmung[1]). Die Nr. **4** bringt schließlich Übertragungen auf Eilinienpaare.

1. Um unsere Sätze in gemeinsamem Rahmen beweisen zu können, betrachten wir für die als hinreichend oft stetig differenzierbar vorauszusetzende Stützfunktion $h(\varphi)$ einer Eilinie C ein Linearaggregat der Form

$$y(\varphi) = \sum_{\mu,\nu} a_{\mu\nu} h^{(\mu)}(\varphi + \alpha_\nu), \tag{1}$$

das von $h(\varphi)$ und seinen ersten m stetigen Ableitungen $h^{(\mu)}(\varphi)$ an den n Stellen $\varphi + \alpha_\nu$ linear abhängt.

Geometrisches Interesse bieten unter solchen Ausdrücken vor allem die, die von der speziellen Wahl des Ursprungs unabhängig, d. h. translationsinvariant sind. Besitzt alsdann $y(\varphi)$ diese Eigenschaft, so wählen wir den Ursprung derart, daß für die Stützfunktion die Relation

$$\int_0^{2\pi} h(\varphi) \sin \varphi \, d\varphi = \int_0^{2\pi} h(\varphi) \cos \varphi \, d\varphi = 0 \tag{2}$$

besteht. Das Gleiche gilt dann auch von $h^{(\mu)}(\varphi)$ und schließlich von $y(\varphi)$, so daß wir formulieren dürfen:

Ist $y(\varphi)$ ein translationsinvariantes Linearaggregat der Stützfunktion $h(\varphi)$, so ist

$$\int_0^{2\pi} y(\varphi) \sin \varphi \, d\varphi = \int_0^{2\pi} y(\varphi) \cos \varphi \, d\varphi = 0. \tag{3}$$

Das Gleiche gilt offenbar auch von kontinuierlichen Linearaggregaten

$$y(\varphi) = \sum_{\mu} \int_0^{2\pi} a_\mu(\psi)\, h^{(\mu)}(\varphi + \psi)\, d\psi. \tag{4}$$

Da aus (3) bekanntlich folgt, daß die Funktion $y(\varphi)$ ihren Mittelwert $\bar{y} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y(\varphi)\, d\varphi$ wenigstens an vier verschiedenen Stellen annimmt und sich diese Zahl bei

$$y(\varphi) + y(\varphi + \pi) = \text{const.}$$

sogar auf sechs erhöht, haben wir den für das Folgende grundlegenden

Satz I. *Ein translationsinvariantes stetiges Linearaggregat der Stützfunktion einer Eilinie* (*mit* $y(\varphi) + y(\varphi + \pi) = \text{const.}$) *nimmt ihren Mittelwert wenigstens vier-* (*sechs-*) *mal an.*

[1]) Die Ergebnisse der Nr. **3** sind dabei allgemein bekannt und haben nur Platz gefunden, um das Gemeinsame an den Problemen hervorzuheben.

2. Wir wenden Satz I zunächst auf umbeschriebene Polygone an. Dazu seien $S(\varphi - \alpha)$, $S(\varphi)$ und $S(\varphi + \beta)$ die Stützgeraden der Eilinie C in den Punkten der äußeren Normalenrichtungen $\varphi - \alpha$, φ, $\varphi + \beta$. Für die Länge $s(\varphi)$ der durch $S(\varphi - \alpha)$ und $S(\varphi + \beta)$ von $S(\varphi)$ herausgeschnittenen Strecke findet man dann:

$$(5) \quad s(\varphi) = \frac{1}{\sin\alpha}\,[h(\varphi - \alpha) - h(\varphi)\cos\alpha] + \frac{1}{\sin\beta}\,[h(\varphi + \beta) - h(\varphi)\cos\beta].$$

$s(\varphi)$ stellt also ein Linearaggregat der Stützfunktion $h(\varphi)$ von C dar, das offenbar translationsinvariant und zudem mit $h(\varphi)$ auch stetig ist. Da in $s(\varphi)$ keine Ableitungen von $h(\varphi)$ enthalten sind, benötigen wir zur Anwendung des Satzes I auf $s(\varphi)$ keinerlei einschränkende Differenzierbarkeitsvoraussetzungen für die Eilinie C.

Nun betrachten wir alle einer Eilinie umbeschriebenen Vierecke $P_4(\varphi)$, mit den festen von φ unabhängigen Eckenwinkeln α_ν, wobei $P_4(\varphi)$ etwa auf die variable Normalenrichtung φ der zwischen den Eckenwinkeln α_1 und α_2 liegenden Seite bezogen sei. Sind dann $s_\nu(\varphi)$ die Längen der Seiten von $P_4(\varphi)$, so ergibt die alternierende Summe

$$(6) \qquad A(\varphi) = s_1(\varphi) - s_2(\varphi) + s_3(\varphi) - s_4(\varphi)$$

wiederum ein translationsinvariantes und stetiges Linearaggregat von $h(\varphi)$, das, wie man (5) entnehmen kann, den Mittelwert null besitzt. Wir haben also wenigstens vier Stellen (wenn C konstante Breite besitzt, sogar sechs Stellen), an denen $A(\varphi)$ verschwindet. Da sich $P_4(\varphi)$ in diesen Stellen bekanntlich als Tangentenviereck eines Kreises ausweist, folgert man unmittelbar:

Satz 1. *Unter allen einer Eilinie (konstanter Breite) umbeschriebenen Vierecken mit vorgegebenen Eckenwinkeln gibt es wenigstens vier (sechs) Kreistangentenvierecke.*

Dieser Satz stellt das Analogon zum Vierscheitelsatz dar, nach dem sich auf jeder stetig gekrümmten Eilinie wenigstens vier Punkte angeben lassen, in denen die Krümmungskreise in mehr als zweiter Ordnung berühren. Es sei noch bemerkt, daß die vier Kreistangentenvierecke paarweise bzw. zu viert zusammenfallen können, wenn wir umbeschriebene Parallelogramme bzw. Rechtecke ins Auge gefaßt hatten.

Ferner: Bei den der Eilinie C umbeschriebenen Polygonen $P_n(\varphi)$ mit n Ecken und festen Eckenwinkeln stellt mit den einzelnen Seitenlängen $s_\nu(\varphi)$ auch deren Summe, d. h. der Umfang $L_n(\varphi)$ von $P_n(\varphi)$ ein stetiges translationsinvariantes Linearaggregat der Stützfunktion $h(\varphi)$ dar. Da sich für den Mittelwert von $L_n(\varphi)$ der Wert $L \cdot \Sigma \operatorname{tg}\frac{\alpha_\nu}{2}$ ergibt ($L =$ Umfang von C, $\alpha_\nu =$ Außenwinkel von $P_n(\varphi)$), folgert man aus Satz I:

Satz 2. *Unter allen einer Eilinie (konstanter Breite) des Umfangs L umbeschriebenen Polygonen mit den fest vorgegebenen Außenwinkeln α_ν gibt es wenigstens vier (sechs), deren Umfang den Wert $L \cdot \Sigma \operatorname{tg}\frac{\alpha_\nu}{2}$ annimmt.*

Wie in Satz 1 können auch hier die ausgezeichneten Polygone paarweise zusammenfallen, wenn die α_ν eine Periodizität: $\alpha_\nu = \alpha_{\nu+p} (p < n)$ aufweisen. Die Mindestzahl derer, die nicht zusammenfallen, bleibt jedoch zwei [2]), wie folgende Betrachtung erhellt: Ist p_0 die kleinste unter den Zahlen p, für die $\alpha_\nu = \alpha_{\nu+p}$ gilt, so ist $\gamma_0 = \sum_1^{p_0} \alpha_\nu$ die kleinste unter den Zahlen γ, für die $P_n(\varphi)$ mit $P_n(\varphi + \gamma)$ zusammenfallen kann. Da $L_n(\varphi)$ dann schon die Periode γ_0 besitzt, muß es auf dem halboffenen Intervall $\langle 0, \gamma_0)$ wenigstens zwei Stellen geben, an denen $L_n(\varphi)$ seinen Mittelwert annimmt, und für die, da sie um weniger als γ_0 auseinanderliegen, die zugehörigen Polygone $P_n(\varphi)$ nicht zusammenfallen können.

---

[2]) Für $\alpha_\nu = \frac{2\pi}{n}$ siehe *R. C. Bose*, A theorem on equiangular convex polygons circumscribing a convex curve, J. Indian math. Soc. (2) **2**, 96—98 (1936).

3. An kontinuierlichen Linearaggregaten tritt uns als einfachstes die Länge der Teilbogen einer Eilinie fester Gesamtkrümmung α entgegen:

$$s_\alpha(\varphi) = \int_{\varphi-\frac{\alpha}{2}}^{\varphi+\frac{\alpha}{2}} h(\psi)\, d\psi + h'\left(\varphi + \frac{\alpha}{2}\right) - h'\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right). \tag{7}$$

Da darin die erste Ableitung der Stützfunktion enthalten ist, setzen wir deren stetige Differenzierbarkeit voraus. Wir finden dann, da das Mittel von $s_\alpha(\varphi)$ den Wert $\frac{\alpha}{2\pi} L$ besitzt (L = Länge der Eilinie):

Satz 3. *Unter allen Teilbogen einer Eilinie (konstanter Breite) der festen Gesamtkrümmung α existieren wenigstens vier (sechs) der Länge $\frac{\alpha}{2\pi} \cdot L$.*

Bezeichnet man $\frac{s_\alpha(\varphi)}{\alpha}$ als mittlere Krümmung des betreffenden Bogens, so ist damit im wesentlichen wieder ein Vierscheitelsatz im Großen ausgesprochen.

Wählt man noch speziell $\alpha = \pi$ und beachtet, daß $s_\pi(\varphi) + s_\pi(\varphi + \pi) = L$ statthat, so findet man noch

Satz 4. *Auf einer Eilinie lassen sich wenigstens drei Paare von Gegenpunkten angeben, die den Umfang hälften.*

4. Ein großer Teil der in Nr. 2 und Nr. 3 gewonnenen Sätze läßt eine Verallgemeinerung zu, indem man sie auf Eilinienpaare überträgt. Es seien dazu C' und C'' zwei Eilinien des Umfangs L' bzw. L'' und $y(C', \varphi)$, $y(C'', \psi)$ die gleichen translationsinvarianten und stetigen Linearaggregate der Stützfunktionen $h(C', \varphi)$ bzw. $h(C'', \varphi)$. Für die Funktion

$$g(\varphi) = \frac{1}{L'}\, y(C', \varphi) - \frac{1}{L''}\, y(C'', \varphi) \tag{8}$$

gilt dann

$$\int_0^{2\pi} g(\varphi)\, d\varphi = \int_0^{2\pi} g(\varphi) \sin\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} g(\varphi) \cos\varphi\, d\varphi = 0. \tag{9}$$

Haben C' und C'' zudem einander homothetische Vektorbereiche, so besteht zusätzlich:

$$\frac{1}{L'}\,[h(C', \varphi) + h(C', \varphi + \pi)] = \frac{1}{L''}\,[h(C'', \varphi) + h(C'', \varphi + \pi)];$$

d. h. aber:

$$g(\varphi) + g(\varphi + \pi) = 0. \tag{10}$$

Wenden wir dann auf die Funktion $g(\varphi)$ den Satz I an, so lassen sich die Sätze 2 bis 4 ohne weiteren Kommentar auf Eilinienpaare übertragen. Die Übertragung von Satz 1 läßt sich damit jedoch noch nicht in sinnvoller Weise durchführen und ist mir bisher auch auf andere Art nicht gelungen.

Wir führen die verallgemeinerten Sätze noch kurz auf:

Satz 2*. *Unter allen zwei Eilinien (mit homothetischen Vektorbereichen) umbeschriebenen Paaren von Polygonen mit einander parallelen Seiten und festen Eckenwinkeln gibt es wenigstens vier (sechs) Paare, deren Umfänge sich zueinander verhalten wie die der zugehörigen Eilinien.*

Satz 3*. *Auf zwei Eilinien (mit homothetischen Vektorbereichen) gibt es unter allen Paaren gleichliegender Bögen fester Gesamtkrümmung wenigstens vier (sechs), deren Längen sich zueinander verhalten wie die Umfänge der Eilinien.*

Satz 4*. *Auf zwei Eilinien existieren wenigstens drei Paare von gleichliegenden Gegenpunktpaaren, die die Umfänge im gleichen Verhältnis teilen.*

Eingegangen 22. Mai 1951.

Sur certains espaces de fonctions holomorphes. II.[1])

Par *Alexandre Grothendieck*, Nancy.

§ 7. Etude topologique des espaces $H(O, E)$.

1. Interprétation de certains théorèmes des paragraphes précedents en termes de produits tensoriels topologiques, et généralisations. Pour toute $\varphi \in P(\Omega_1)$, et $a \in E$, posons

$$\varphi \otimes a(z) = \varphi(z)\, a. \tag{10}$$

Cela définit une application bilinéaire de $P(\Omega_1) \times E$ dans $P(\Omega_1, E)$, et on vérifie immédiatement que cette application est continue. Par suite, toute forme linéaire continue u sur $P(\Omega_1, E)$ définit une forme bilinéaire continue $\tilde{u}$ sur $P(\Omega_1) \times E$ par la formule

$$\tilde{u}(\varphi, a) = u(\varphi \otimes a). \tag{11}$$

Proposition 6. *L'application linéaire naturelle $u \to \tilde{u}$ du dual de $P(\Omega_1, E)$ dans l'espace $\mathfrak{B}(P(\Omega_1) \times E)$ des formes bilinéaires continues sur $P(\Omega_1) \times E$, définie par la formule* (11), *est une application biunivoque sur. Aux parties équicontinues du dual de $P(\Omega_1, E)$ correspondent les parties équicontinues des $\mathfrak{B}(P(\Omega_1) \times E)$.*

En effet, un élément du dual de $P(\Omega_1, E)$ s'identifie, par le théorème 2 bis, à une $\bar{g} \in P(\Omega_2, E')$ ayant localement une image équicontinue; et une forme bilinéaire bicontinue sur $P(\Omega_1) \times E$, ou, ce qui revient au même, une application linéaire de $P(\Omega_1)$ dans E' appliquant un voisinage de l'origine en une partie équicontinue de E', s'identifie (par le théorème 3 et la remarque 1 qui le suit) à une $\bar{h} \in P(\Omega_2, E')$ ayant localement une image équicontinue. Or on vérifie immédiatement qu'avec ces identifications, l'application $u \to \tilde{u}$ définie par (11) est l'identité. Par ailleurs, l'application des critères de la proposition 2 bis du § 4 et de la remarque 2 suivant le théorème 3, montre que les parties équicontinues de $P(\Omega_1, E)'$ et de $\mathfrak{B}(P(\Omega_1) \times E)$ sont les mêmes (noter qu'une partie équicontinue de ce dernier espace revient à un ensemble d'applications linéaires de $P(\Omega_1)$ dans E' qui appliquent un même voisinage de l'origine en une partie équicontinue fixe de E').

Corollaire. *L'ensemble des $\varphi \otimes a$ ($\varphi \in P(\Omega_1)$, $a \in E$) est total dans $P(\Omega_1, E)$.*

Nous exprimerons la proposition 6 en disant que $P(\Omega_1, E)$ est un *produit tensoriel topologique* des espaces $P(\Omega_1)$ et E relativement à l'application bilinéaire $(\varphi, a) \to \varphi \otimes a$. De façon générale, si A, B, C sont trois espaces localement convexes, $(a, b) \to \beta(a, b)$ une application bilinéaire continue de $A \times B$ dans C, on a une application linéaire naturelle $u \to \tilde{u}$ du dual C' de C dans l'espace des formes bilinéaires continues sur $A \times B$, par la formule $\tilde{u}(a, b) = u(\beta(a, b))$. Nous dirons que C est un produit tensoriel topologique de A et B pour l'application β, si $u \to \tilde{u}$ est application *biunivoque sur*, et si aux parties équicontinues de C' correspondent les ensembles équicontinus de formes bilinéaires. Si d'ailleurs on suppose que C est engendré vectoriellement par les éléments de la forme

[1]) La première partie a été publiée dans tome 192 de ce journal.

$\beta(a, b)$, ou si on suppose que C est complet, alors le produit tensoriel topologique est essentiellement unique, dans un sens évident à préciser. Il n'est pas difficile de se convaincre d'ailleurs que si A et B sont donnés arbitrairement, un produit tensoriel topologique existe toujours: on prendra le produit tensoriel *algébrique* ordinaire (c. f. [1]) qu' on munit de la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de l'espace $\mathfrak{B}(A \times B)$ des formes bilinéaires continues sur $A \times B$ (cet espace étant en effet en dualité naturelle avec $A \times B$). En complétant $A \otimes B$ pour cette topologie, on obtient d'ailleurs un produit tensoriel complet, noté $\overline{A \otimes B}$.

L'intérêt de la considération d'un produit tensoriel topologique C pour deux espaces A et B tient en premier lieu au fait suivant facile à démontrer (qui *caractérise* le produit tensoriel topologique si on le suppose complet en plus): Les applications bilinéaires continues de $A \times B$ dans un espace localement convexe complet H correspondent biunivoquement aux applications linéaires continues du produit tensoriel topologique C dans H, par la formule $\tilde{u}(a, b) = u(a \otimes b)$ (où nous avons remplacé $\beta(a, b)$ par la notation $a \otimes b$). Il tient en second lieu au fait que l'on a sous certains hypothèses (notamment si A et B sont des espaces $(\mathfrak{F})$), des théorèmes généraux non triviaux dont l'application dans certains cas particuliers peut être utile. Ainsi, un théorème général relatif aux produits tensoriels topologiques d'espaces $(\mathfrak{F})$, que je ne démontrerai pas ici, permet d'énoncer le corollaire suivant de la proposition 6, qui nous sera utile par la suite:

Proposition 7. *Soit E un espace $(\mathfrak{F})$, O une partie ouverte non vide de Ω distincte de Ω. Alors toute $f \in P(O, E)$ est de la forme*

$$f = \Sigma\, \lambda_i\, \varphi_i \otimes a_i \tag{12}$$

où $(\varphi_i)_i$, $(a_i)_i$ sont des suites tendant vers 0 dans $P(O)$ et E respectivement, et $(\lambda_i)_i$ une suite de nombres positifs avec $\Sigma\, \lambda_i \leqq 1$.

Corollaire. *Si F est un sous-espace vectoriel fermé de E, alors l'application linéaire naturelle de $P(O, E)$ dans $P(O, E/F)$ est une application sur.*

Nous allons donner maintenant un autre corollaire de la proposition 6, impliquant une propriété topologique remarquable des espaces $P(O)$. Soient d'abord A et B deux espaces localement convexes complets. Alors on a un isomorphisme algébrique bien connu $u \to \tilde{u}$ de leur produit tensoriel algébrique $A \otimes B$ dans l'espace des applications linéaires de rang fini du dual algébrique B^* de B dans A. D'ailleurs, ici $\tilde{u}$ sera application faiblement continue (car somme d'applications $\widetilde{a \otimes b}$ qui sont évidemment faiblement continues), donc déterminée déjà par sa valeur sur le sous-espace faiblement dense B' de B^*, de sorte qu'on a en fait un isomorphisme algébrique canonique de $A \otimes B$ dans l'espace des applications linéaires faiblement continues de B' dans A — espace que nous désignons par $\mathfrak{L}(B', A)$. — On vérifie de plus trivialement que quand on munit $\mathfrak{L}(B', A)$ de la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de B', et $A \otimes B$ de sa topologie de produit tensoriel topologique définie plus haut, cette application linéaire est continue. D'ailleurs, il est facile de voir que $\mathfrak{L}_e(B', A)$ (cette notation indiquant l'espace $\mathfrak{L}(B', A)$ topologisé comme on vient de le dire) est complet, de sorte que l'application linéaire $u \to \tilde{u}$ peut se prolonger par continuité en une application linéaire continue du produit tensoriel complet $\overline{A \otimes B}$ dans $\mathfrak{L}_e(B', A)$. Mais en général (par exemple chaque fois semble-t-il que A et B sont des espaces de Banach de dimension infinie), on n'obtient là *ni* un isomorphisme topologique dans, *ni* une application sur. Il existe pourtant certains espaces A tels que quel que soit l'espace localement convexe complet B, l'application précédente est un *isomorphisme topologique sur*. Il résulte d'une généralisation facile de la théorie générale des noyaux-distributions de L. Schwartz (non encore publiée) que tel est

le cas pour certains espaces de fonctions indéfiniment différentiables, notamment les espaces $(\mathfrak{E})$ et $(\mathfrak{S})$ (voir définition dans [9]). Nous donnons plus bas quelques indications sur le cas de l'espace $(\mathfrak{E})$. La même propriété vaut pour les espaces $P(O)$, de façon précise:

Proposition 8. *Soit O un ouvert non vide de la sphère de Riemann Ω. Pour tout espace localement convexe complet E, l'application canonique du produit tensoriel complet $\overline{P(O) \otimes E} = P(O, E)$ dans l'espace $\mathfrak{L}_e(E', P(O))$ des applications linéaires faiblement continues de E' dans $P(O)$, muni de la topologie de la convergence équicontinue, est un isomorphisme sur.*

Moyennant la proposition 6, cette proposition peut se regarder comme cas particulier de la facile proposition 3 (où on prend pour G l'espace E' *muni* de la topologie de Mackey $\tau(E', E)$). Nous appelerons espace nucléaire tout espace qui satisfait à la condition envisagée précédemment. Ainsi, les espaces $(\mathfrak{E})$, $(\mathfrak{S})$, $P(O)$, sont des espaces nucléaires. Nous ferons ailleurs une étude approfondie de ces espaces, incluant aussi les théorèmes que nous allons démontrer directement plus bas. Signalons seulement ici qu'on peut démontrer sans difficulté que le produit tensoriel topologique et le produit topologique de deux espaces nucléaires est encore un espace nucléaire. Beaucoup moins facile sont les résultats suivants: un espace nucléaire est un espace $(\mathfrak{M})$ (c. f. [4]); tout sous-espace vectoriel fermé et tout quotient par un tel sous-espace d'un espace nucléaire est encore nucléaire. Ces résultats ont de nombreuses applications, dont nous signalons la suivante:

On notera que, alors que l'énoncé même des théorèmes fondamentaux 2 et 3 fait intervenir le fait que l'ensemble O sur lequel on considère des fonctions est une partie de la sphère de Riemann Ω, la proposition 6 et ses corollaires propositions 7, 8 gardent un sens pour l'espace des fonctions holomorphes définies sur une variété quelconque, à une ou plusieures dimensions complexes. Mais les théorèmes correspondants pour l'espace de Schwartz $(\mathfrak{E}) = \mathfrak{E}(O)$ construit sur O (espace des fonctions complexes indéfiniment différentiables sur O, avec la topologie de la convergence de la fonction et de chacune de ses dérivées multiples — dérivées définies par des champs de vecteurs indéfiniment différentiables —) se démontrent directement par les méthodes de L. Schwartz sur une variété indéfiniment différentiable quelconque O (voir No **3**). En particulier, $\mathfrak{E}(O)$ est un espace nucléaire. Donc, si O est une variété holomorphe, comme $H(O)$, espace des fonctions holomorphes complexes sur O, est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathfrak{E}(O)$, il est lui-même un espace nucléaire d'après le résultat signalé plus haut. Comme d'autre part l'espace $\mathfrak{L}_e(E', H(O))$ s'identifie toujours, par le même raisonnement élémentaire, à $H(O, E)$, il suit très facilement que les propositions 6, 7 et 8 sont encore valables dans ce cas plus général.

Signalons enfin un dernier résultat, qui découle de la théorie générale des espaces nucléaires, et dont nous aurons besoin par la suite (et que nous admettrons encore, pour ne pas allonger cet exposé):

Proposition 9. *Dans l'énoncé de la proposition 7, si f parcourt une partie convexe cerclée fermée bornée C de $P(O, E)$, on peut supposer les suites $(\lambda_i)_i$ et $(\varphi_i)_i$ fixes, et que les a_i restent dans une partie bornée fixe B de E.*

Corollaire 1. *Si C est une partie bornée de $P(O, E)$, il existe une partie bornée A de $P(O)$, et une partie bornée B de E, telles que C soit contenue dans l'enveloppe convexe cerclée fermée de l'ensemble des $\varphi \otimes a$ $(\varphi \in A, a \in B)$.*

Ce corollaire est, par dualité, équivalent au suivant:

Corollaire 2. *L'isomorphisme canonique du dual de $P(O, E)$ sur l'espace $\mathfrak{B}(P(O) \times E)$ des formes bilinéaires continues sur $P(O) \times E$ défini dans la proposition 6, est un isomorphisme vectoriel topologique quand on munit ces deux espaces de leur topologie forte.* (Par

topologie forte sur $\mathfrak{B}(P(O) \times E)$, nous entendons la topologie de la convergence uniforme sur les produits d'une partie bornée de $P(O)$ par une partie bornée de E.)

Corollaire 3. *Dans l'énoncé du corollaire 1 de la proposition 7, si on suppose que toute partie bornée de E/F est l'image canonique d'une partie bornée de E, alors tout ensemble borné d'applications holomorphes de O dans E/F est image canonique d'un ensemble borné d'applications holomorphes de O dans E.*

Remarque. La proposition 9 peut encore se préciser dans le sens suivant: on peut trouver, pour tout indice i, une application *linéaire* $u \to a_i(u)$ de $\boldsymbol{C} \cdot C$ dans $\boldsymbol{C} \cdot B$, appliquant C dans B, telle que l'on ait pour tout $u \in \boldsymbol{C} \cdot C$:

$$u = \sum_i \lambda_i \varphi_i \otimes a_i(u).$$

Nous n'aurons pas par la suite à nous servir de ce complément à la proposition 9. Mais cette remarque est utile pour déterminer par exemple les applications linéaires bornées d'un espace vectoriel localement convexe F dans $P(O, E)$.

Bien entendu, la proposition 9, ces corollaires et ce qui précède est valable encore pour l'espace $H(O, E)$ construit sur une variété holomorphe quelconque.

2. Parties bornées, compactes et faiblement compactes d'espaces $H(O, E)$. Dans la suite de ce paragraphe, nous considérons l'espace $H(O, E)$ des fonctions holomorphes sur une variété holomorphe quelconque O (à une ou plusieurs dimensions complexes), à valeurs dans l'espace localement convexe E. Pour simplifier les notations, nous supposerons que O est un ouvert de $\boldsymbol{C}^n$, mais cela n'a rien d'essentiel.

On vérifie trivialement que pour que $A < H(O, E)$ soit partie bornée, il faut et il suffit que pour tout compact $K < O$, $\bigcup_{f \in A} f(K)$ soit partie bornée de E. Comme une dérivation est application continue de $H(O, E)$ en lui-même (en supposant $H(O, E)$ stable pour la dérivation — c. f. § 2 —) et transforme donc les bornées en parties bornées, l'ensemble $\bigcup_{f \in A} D^p f(K)$ sera partie bornée de E quel que soit l'indice de dérivation multiple $p = (p_1, \ldots, p_n)$ définissant l'opérateur de dérivation multiple D^p, et quel que soit le compact $K < O$.

Théorème 5 (Théorème de Montel). *Soit A une partie bornée de $H(O, E)$. Alors*

a) *A est un ensemble équicontinu d'applications de O dans E, donc sur A la topologie (resp. la structure uniforme) de la convergence compacte est identique à la topologie (resp. la structure uniforme) de la convergence simple, et même de la convergence simple dans une partie dense de O.*

b) *Toute application de O dans E qui est limite simple d'applications éléments de A est holomorphe — et appartient par suite à l'adhérence de A dans $H(O, E)$.*

c) *Pour que la partie A de $H(O, E)$ soit relativement compacte (resp. précompacte) il faut et il suffit qu'elle soit bornée, et que pour tout $z \in O$, l'ensemble des $f(z)$ $(f \in A)$ soit relativement compact (resp. précompact) dans E.*

Demonstration. a) L'équicontinuité de A resulte de la formule des accroissements finis:

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = \int_0^1 \left(\sum_i h_i \frac{\partial f}{\partial z_i} (z_0 + th) \right) dt$$

où on pose $h = (h_i)_{1 \leq i \leq n}$, $z = (z_i)_{1 \leq i \leq n}$. Posons $\| h \| = \operatorname{Sup}_i | h_i |$, soit $\| z - z_0 \| \leqq r$ une boule contenu dans O. On a pour $\| h \| \leqq r$

$$f(z_0 + h) - f(z_0) \in \| h \| \cdot K,$$

où K_f désigne la somme des enveloppes convexes cerclées fermées des ensembles de valeurs prises respectivement par $\frac{\partial f}{\partial z_i}(z)$ dans la boule $\|z - z_0\| \leqq r$. Mais A étant borné, les K_f restent dans un borné fixe K de E, d'où $f(z_0 + h) - f(z_0) \in \|h\| \cdot K$ pour $\|h\| \leqq r$, $f \in A$, d'où aussitôt l'équicontinuité de A. — On notera que la démonstration résulte en fait de ce que $H(O, E)$ est sous-espace vectoriel topologique de l'espace $\mathfrak{E}^1(O, E)$ des applications continûment différentiables f de O dans E, muni de la topologie de la convergence uniforme de f et de ses dérivées partielles du premier ordre. — La démonstration supposait implicitement que les $\frac{\partial f}{\partial z_i}(z)$ étaient dans E, mais c'est évidemment licite, autrement il suffirait comme d'habitude de compléter E.

b) De a) resulte que si f est limite simple d'applications éléments de A, elle en est aussi limite uniforme sur tout compact. De là résulte aussitôt qu'elle est holomorphe, car il est trivial de vérifier que toute application de O dans E qui est limite uniforme sur tout compact de fonctions holomorphes est elle-même holomorphe (on se ramène par exemple immédiatement au cas scalaire).

c) En passant au complété $\hat{E}$ de E, et en considérant comme d'habitude $H(O, E)$ comme sous-espace vectoriel topologique de l'espace *complet* $H(O, \hat{E})$, on est ramené à démontrer le critère de compacité relative dans $H(O, E)$, le critère de précompacité en résultera aussitôt. Mais le premier est conséquence immédiate du théorème de Tychonoff et de a) et b).

Corollaire 1. *Pour que dans $H(O, E)$, les parties bornées soient relativement compactes, il faut et il suffit qu'il en soit de même dans E. En particulier, $H(O, E)$ est un espace $(\mathfrak{M})$ si et seulement si E l'est* (c. f. [4] pour la définition des espaces $(\mathfrak{M})$).

La topologie d'une partie compacte A de $H(O, E)$ est identique à toute topologie séparée moins fine sur A. Soit σ une partie de O telle que toute fonction holomorphe *complexe* dans O qui s'annule sur σ soit nulle (il suffit par exemple que σ soit dense dans O, ou que, O étant connexe et à *une* dimension complexe, σ ait un point d'accumulation dans O): nous dirons alors que σ est analytiquement dense dans O. Alors deux fonctions éléments de $H(O, E)$ qui coïncident sur σ sont identiques, et par suite sur $H(O, E)$ la topologie de la convergence simple dans σ est séparée. Elle est évidemment moins fine que la topologie de $H(O, E)$, et induit par suite sur A la même topologie que $H(O, E)$. En passant au complété de E, ceci s'étend de façon évidente aux parties précompactes de $H(O, E)$. De plus, tout ce que nous venons de dire est encore vrai pour les structures uniformes. En résumé, on obtient le

Corollaire 2 (Théorème de Vitali). *Soit A partie bornée de $H(O, E)$, telle que pour tout $z \in O$, l'ensemble des $f(z)$ $(f \in A)$ soit partie précompacte de E. Soit σ une partie analytiquement dense de O. Alors sur A, la structure uniforme induite par $H(O, E)$ est identique à la structure uniforme de la convergence simple dans σ. Si on suppose les ensembles $A(z)$ même relativement compacts dans E, et si $\mathfrak{F}$ est un filtre dans A tel que $f(z)$ tende vers une limite suivant $\mathfrak{F}$ pour tout $z \in \sigma$, alors $\mathfrak{F}$ converge uniformément sur tout compact vers une fonction holomorphe $g \in H(O, E)$.*

En remarquant que toute partie bornée de E est faiblement précompacte, on obtiendrait un énoncé valable pour *toutes* les parties bornées de $H(O, E)$, que nous laissons au lecteur le soin d'énoncer. Nous obtiendrons un résultat bien plus précis avec le théorème 7 du No 2.

Un critère de faible compacité dans $H(O, E)$ tout analogue au théorème de Montel est le

Théorème 6. *Pour qu'une partie A de $H(O, E)$ soit faiblement relativement compacte, il faut et il suffit qu'elle soit bornée, et que pour tout $z \in O$, l'ensemble des $f(z)$ $(f \in A)$ soit partie faiblement relativement compacte E.*

La condition est évidemment nécessaire, car pour tout $z \in O$, $f \to f(z)$ est application linéaire continue de $H(O, E)$ dans E, transformant donc parties faiblement relativement compactes en parties faiblement relativement compactes. Pour voir qu'elle est suffisante, il suffit de montrer que A est partie faiblement relativement compacte de l'espace $C(O, E)$ des applications continues de O dans E, muni de la topologie de la convergence compacte (en effet, $H(O, E)$ est un sous-espace *fermé* de cet espace). Mais cela résulte du lemme suivant, ayant son intérêt propre (et qui est corollaire du th. 5 et th. 7 a) de mon article [6]):

Lemme 1. *Soit O un espace topologique, E un espace vectoriel localement convexe, $C(O, E)$ l'espace des applications continues de O dans E, muni de la topologie de la convergence compacte. Une partie A de $C(O, E)$ est faiblement relativement compacte si et seulement si elle satisfait aux trois conditions suivantes:*

a) *A est bornée.*

b) *Pour tout $z \in O$, l'ensemble des $f(z)$ $(f \in A)$ est partie faiblement relativement compacte de E.*

c) *Toute application de O dans E faible qui est limite simple d'applications éléments de A, est continue.*

(Remarquer que la conjonction de b) et c) signifie évidemment — en vertu du théorème de Tychonoff — que A est relativement compact dans $C(O, E_f)$ pour la topologie de la convergence simple, E_f désignant E muni de la topologie faible). — Dans les conditions du théorème 6, les trois conditions qui précèdent sont automatiquement vérifiées (c) resultant du théorème 5b)).

Corollaire. *Pour que $H(O, E)$ soit semi-réflexif, il faut et il suffit que E le soit.*

La suffisance est un cas particulier du théorème 6. La nécessité résulte de ce que E est isomorphe à un sous-espace fermé de $H(O, E)$.

Au numéro suivant, nous obtiendrons une autre démonstration du théorème 6, donnant en même temps un résultat plus précis (théorème 7).

3. Quelques propriétés auxiliaires des espaces $\mathfrak{E}(O, E)$. Soit O un ouvert de $\boldsymbol{R}^n$, on désignera par $\mathfrak{E}(O, E)$ l'espace des applications $f(\xi)$ de O dans E telles que pour tout $x' \in E'$, $\langle f(\xi), x' \rangle$ soit fonction indéfiniment différentiable dans O. Nous avons déjà remarqué (voir note du bas de la page 39) que cela implique que f est fortement continue et si E est complet, que f est fortement indéfiniment différentiable. De toutes façons, f peut être regardée comme application fortement indéfiniment différentiable à valeurs dans le complété $\hat{E}$ de E. — Si E est complet, nous munirons $\mathfrak{E}(O, E)$ de la topologie de la convergence compacte de f et de chacune de ses dérivées, c'est alors un espace vectoriel localement convexe complet. Si E n'est pas complet, on munit $\mathfrak{E}(O, E)$ de la topologie induite par $\mathfrak{E}(O, \hat{E})$. L'espace $\mathfrak{E}(O, E)$ est complet, ou métrisable, si et seulement si E l'est, c'est donc un espace $(\mathfrak{F})$ si et seulement si E l'est.

Si $\boldsymbol{R}^n$ est un espace $\boldsymbol{C}^m$, alors l'espace $H(O, E)$ est un sous-espace vectoriel topologique de $\mathfrak{E}(O, E)$. Les théorèmes concernant $H(O, E)$ qui vont suivre ont avantage à être démontrés en faisant usage de ce fait, l'espace $\mathfrak{E}(O, E)$ étant mieux connu que $H(O, E)$. Une méthode plus directe serait il est vrai possible car on pourrait appliquer des théorèmes généraux sur les espaces nucléaires, théorèmes dont les démonstrations sont d'ailleurs tout analogues à celles que nous donnons ici.

Nous aurons surtout besoin du résultat suivant, dû essentiellement à L. Schwartz:

Lemme 2. *Soit O un ouvert de $\boldsymbol{R}^n$, E un espace localement convexe, soit $p = (p_1, \ldots, p_n)$ un indice de dérivation multiple, et F_p une application faiblement continue et à support compact de O dans une partie équicontinue de E'.*

a) *Pour toute $f \in \mathfrak{E}(O, E)$, $\langle D^p f(\xi), F_p(\xi)\rangle$ est alors une fonction continue de ξ, et si on pose*

$$\langle f, \Phi_p\rangle = \int_O \langle D^p f(\xi), F_p(\xi)\rangle \, d\xi \tag{1}$$

la forme linéaire Φ_p de f ainsi définie est continue.

b) *Réciproquement, toute forme linéaire continue sur $\mathfrak{E}(O, E)$ est somme d'un nombre fini de formes φ_p du type précédent, où les F_p peuvent même être choisies fortement continues.*

c) *Si, pour p donné, on se donne un ensemble M_p d'applications F_p faiblement continues de O dans une partie équicontinue fixe V^0 de E' s'annulant en dehors du compact fixe $K < O$, alors l'ensemble M'_p des formes linéaires correspondantes sur $\mathfrak{E}(O, E)$ est équicontinu. Réciproquement, tout ensemble équicontinu de formes linéaires sur $\mathfrak{E}(O, E)$ est contenu dans la somme d'un nombre fini d'ensembles M'_p du type précédent, où pour tout p l'ensemble M_p des fonctions F_p peut même être choisi fortement équicontinu.* (Par *somme* de deux ensembles A et B, nous entendons l'ensemble des $a + b$ pour $a \in A$ et $b \in B$).

Nous ne donnerons pas ici la démonstration de ce lemme, qui résulte de la caractérisation donnée dans [9] des parties bornées de l'espace de distributions $\mathfrak{E}'(O)$, dual de $\mathfrak{E}(O)$. Notons seulement en passant que la démonstration prouve même que, si on fait correspondre à toute forme linéaire continue Φ sur $\mathfrak{E}(O, E)$ la forme bilinéaire continue $\Phi(\varphi \otimes x)$ sur $\mathfrak{E}(O) \times E$ ($\varphi \otimes x$ désignant l'application bilinéaire continue naturelle de $\mathfrak{E}(O) \times E$ dans $\mathfrak{E}(O, E)$, analogue à l'application bilinéaire $H(O) \times E \to H(O, E)$ définie au No **1**), l'application linéaire du dual $\mathfrak{E}(O, E)'$ de $\mathfrak{E}(O, E)$ dans l'espace $\mathfrak{B}(\mathfrak{E}(O) \times E)$ des formes bilinéaires continues sur $\mathfrak{E}(O) \times E$, est un isomorphisme sur, qui identifie les parties équicontinues de $\mathfrak{E}(O, E)'$ et celles de $\mathfrak{B}(\mathfrak{E}(O) \times E)$. En d'autres termes, avec la terminologie introduite au § 7, No **1**, $\mathfrak{E}(O, E)$ *est un produit tensoriel topologique de* $\mathfrak{E}(O)$ *et de* E.

D'autre part, supposant pour fixer les idées que E est un espace $(\mathfrak{F})$ il est très facile de montrer que les applications linéaires faiblement continues u de E' dans $\mathfrak{E}(O)$ correspondent biunivoquement aux éléments f de $\mathfrak{E}(O, E)$ grâce à la formule $u \cdot x'(\xi) = \langle f(\xi), x'\rangle$. Par suite la proposition analogue à la proposition 7 du § 5 est valable ici. En d'autres termes, avec la terminologie introduite au § 7 No **1**, $\mathfrak{E}(O)$ *est un espace nucléaire* — comme nous l'avions déjà annoncé.

La définition de la topologie de $\mathfrak{E}(O, E)$ et l'énoncé du lemme 2 se modifient de façon évidente si on suppose que O est une variété indéfiniment différentiable quelconque au lieu d'un ouvert d'un espace $\boldsymbol{R}^n$. Pour ne pas encombrer inutilement nos notations, nous nous restreindrons pourtant à ce cas.

Le lemme 2, conjugué avec le théorème de Hahn-Banach, donne aussi un théorème de structure analogue pour les ensembles équicontinus de formes linéaires sur les sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{E}(O, E)$, et en particulier pour les ensembles équicontinus de formes linéaires sur $H(O, E)$, si $\boldsymbol{R}^n$ est un espace $\boldsymbol{C}^m$. Nous nous dispensons de répéter l'énoncé pour ce cas.

Du lemme 2, on déduit le

Théorème 7. *Soit A une partie bornée de $\mathfrak{E}(O, E)$, E_f l'espace E muni de sa topologie faible, σ une partie dense de O. Alors toutes les topologies suivantes sur A, (ou les structures uniformes correspondantes), sont identiques:*

a) *Topologie induite par $\mathfrak{E}(O, E_f)$ muni de la topologie de la convergence simple dans σ (ou de la topologie de la convergence simple, ou de la topologie de la convergence compacte).*

b) *Topologie induite par $\mathfrak{E}(O, E_f)$ (avec sa topologie usuelle: convergence compacte de la fonction et de toutes ses dérivées).*

c) *Topologie induite par la topologie faible de $\mathfrak{E}(O, E)$.*

De plus, toute application de O dans E qui est adhérente à A pour la topologie de la convergence simple, est élément de $\mathfrak{E}(O, E)$.

Démonstration. On peut évidemment supposer A convexe cerclé fermé. Alors il suffit de démontrer l'identité des topologies envisagées, l'identité des structures uniformes correspondantes en résulte aussitôt en raison du résultat général que voici, et dont la vérification est évidente: Soit $\mathfrak{E}$ un espace vectoriel, A une partie convexe cerclée de $\mathfrak{E}$, T_1 et T_2 deux topologies localement convexes sur E. Pour que T_1 et T_2 induisent sur A la même structure uniforme, il suffit déjà qu'elles induisent le même système de voisinages de 0.

Il est d'autre part évident que la topologie b) est plus fine que la plus fine des topologies envisagées dans a). Montrons que réciproquement la moins fine de ces dernières est déjà identique à la topologie b). Enonçons d'abord un lemme, analogue au théorème 5, et se démontrant de façon identique:

Lemme 3. a) *La partie A de $\mathfrak{E}(O, E)$ est bornée si et seulement si pour tout indice de dérivation multiple p et tout compact $K \subset O$, l'ensemble $\bigcup_{f \in A} D^p f(K)$ est partie bornée de E. Une telle partie de $\mathfrak{E}(O, E)$ est un ensemble équicontinu d'applications de O dans E.*

b) *Pour que $A \subset \mathfrak{E}(O, E)$ soit relativement compacte (resp. précompacte) il faut et il suffit qu'elle soit bornée, et que pour tout $\xi \in O$, et tout indice de dérivation multiple p, l'ensemble des $D^p f(\xi)$ (où $f \in A$) soit partie relativement compacte (resp. précompacte) de E.*

Il suit aussitôt comme pour le corollaire 2 du théorème 5, que si A est partie précompacte de $\mathfrak{E}(O, E)$ — donc partie relativement compacte de l'espace complet $\mathfrak{E}(O, \hat{E})$, où $\hat{E}$ désigne le complété de E — la topologie induite par $\mathfrak{E}(O, E)$ est identique à la topologie de la convergence simple dans une partie dense σ de O. Le fait que la topologie b) de l'énoncé du théorème 7 soit identique à la topologie induite par $\mathfrak{E}(O, E_f)$ muni de la convergence simple dans σ, est un cas particulier de ce qui précède, car en vertu du lemme 3, A sera bien une partie précompacte de $\mathfrak{E}(O, E_f)$ (toute partie bornée de E_f étant en effet faiblement précompacte).

Donc, les topologies dans a) et la topologie b) sont identiques. De plus, il est évident que la topologie c) est plus fine que la topologie de la convergence simple dans $\mathfrak{E}(O, E_f)$ car pour tout $\xi \in O$, et tout $x' \in E'$, la forme linéaire $\varepsilon_{\xi, x'}(f) = \langle f(\xi), x' \rangle$ sur $\mathfrak{E}(O, E)$ est continue. Tout revient donc à montrer que la topologie b) est plus fine que la topologie c). Soit donc $f \in A$, $\mathfrak{F}$ le filtre de ses voisinages dans la topologie induite par $\mathfrak{E}(O, E_f)$, il faut montrer que pour toute forme linéaire continue Φ sur $\mathfrak{E}(O, E)$, on a $\langle f, \Phi \rangle = \lim_{\mathfrak{F}} \langle g, \Phi \rangle$

Mais en vertu du lemme 2, Φ est somme de formes Φ_p du type

$$\langle g, \Phi_p \rangle = \int_O \langle D^p g(\xi), F_p(\xi) \rangle \, d\xi$$

où $F_p(\xi)$ est application *fortement* continue, à support compact $K \subset O$, de O dans une partie équicontinue de E'. On est donc ramené au cas où Φ est de cette forme simple, il faut donc montrer que

$$\lim_{\mathfrak{F}} \int_O \langle D^p g(\xi), F_p(\xi) \rangle \, d\xi = \int_O \langle D^p f(\xi), F_p(\xi) \rangle \, d\xi .$$

Il suffit pour ce de démontrer que la fonction complexe $\xi \to \langle D^p g(\xi), F_p(\xi) \rangle$, variable avec g, tend suivant $\mathfrak{F}$ uniformément sur K vers la fonction $\langle D^p f(\xi), F_p(\xi) \rangle$. Cela se

vérifie en effet aussitôt: soit M l'adhérence de $\bigcup_{g \in A} D^p g(K)$, et $N = F_p(K)$; M est une partie bornée de E, N une partie *fortement* compacte de E', donc sur M la topologie faible est plus fine que la topologie de la convergence uniforme sur N. Mais si $g \to f$ suivant $\mathfrak{F}$, $D^p g(\xi)$ tend vers $D^p f(\xi)$ faiblement, et uniformément quand ξ parcourt K, donc $\langle D^p g(\xi), x' \rangle \to \langle D^p f(\xi), x' \rangle$ uniformément pour $\xi \in K$, $x' \in N$, d'où le résultat voulu.

Enfin, la dernière partie du théorème 7 se démontre de façon évidente grâce au lemme 3.

Corollaire 1. *Pour que la partie A de $\mathfrak{E}(O, E)$ soit relativement faiblement compacte, il faut et il suffit que A soit borné, et que pour tout $\xi \in O$, l'ensemble des $f(\xi)$ $(f \in A)$ soit partie faiblement relativement compacte de E.*

Corollaire 2. *Pour que $\mathfrak{E}(O, E)$ soit semi-réflexif, il faut et il suffit que E le soit.*

Le théorème 7 et ses corollaires s'appliquent aussitôt aux sous-espaces vectoriels fermés de $\mathfrak{E}(O, E)$, et en particulier aux espaces du type $H(O, E)$. On réobtient ainsi le théorème 6 du numéro précédent. Il est bon de noter que le théorème 7 est assez spécial à la nature particulière des formes linéaires continues sur $\mathfrak{E}(O, E)$. Ainsi, il est facile de définir des parties bornées et équicontinues d'un espace $C(O, E)$, — E étant par exemple un espace de Banach — (cf. lemme 1 ci-dessus), où même la convergence simple n'implique pas la convergence faible.

4. Bidual d'espaces $\mathfrak{E}(O, E)$ et $H(O, E)$. Espaces $\mathfrak{E}(O, E)$ et $H(O, E)$ distingués. Soit M un espace localement convexe, M' son dual fort. On appelle bidual de M ([4]) le dual M'' de M'. Si M'^* désigne le dual algébrique de M', M s'identifie à un sous-espace vectoriel de M'^*, et il résulte aussitôt du théorème des bipolaires que M'' est la réunion des adhérences faibles dans M'^* des parties bornées de M (théorème de Mackey). — Nous munirons toujours M'' de la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de M', topologie qui induit sur M la topologie donnée de M. On voit par polarité qu'un système fondamental de voisinages de l'origine dans M'' est formé par les adhérences faibles dans M'' des voisinages de l'origine dans M.

Soit N un autre espace vectoriel localement convexe, u une application linéaire continue de N dans M. On vérifie trivialement que l'application bitransposée u'' de u — application de N'' dans M'' — est continue pour les topologies précédentes, et que si u est un isomorphisme topologique dans, il en est de même de u''[2]). Donc le bidual d'un sous-espace vectoriel N de M s'identifie à un sous-espace vectoriel topologique de M''.

Soit maintenant O un ouvert de $\mathbf{R}^n$, E un espace localement convexe, E'' son bidual. $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}(O, E)$ s'identifie à un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{E}(O, E'')$. Nous allons prolonger la dualité entre $\mathfrak{E}$ et $\mathfrak{E}'$ en une dualité entre $\mathfrak{E}(O, E'')$ et $\mathfrak{E}'$, de la façon suivante. Soit Φ une forme linéaire continue sur $\mathfrak{E}$, on aura donc $\Phi = \sum_{|p| \leq m} \Phi_p$, où Φ_p est donnée par

$$(1) \qquad \langle f, \Phi_p \rangle = \int_O \langle D^p f(\xi), F_p(\xi) \rangle \, d\xi,$$

F_p satisfaisant aux conditions du lemme 2. Mais l'intégrale du second membre garde un sens si $f \in \mathfrak{E}(O, E'')$, car en vertu du fait que F_p est fortement continue, la fonction à intégrer, $\langle D^p f(\xi), F_p(\xi) \rangle$, est fonction continue de ξ. De plus, en vertu de la partie facile a) du lemme 2, appliqué à l'espace $\mathfrak{E}(O, E'')$, la forme linéaire ainsi définie sur $\mathfrak{E}(O, E'')$ est continue, donc aussi la forme linéaire

$$(2) \qquad f \to \sum_p \int_O \langle D^p f(\xi), F_p(\xi) \rangle \, d\xi.$$

---

[2]) Mais on fera attention que l'application bitransposée d'un homomorphisme sur peut ne pas être un homomorphisme sur, même si M et N sont des espaces $(\mathfrak{F})$.

Montrons que cette dernière ne dépend que de Φ, et non de la manière dont Φ est représentée à l'aide de fonctions F_p. Montrons d'abord qu'il en est ainsi chaque fois que f est de la forme $\varphi \otimes a$, où $\varphi \in \mathfrak{E}(O)$, $a \in E''$. En effet, montrons qu'on a alors

$$\sum_p \int_O \langle D^p f(\xi),\ F_p(\xi)\rangle\, d\xi = \lim_{\mathfrak{F}} \langle \varphi \otimes x, \Phi\rangle$$

où $\mathfrak{F}$ est un filtre sur une partie bornée A de E qui converge faiblement vers a. En effet, on a $\langle \varphi \otimes x, \Phi\rangle = \sum_p \int_O \langle D^p(\varphi \otimes x)\ (\xi), F_p(\xi)\rangle\, d\xi$ il suffit de noter alors que pour tout indice p, la fonction $\langle D^p(\varphi \otimes x)\ (\xi), F_p(\xi)\rangle$ tend uniformément sur O vers la fonction $\langle D^p(\varphi \otimes a)\ (\xi), F_p(\xi)\rangle$ — comme il résulte aussitôt du fait que $F_p(O)$ est partie fortement compacte de E', par le même raisonnement élémentaire que dans la démonstration du théorème 7.

Ainsi, l'expression (2) ne dépend que de la forme Φ chaque fois que f est du type $\varphi \otimes a$. Mais les combinaisons linéaires des $\varphi \otimes a$ sont denses dans $\mathfrak{E}(O, E'')$ — fait qui se démontre élémentairement, mais qui est aussi contenu dans le théorème, rappelé plus haut, affirmant qu'un espace $\mathfrak{E}(O, M)$ est un produit tensoriel topologique de $\mathfrak{E}(O)$ et de M. Comme l'expression (2) est forme linéaire *continue* de $f \in \mathfrak{E}(O, E'')$, il suit que quel que soit $f \in \mathfrak{E}(O, E'')$, sa valeur sur f ne dépend que de la forme Φ sur $\mathfrak{E}(O, E)$.

Par suite: toute $\Phi \in \mathfrak{E}'$ définit une forme linéaire continue sur $\mathfrak{E}(O, E'')$ grâce à la formule (2), forme que nous noterons $\bar{\Phi}$. $\langle f, \bar{\Phi}\rangle$ est manifestement une forme bilinéaire sur $\mathfrak{E}(O, E'') \times \mathfrak{E}'$. Donc, toute $f \in \mathfrak{E}(O, E'')$ définit une forme linéaire $\Phi \to \langle f, \bar{\Phi}\rangle$ sur $\mathfrak{E}'$, que nous désignerons par $\bar{f}$. Nous avons ainsi défini une application linéaire $f \to \bar{f}$ de $\mathfrak{E}(O, E'')$ dans $\mathfrak{E}'^*$, prolongeant l'application canonique de $\mathfrak{E}$ dans $\mathfrak{E}'^*$. D'ailleurs, de la partie c) du lemme 2) il résulte aussitôt que les formes $\bar{f}$ sont bornées sur les parties équicontinues de $\mathfrak{E}'$. Nous allons prouver maintenant le

Théorème 8. a) *L'application linéaire naturelle définie ci-dessus de $\mathfrak{E}(O, E'')$ dans le dual algébrique $\mathfrak{E}'^*$ du dual $\mathfrak{E}'$ de $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}(O, E)$ est un isomorphisme vectoriel topologique dans l'espace des formes linéaires sur $\mathfrak{E}'$ bornées sur les parties équicontinues, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de $\mathfrak{E}'$.*

b) *L'image de $\mathfrak{E}(O, E'')$ par l'application précédente contient le bidual $\mathfrak{E}''$ de $\mathfrak{E}$, de sorte que $\mathfrak{E}''$ s'identifie à un sous-espace vectoriel topologique de $\mathfrak{E}(O, E'')$. Ce sous-espace est dense dans $\mathfrak{E}(O, E'')$.*

c) *Si E est un espace $(\mathfrak{F})$, l'isomorphisme précédent de $\mathfrak{E}''$ dans $\mathfrak{E}(O, E'')$ est un isomorphisme sur.*

Démonstration. a) Il est d'abord immédiat que l'application $f \to \bar{f}$ est continue. Il revient en effet au même de dire que si Φ parcourt une partie équicontinue de $\mathfrak{E}'$, l'ensemble des formes linéaires $f \to \langle \bar{f}, \Phi\rangle$ sur $\mathfrak{E}(O, E'')$ est équicontinu. Or $\langle \bar{f}, \Phi\rangle$ est donné par la formule (2), et notre assertion résulte alors immédiatement des conditions nécessaires et suffisantes du lemme 2c). — Dire que de plus $f \to \bar{f}$ est un isomorphisme topologique, signifie que pour tout voisinage U de l'origine dans $\mathfrak{E}(O, E'')$, existe une partie équicontinue M de $\mathfrak{E}'$, telle que

$$|\langle \bar{f}, \Phi\rangle| \leqq 1 \text{ pour toute } \Phi \in M \text{ implique } f \in U.$$

Mais un système fondamental de voisinages de l'origine dans $\mathfrak{E}(O, E'')$ est obtenu en prenant les ensembles $U(K, B, m)$ définis à l'aide d'un compact $K \subset O$, d'une partie équicontinue B de E' et d'un entier $m > 0$ par la formule

$$f \in U(K, B, m) \Longleftrightarrow D^p f(K) \subset B^0 \text{ (polaire de } B \textit{ dans } E'\text{)}, \text{ pour } |p| \leqq m$$

i. e. $|\langle D^p f(\xi), x'\rangle| \leqq 1$ pour $\xi \in K$, $x' \in B$, $|p| \leqq m$. On peut donc supposer U de la forme $U(K, B, m)$. Pour tout $\xi \in O$, $x' \in E'$, et tout indice de dérivation multiple p,

soit $\varepsilon^p_{\xi,x'}$ l'élément de $\mathfrak{E}'$ défini par $\langle f, \varepsilon^p_{\xi,x'}\rangle = \langle D^p f(\xi), x'\rangle$. Montrons que si f est élément de $\mathfrak{E}(O, E'')$, on a encore

$$\langle \bar{f}, \varepsilon^p_{\xi,x'}\rangle = \langle D^p f(\xi), x'\rangle. \tag{3}$$

Alors nous pourrons prendre pour M l'ensemble des $\varepsilon^p_{\xi,x'}$ ($\xi \in K$, $x' \in B$, $|p| \leqq m$) qui est manifestement une partie équicontinue de $\mathfrak{E}'$; M étant ainsi choisi, il résultera bien de (3) que $|\langle \bar{f}, \varphi\rangle| \leqq 1$ pour toute $\Phi \in M$ implique $f \in U = U(K, B, m)$.

Reste à démontrer (3). Considérons la forme linéaire continue ε^p_ξ sur l'espace $\mathfrak{E}(O)$, définie par $\langle \varphi, \varepsilon^p_\xi\rangle = D^p_\varphi(\xi)$. D'après un théorème de L. Schwartz (cas particulier du lemme 2), cette forme linéaire sera de la forme

$$D^p\varphi(\xi) = \langle \varphi, \varepsilon^p_\xi\rangle = \sum_{|q|\leqq m} \int_O D^q\varphi(\eta)\, \psi_q(\eta)\, d\eta \tag{4}$$

où les ψ_q sont des fonctions complexes continues sur O, à support compact. Pour $f \in \mathfrak{E}(O, E)$, considérons la fonction $\eta \to \langle f(\eta), x'\rangle$, c'est un élément φ_f de $\mathfrak{E}(O)$. On a en vertu de (4)

$$\langle f, \varepsilon^p_{\xi,x'}\rangle = \langle \varphi_f, \varepsilon^p_\xi\rangle = \sum_{|q|\leqq m} \int_O \langle D^q f(\eta), x'\rangle\, \psi_q(\eta)\, d\eta = \sum_{|q|\leqq m} \int_O \langle D^q f(\eta), F_q(\eta)\rangle\, d\eta$$

en posant $F_q(\eta) = \psi_q(\eta)\, x'$. Par définition, on a donc, pour $f \in \mathfrak{E}(O, E'')$

$$\langle \bar{f}, \varepsilon^p_{\xi,x'}\rangle = \sum_{|q|\leqq m} \int_O \langle D^q f(\eta), F_q(\eta)\rangle\, d\eta = \sum_{|q|\leqq m} \int_O \left(D^q \langle f(\eta), x'\rangle\right) \psi_q(\eta)\, d\eta$$

d'où, en vertu de (4) appliqué à la fonction $\eta \to \langle f(\eta), x'\rangle$

$$\langle \bar{f}, \varepsilon^p_{\xi,x'}\rangle = \langle D^p f(\xi), x'\rangle, \text{ c. q. f. d.}$$

b) Soit $X \in \mathfrak{E}''$, montrons que X provient d'une $f \in \mathfrak{E}(O, E'')$. Pour ce, soit A une partie bornée de $\mathfrak{E}$ telle que X soit faiblement adhérent à A, soit $\mathfrak{F}$ la trace sur A du filtre des voisinages faibles de X. Pour tout $\xi \in O$, l'image de $\mathfrak{F}$ par l'application $g \to g(\xi)$ de $\mathfrak{E}$ dans E est un filtre de Cauchy faible borné, qui converge donc vers un élément de E'', que nous désignerons par $f(\xi)$. Je dis que l'application $\xi \to f(\xi)$ de O dans E'' est $\in \mathfrak{E}(O, E'')$. En premier lieu, si E''_f désigne E'' muni de la topologie faible définie par la dualité avec E', la dernière partie du théorème 7, appliquée à la partie bornée A de $\mathfrak{E}(O, E''_f)$, montre que $f \in \mathfrak{E}(O, E''_f)$, i. e. que pour toute $x' \in E'$, la fonction $\langle f(\xi), x'\rangle$ est indéfiniment différentiable. Mais il faut montrer que pour *toute* forme linéaire continue x''' sur E'', la fonction $\langle f(\xi), x'''\rangle$ est indéfiniment différentiable. Mais d'après la définition de la topologie de E'', x''' sera limite simple de formes linéaires qui appartiennent à une même partie équicontinue M de E', donc la fonction $\langle f(\xi), x'''\rangle$ sera limite simple de fonctions $\langle f(\xi), x'\rangle$, où $x' \in M$. Il suffit maintenant de montrer que l'ensemble des fonctions $\langle f(\xi), x'\rangle$ ($x' \in M$) est une partie bornée de l'espace $\mathfrak{E}(O)$ (cf. dernière partie du théorème 7). Mais pour $x' \in M$ donné, $\langle f(\xi), x'\rangle$ est elle-même limite simple de fonctions $\langle g(\xi), x'\rangle$, où $g \in A$. Il suffit donc de montrer que l'ensemble des fonctions $\langle g(\xi), x'\rangle$, pour $g \in A$, $x' \in M$, est une partie bornée de $\mathfrak{E}(O)$, ce qui se vérifie en effet trivialement.

Montrons que l'on a bien $X = \bar{f}$, i. e. que $\langle X, \Phi\rangle = \langle \bar{f}, \Phi\rangle$ pour $\Phi \in \mathfrak{E}'$. En effet $\langle X, \Phi\rangle = \lim_{\mathfrak{F}} \langle g, \Phi\rangle$, et explicitant Φ par une intégrale (lemme 2) on est ramené à montrer que

$$\lim_{\mathfrak{F}} \int_O \langle D^p g(\xi), F_p(\xi)\rangle\, d\xi = \int_O \langle D^p f(\xi), F_p(\xi)\rangle\, d\xi.$$

F_p étant comme d'ordinaire. Mais cela se voit comme d'habitude, en montrant que la fonction $\langle D^p g(\xi), F_p(\xi)\rangle$ tend uniformément vers la fonction $\langle D^p f(\xi), F_p(\xi)\rangle$.

Nous avons donc démontré que $\mathfrak{E}''$ est contenu dans l'image canonique de $\mathfrak{E}(O, E'')$, et s'identifie donc à un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{E}(O, E'')$. Pour montrer que ce dernier est dense, il suffit de montrer qu'il contient les $\varphi \otimes a$, ($\varphi \in \mathfrak{E}(O)$, $a \in E''$). Mais cela est

facile, car soit A une partie bornée de E à laquelle a soit faiblement adhérent, $\mathfrak{F}$ la trace sur A du filtre des voisinages faibles de a, $\mathfrak{F}_1$ le filtre borné dans $\mathfrak{E}$ image de $\mathfrak{F}$ par l'application $x \to \varphi \otimes x$. Il est manifeste que $\mathfrak{F}_1$ est filtre de Cauchy faible borné dans $\mathfrak{E}$, et si X est sa limite faible dans $\mathfrak{E}''$, que l'élément de $\mathfrak{E}(O, E'')$ qui correspond à X par la construction faite plus haut n'est autre que $\varphi \otimes a$.

c) De a) et b) résulte que dans le cas où $\mathfrak{E}''$ est complet, $\mathfrak{E}''$ s'identifie à tout l'espace $\mathfrak{E}(O, E'')$. En particulier, si E est un espace $(\mathfrak{F})$, $\mathfrak{E}$ est un espace $(\mathfrak{F})$, or on sait ([5]) que le bidual d'un espace $(\mathfrak{F})$ est complet. Par là, le théorème 8 est complètement démontré.

Si maintenant H est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{E}$, son bidual s'identifie à un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{E}(O, E'')$. En particulier, supposons que O soit un ouvert de C^n, et prenons $H = H(O, E)$. H'' s'identifie donc à un sous-espace vectoriel topologique de $\mathfrak{E}(O, E'')$, à tout $X \in H''$, limite faible d'un filtre $\mathfrak{F}$ sur une partie bornée A de H, correspond d'après la construction donnée plus haut la fonction $f(\xi) = \lim\limits_{\mathfrak{F}}.\ \text{faible}\ g(\xi)$. Mais on voit par application du théorème 5b) à l'espace E_f'', que $f(\xi)$ est application holomorphe de O dans E_f''. Conjugué avec la remarque 1 du § 2, cela donne $f \in H(O, E'')$. Donc H'' s'identifie à un sous-espace vectoriel de $H(O, E'')$. On voit exactement comme ci-dessus que ce sous-espace contient les $\varphi \otimes a$ $(\varphi \in H(O),\ a \in E'')$, et est par suite dense (corollaire de prop. 6). Enfin, si E est un espace $(\mathfrak{F})$, H'' sera encore complet comme bidual d'espace $(\mathfrak{F})$, et on aura encore $H'' = H(O, E'')$. En résumé, nous pouvons donc énoncer le

Corollaire du théorème 8. *Si O est un ouvert de C^n, il existe un isomorphisme canonique du bidual H'' de $H(O, E)$ dans l'espace $H(O, E'')$, prolongeant l'application identique de $H(O, E)$ dans $H(O, E'')$. L'image de H'' est dense dans $H(O, E'')$. Si E est un espace $(\mathfrak{F})$, cet isomorphisme est un isomorphisme sur.*

Rappelons qu'on dit qu'un espace localement convexe M est *distingué* ([4]), si toute partie faiblement bornée de son bidual est contenue dans l'adhérence faible d'une partie bornée A de M, c'est-à-dire est une partie équicontinue du dual de M' fort (en d'autres termes, si M' fort est «tonnelé» dans la terminologie de [3]). On notera qu'il existe des espaces $(\mathfrak{F})$ non distingués, comme il résulte d'une construction de G. Köthe relative à une question voisine, conjuguée avec certains résultats de ma note [5] (je donnerai ailleurs des indications plus détaillées sur ces questions). — On a le

Théorème 9. *Soit O un ouvert de R^n (resp. de C^n), et soit E un espace $(\mathfrak{F})$. Alors*

a) *$\mathfrak{E}(O, E)$ (resp. $H(O, E)$) est distingué si et seulement si E l'est.*

b) *Plus généralement, pour que la partie bornée A de $\mathfrak{E}(O, E)'' = \mathfrak{E}(O, E'')$ (resp. de $H(O, E)'' = H(O, E'')$) soit contenue dans l'adhérence faible d'une partie bornée B de $\mathfrak{E}(O, E)$ (resp. de $H(O, E)$), il faut et il suffit que pour tout compact $K < O$, $\bigcup\limits_{f \in A} f(K)$ soit une partie de E'' contenue dans l'adhérence faible d'une partie bornée de E.*

Nous donnerons la démonstration pour l'espace $H(O, E)$ pour fixer les idées, le lecteur vérifiera aisément qu'elle se répète identiquement pour $\mathfrak{E}(O, E)$. En fait, comme nous l'avons déjà dit, les théorèmes 5 à 9 peuvent s'énoncer en termes abstraits pour le produit tensoriel topologique d'un espace nucléaire par un espace $(\mathfrak{F})$ quelconque.

La partie a) de l'énoncé du théorème 9 est manifestement contenue dans la partie b). La condition nécessaire de l'énoncé b), donc de l'énoncé a), se réduit à une vérification triviale. Démontrons maintenant que si E est distingué, $H(O, E)$ l'est. En effet, soit A une partie bornée de $H(O, E'')$. D'après la proposition 9 du No 1, corollaire 3, il existe un borné $M < H(O)$ et un borné $N < E''$ tels que A soit contenu dans l'enveloppe convexe cerclée fermée de l'ensemble des $\varphi \otimes a$ $(\varphi \in M,\ a \in N)$. Par hypothèse, il existe un borné $N_1 < E$ tel que N soit contenu dans l'adhérence faible de N_1 dans E''. Soit B l'enveloppe

convexe cerclée fermée dans $H(O, E)$ de l'ensemble des $\varphi \otimes a$ ($\varphi \in M$, $a \in N_1$). C'est une partie bornée de $H(O, E)$, et il est facile de vérifier que A est contenu dans l'adhérence faible de B dans $H(O, E'')$. En effet, il suffit de le vérifier pour des éléments de la forme $f = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i \otimes a$, où $\sum |\lambda_i| \leqq 1$, $\varphi_i \in M$, $a_i \in N$. Soit, pour tout i, $\mathfrak{F}_i$ la trace sur N_1 du filtre des voisinages faibles de a_i, on vérifie alors aussitôt que f est limite faible de $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i \otimes x_i$ suivant le filtre produit des $\mathfrak{F}_i$ (en se servant comme usuellement de la représentation intégrale des formes linéaires continues sur $H(O, E)$ donnée par le lemme 2). Comme les $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i \otimes x_i$ sont éléments de B, il suit bien que f est faiblement adhérente à B.

Reste à démontrer la condition suffisante de la partie b) du théorème 9. Soit (K_i) une suite de compacts contenus dans O tels que tout autre compact dans O soit contenu dans l'un des K_i. Pour tout i, il existe par hypothèse un borné $M_i < E$ tel que $\bigcup_{f \in A} f(K_i)$ soit contenu dans l'adhérence faible de M_i dans E''. On sait alors qu'il existe un borné $M < E$ tel que pour tout i, existe $\lambda_i > 0$ tel que $M_i < \lambda_i M$ («première condition de dénombrabilité de Mackey»; c. f. [4]). Donc on aura $f(K_i) < \lambda_i \overline{M}$ pour tout i ($\overline{M}$ désignant l'adhérence faible de M dans E''). On peut supposer M convexe cerclé fermé dans E. En vertu de la remarque 2 du § 2, les $f \in A$ peuvent donc être considérées comme des applications holomorphes de O dans l'espace de Banach $F = \boldsymbol{C} \cdot \overline{M}$ (muni de la « boule » $\overline{M}$) et forment évidemment une partie bornée de l'espace $H(O, F)$. Soit de même E_1 l'espace de Banach $\boldsymbol{C} \cdot M$, et soit u l'application identique de E_1 dans E. L'application bitransposée u'' applique E_1'' dans E'', et applique la boule de E_1'' sur l'adhérence faible de M dans E'' (car l'image de la boule de E_1'' doit être faiblement adhérente à M dans E'' par continuité, et faiblement compacte comme image continue d'un faiblement compact). Par suite, on peut aussi considérer u'' comme application linéaire continue de E_1'' *sur* F. Du corollaire de la proposition 7 de ce paragraphe résulte que les $f \in A$ sont de la forme $u'' \circ g$, où g est application holomorphe de O dans E_1''. Cette g correspondant à une $f \in A$ donnée n'est pas déterminée de façon unique, mais en vertu de la proposition 9, corollaire 3, l'ensemble de ces g peut être choisi borné dans $H(O, E_1'')$, soit B. De la partie a) du théorème, appliquée à l'espace de Banach E_1 (qui est distingué!) on tire l'existence d'une partie bornée B_1 de $H(O, E_1)$ telle que B soit contenu dans l'adhérence faible de B_1 dans $H(O, E_1'')$. Mais B_1 s'identifie aussi à une partie bornée de $H(O, E)$. Je dis que la partie A de $H(O, E'')$ est contenue dans l'adhérence faible de B_1 dans $H(O, E'')$. En effet, soit v l'application naturelle de $H(O, E_1)$ dans $H(O, E)$, il est immédiat de vérifier que sa bitransposée v'' est l'application de $H(O, E_1'')$ dans $H(O, E'')$ obtenue à partir de l'application linéaire u'' de E_1'' dans E''. Par suite, on a $A < v''(B)$, or B est contenu dans l'adhérence faible de B_1 dans $H(O, E_1'')$, donc $v''(B)$ et par suite A est contenu dans l'adhérence faible de $v(B_1) = B_1$ dans $H(O, E'')$. Le théorème 9 est donc complètement démontré.

5. Convergence forte des suites de formes lineaires sur $H(O, E)$. Une propriété utile, vérifiée par les espaces $(\mathfrak{F})$ les plus importants (c. f. les espaces étudiés dans [9]) est la suivante: Si (x_i') est une suite du dual de E qui converge fortement vers zéro, il existe un voisinage de l'origine U dans E tel que (x_i') converge vers zéro uniformément sur U; ou, ce qui revient au même, il existe un borné convexe cerclé fermé K dans E', tel que (x_i') converge vers zéro dans l'espace de Banach $\boldsymbol{C} \cdot K$ (muni de la « boule » K). Cette propriété peut pourtant être en défaut même si E est un espace $(\mathfrak{M})$ (c. f. [8]).

Une condition plus forte que la précédente est: pour toute partie équicontinue K_0 de E', existe un voisinage U de l'origine dans E tel que sur K_0, la topologie forte soit

identique à la topologie de la convergence uniforme sur U; ou, ce qui revient au même, qu'il existe un ensemble équicontinue convexe cerclé fermé $K > K_0$ dans E', tel que sur K_0, la topologie forte soit identique à la topologie induite par l'espace de Banach $C \cdot K$. Il est facile de mettre cette condition sous la forme duale: Pour tout voisinage V de l'origine dans E, existe un voisinage convexe cerclé fermé U de l'origine, tel que pour tout entier $n > 0$, existe un borné $A < E$ avec $n \cdot U < A + V$. D'ailleurs, appliquant le fait qu'un espace $(\mathfrak{F})$ satisfait à la première condition de dénombrabilité de Mackey (c. f. [4]), cela équivaut quand E est du type $(\mathfrak{F})$ à l'existence d'un borné *fixe* A, ayant la propriété: pour tout voisinage V de 0, existe un voisinage U de 0 tel que, quel que soit l'entier $n > 0$, on puisse trouver un entier m_n tel que

$$n \cdot U < m_n \cdot A + V.$$

Si E possède cette propriété, E sera appelé *quasi-normable*. Dans le cas où E est un espace $(\mathfrak{M})$, cette propriété signifie aussi manifestement: pour tout voisinage convexe cerclé fermé V de 0, existe un voisinage U de 0 qui soit précompact pour la topologie définie par l'unique voisinage V.

Il est facile de voir que le produit tensoriel complet de deux espaces $(\mathfrak{F})$ quasi-normables est quasi-normable. D'autre part, on voit immédiatement que l'espace $H(O)$ est un espace $(\mathfrak{M})$ quasi-normable. Un système fondamental de voisinages de 0 est en effet formé par les $U(K)$ et leurs homothétiques, où pour tout compact $K < O$, $U(K)$ désigne l'ensemble des $f \in H(O)$ telles que $|f(\xi)| \leqq 1$ pour $\xi \in K$. Pour $U(K)$ donné, soit O_1 un voisinage ouvert relativement compact de K dans O, je dis que $U(\overline{O_1})$ est précompact pour la topologie définie par le voisinage $U(K)$ de 0, c'est à dire pour la topologie de la convergence uniforme sur K. Il suffit pour cela de vérifier que $U(\overline{O_1})$ est un ensemble équicontinu de fonctions sur K, mais cela résulte du théorème de Montel, les $f \in U(\overline{O_1})$ formant un ensemble borné *dans l'espace* $H(O_1)$. — Si maintenant E est un espace $(\mathfrak{F})$ quasi-normable (en particulier un espace de Banach), alors $H(O, E) = \overline{H(O) \otimes E}$ est quasi-normable d'après ce que nous avons dit plus haut, d'où la

Proposition 10. *L'espace $H(O)$ est quasi-normable. Si E est un espace quasi-normable, $H(O, E)$ est quasi-normable.*

D'ailleurs, une démonstration toute analogue donne que l'espace $\mathfrak{E}(O)$ est quasi-normable, par suite aussi les espaces $\mathfrak{E}(O, E)$ pour des espace E qui sont quasi-normables. D'autre part, on peut montrer que tout sous-espace vectoriel fermé d'un espace $(\mathfrak{M})$ quasi-normable est quasi-normable, ce qui ramène encore la propriété envisagée pour $H(O)$ à la même propriété pour $\mathfrak{E}(O)$. Enfin, signalons qu'on peut même montrer que tout espace nucléaire est quasi-normable[3]).

§ 8. Etude des espaces $P(\Omega_1, E)$.

Dans ce paragraphe, nous considérons de nouveau des fonctions holomorphes locales sur une partie Ω_1 de la sphère de Riemann Ω, à valeurs dans un espace localement convexe E, sans nous préoccuper si les résultats obtenus auraient en réalité une portée plus générale. Ω_2 désignera comme d'habitude le complémentaire de Ω_1, et on suppose Ω_1 et Ω_2 non vides.

---

[3]) *Note ajoutée pendant la correction des épreuves.* — Pour les résultats utilisés dans la théorie des espaces $(\mathfrak{F})$, voir: *A. Grothendieck*, Sur les espaces $(\mathfrak{F})$ et $(\mathfrak{DF})$, á paraitre dans Summa Brasiliensis Mathematicae. Pour les espaces nucléaires voir: *A. Grothendieck*, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, á paraitre aux Memoirs of the American Math. Soc., 1954.

1. Les espaces $P(\Omega_1, E)$ comme duals forts, et détermination de leurs parties bornées. On peut se demander si la topologie assez naturelle que nous avons introduite sur $P(\Omega_1, E)$ au § 4 est aussi la topologie forte de $P(\Omega_1, E)$, considéré comme dual de son dual. De façon générale, suivant la terminologie de [3], nous dirons qu'un espace localement convexe P est tonnelé, si sa topologie est identique à la topologie forte du dual de P' faible, ou encore, si toute partie faiblement bornée de son dual est équicontinue. Ainsi tout espace $(\mathfrak{F})$ est tonnelé. Par définition, le dual fort d'un espace E est tonnelé si et seulement si E est distingué. Les espaces tonnelés forment sans doute la classe la plus importante d'espaces vectoriels utiles dépassant le cadre des espaces $(\mathfrak{F})$ (voir [3]).

Il est facile de voir que pour que $P(\Omega_1, E)$ soit tonnelé, il est nécessaire que E le soit, du moins si $\infty \in \Omega_1$ (E' s'identifie alors à un sous-espace du dual de $P(\Omega_1, E)$ grâce au théorème 2 bis). Nous supposerons donc E tonnelé. Le dual de $P(\Omega_1, E)$ s'identifie alors à tout $P(\Omega_2, E')$ (th. 2 bis) et dire que $P(\Omega_1, E)$ est tonnélé signifie indifféremment que sa topologie est celle de la convergence uniforme sur les parties faiblement bornées de $P(\Omega_2, E')$, ou que toute partie faiblement bornée de $P(\Omega_2, E')$ est équicontinue — ou enfin, ce qui revient encore au même par la proposition 2 bis, que toute partie faiblement bornée de $P(\Omega_2, E')$ soit contenue dans l'image canonique d'une partie bornée d'un $P(O, E'_f)$, où O est un voisinage ouvert de Ω_2 (E'_f désignant E' faible). On a dans cet ordre d'idées la facile

Proposition 11. *$P(\Omega_1, E)$ est tonnelé dans chacun des deux cas suivants:*

a) *E est tonnelé, et Ω_1 fermé,*

b) *E est un espace $(\mathfrak{F})$.*

Démonstration. a) résulte immédiatement de ce qui précède, car, Ω_2 étant ouvert, il suffit de vérifier que toute partie A de $P(\Omega_2, E'_f)$ qui est bornée pour la dualité avec $P(\Omega_1, E)$ est bornée. Mais d'après le théorème 2 bis, le dual de $P(\Omega_2, E'_f)$ est *contenu dans* $P(\Omega_1, E)$, d'où aussitôt notre assertion (les parties bornées ou faiblement bornées de l'espace vectoriel topologique $P(\Omega_2, E'_f)$ étant les mêmes, d'après le théorème de Mackey-Banach).

Pour établir la conclusion dans le cas b), on note d'abord que $P(O, E)$ est tonnelé pour tout ouvert O, puisque c'est même un espace $(\mathfrak{F})$. Mais $P(\Omega_1, E)$ est par définition limite inductive d'espaces $P(O, E)$, dans le sens généralisé explicité au § 4, No 5, (topologie localement convexe la plus fine rendant continues des applications linéaires données des espaces $P(O, E)$ dans $P(\Omega_1, E)$). Or il est immédiat de vérifier qu'une telle limite inductive généralisée d'espaces tonnelés est un espace tonnelé. — La démonstration montre même que $P(\Omega_1, E)$ est tonnelé pour tout Ω_1, dès qu'il est tonnelé pour Ω_1 ouvert.

Explicitons la forme duale de la proposition 11:

Proposition 12. *Si E est un dual fort d'espace $(\mathfrak{F})$, ou plus généralement un sous-espace fortement fermé d'un tel espace (en particulier si E est un espace de Banach), alors toute partie bornée de $P(\Omega_1, E)$ est contenue dans l'image canonique d'une partie bornée d'un espace $P(O, E)$, où O est un voisinage ouvert de Ω_1.*

Supposons d'abord que E est le dual fort F' de l'espace F du type $(\mathfrak{F})$; considérons $P(\Omega_2, F)$, son dual s'identifie à $P(\Omega_1, E)$ (th. 2 bis), et les formes linéaires sur $P(\Omega_1, E)$ définies par les éléments de $P(\Omega_2, F)$ sont continues (id.). Donc une partie bornée de l'espace vectoriel topologique $P(\Omega_1, E)$ est à fortiori faiblement bornée (pour la dualité avec $P(\Omega_2, F)$) donc équicontinue en vertu de la proposition 2 bis, ce qui signifie précisément qu'elle est contenue dans l'image canonique d'une partie bornée d'un $P(O, E)$.

Supposons maintenant que E est un sous-espace fortement fermé d'un dual fort E_1 d'un espace $(\mathfrak{F})$. Alors $P(\Omega_1, E)$ s'identifie à un sous-espace vectoriel de $P(\Omega_1, E_1)$ l'appli-

cation identique de $P(\Omega_1, E)$ dans $P(\Omega_1, E_1)$ étant continue. En vertu de ce qui précède, une partie bornée A de $P(\Omega_1, E)$, étant bornée dans $P(\Omega_1, E_1)$, provient d'une partie bornée B d'un $P(O, E_1)$, où O est un voisinage ouvert de Ω_1. On peut supposer que O est réunion de *cercles* ouverts centrés sur les points de Ω_1. Alors, les $f \in B$ sont en fait des applications *de O dans E*, car elles le sont au voisinage de chaque point de Ω_1. La proposition 12 est par là démontrée, car il est évident que B est alors borné *dans* $P(O, E)$.

Corollaire de la proposition 11. *Si E est un espace de Banach réflexif, alors $P(\Omega_1, E)$ et $P(\Omega_2, E')$ sont réflexifs et duals forts l'un de l'autre.*

Nous verrons au No 3 que même si E est un espace $(\mathfrak{M})$, $P(\Omega_1, E)$ peut ne pas être réflexif (même si Ω_1 est réduit à un point).

Enfin, dans l'ordre d'idées précédent, donnons encore le résultat suivant, qui pour E réflexif résulte facilement de la proposition 11, mais constitue un résultat assez profond dans le cas général:

Proposition 13. *Munissons E' de la topologie forte. Alors la topologie de $P(\Omega_2, E')$ est identique à la topologie forte du dual de $P(\Omega_1, E)$ dans chacun des deux cas suivants:*

a) *E est un espace de Banach.*

b) *E est un espace $(\mathfrak{F})$, et Ω_1 est un ouvert.*

Démonstration. a) Le dual de $P(\Omega_2, E')$ est $P(\Omega_1, E'')$ (th. 2 bis) et les parties équicontinues de $P(\Omega_2, E'')$ sont, d'après la proposition 2 bis, les parties qui proviennent d'une partie bornée d'un $P(O, E'')$, où O est voisinage ouvert de Ω_1. En particulier, d'après la proposition 11, toute partie bornée de $P(\Omega_1, E)$ est équicontinue, donc la topologie forte de dual sur $P(\Omega_2, E')$ est moins fine que la topologie de $P(\Omega_2, E')$. L'identité des deux topologies signifie que toute partie équicontinue A de $P(\Omega_1, E'')$ est contenue dans l'adhérence faible d'une partie bornée de $P(\Omega_1, E)$. Mais A provenant d'une partie bornée B d'un $P(O, E'')$, il suffit à fortiori de montrer que B est contenu dans l'adhérence faible d'une partie bornée de $P(O, E)$ (où le qualificatif «faible» désigne ici la topologie faible propre de l'espace $P(O, E)$). On est donc ramené à démontrer b).

b) Ici on a encore: le dual de $P(\Omega_1, E')$ est $P(O, E'')$, et les partie équicontinues de $P(O, E'')$ sont les ensembles A tels que pour tout compact $K < O$, $\bigcup_{f \in A} f(K)$ soit partie équicontinue de E''. En particulier, une partie bornée de $P(O, E)$ est évidemment équicontinue. Tout revient encore à démontrer que réciproquement, toute partie équicontinue de $P(O, E'')$ est contenue dans l'adhérence faible d'une partie bornée de $P(O, E)$. Mais cela n'est autre que le théorème 9b).

2. La topologie de $P(\Omega_1, E)$ en termes d'espaces $P(K, E)$. Si Ω_1 et Ω_1' sont deux parties de Ω telles que $\Omega_1' < \Omega_1$, il existe une application linéaire naturelle $\varphi_{\Omega_1, \Omega_1'}$ de $P(\Omega_1, E)$ dans $P(\Omega_1', E)$, évidemment continue. Pour Ω_1 donné, considérons sur $P(\Omega_1, E)$ la topologie T' la moins fine qui rende continue les applications $\varphi_{\Omega_1, K}$ de cet espace dans les $P(K, E)$, où K parcourt les compacts contenus dans Ω_1. Cette topologie sera à priori moins fine que la topologie propre T de $P(\Omega_2, E)$. Mais en vertu du théorème 2 bis, on voit immédiatement que toute forme linéaire sur $P(\Omega_1, E)$ continue pour T l'est déjà pour T', de sorte que T et T' donnent le même dual. De plus, la proposition 2 bis montre qu'une partie du dual, équicontinue pour T, est déjà équicontinue pour T', car elle provient d'un ensemble équicontinu de formes linéaires sur un même espace $P(K, E)$, où K est un compact $< \Omega_1$. Par suite, les topologies T et T' sont identiques, d'où la première partie de la

Proposition 14. *La topologie de $P(\Omega_1, E)$ est identique à la topologie la moins fine rendant continues les opérations de restrictions aux parties compactes K de Ω_1 (considérées*

comme application linéaires dans $P(K, E)$); en d'autres termes, l'application $f \to (f_K)$ qui à toute $f \in P(\Omega_1, E)$ fait correspondre le système de ses restrictions aux compacts $K \subset \Omega_1$, est un isomorphisme vectoriel topologique de $P(\Omega_1, E)$ dans le produit topologique $\prod_K P(K, E)$. De plus, l'image de $P(\Omega_1, E)$ est une partie fermée de ce produit topologique.

Pour établir que l'image de $P(\Omega_1, E)$ dans $\prod_K P(K, E)$ est fermée, on peut appliquer le lemme 1 du § 6. Il suffit donc de montrer que toute famille (f_K) de fonctions holomorphes locales sur les compacts $K \subset \Omega_1$, telles que $K' \subset K$ implique que $f_{K'}$ est la restriction de f_K à K', est la famille des restrictions aux compacts K d'une $f \in P(\Omega_1, E)$. Mais ce n'est autre que le lemme 1 du § 5.

Corollaire 1. *Pour que $P(\Omega_1, E)$ soit complet, il suffit que les $P(K, E)$ (pour K compact $\subset \Omega_2$) le soient.*

Corollaire 2. *Pour que $A \subset P(\Omega_2, E)$ soit partie bornée (resp. relativement compacte, resp. relativement faiblement compacte) il faut et il suffit que pour tout compact $K \subset \Omega_1$, l'image de A dans $P(K, E)$ le soit.*

En particulier, pour que dans $P(\Omega_1, E)$, les parties bornées soient relativement compactes (resp. relativement faiblement compactes), il suffit qu'il en soit ainsi dans les espaces $P(K, E)$.

Ces corollaires permettent de démontrer les propositions suivantes.

Proposition 15. *Si E est un dual fort d'espace $(\mathfrak{F})$, ou un sous-espace fermé d'un tel espace (en particulier si E est un espace de Banach) $P(\Omega_1, E)$ est complet.*

En effet, on est ramené grâce au corollaire 1 au cas où Ω_1 est un compact K. Mais si E est dual fort de l'espace F de type $(\mathfrak{F})$, on a vu (proposition 13) que $P(K, E)$ est le dual fort de l'espace $P(\Omega_1, F)$ qui est du type $(\mathfrak{F})$, donc $P(K, E)$ est complet. Si E_1 est un sous-espace vectoriel fermé de E, alors $P(K, E_1)$ s'identifie à un sous-espace vectoriel de $P(K, E)$. Ce sous-espace vectoriel est fermé, car supposant $\infty \in \complement K$ pour simplifier, il est défini par les conditions: $f^{(n)}(\xi) \in E_1$ pour tout entier $n \geqq 0$ et tout $\xi \in K$. Il suffit maintenant de démontrer le lemme:

Lemme 1. *Si E est un sous-espace vectoriel fermé d'un dual fort d'espace $(\mathfrak{F})$, et E_1 un sous-espace vectoriel fermé de E, alors la topologie de $P(\Omega_1, E_1)$ est la topologie induite par $P(\Omega_1, E)$.*

On est immédiatement raméné au cas où E est lui-même le dual fort de l'espace F du type $(\mathfrak{F})$. — L'application identique de $P(\Omega_1, E_1)$ dans $P(\Omega_1, E)$ étant évidemment continue, la topologie de $P(\Omega_1, E_1)$ est à priori plus fine que celle induite par $P(\Omega_1, E)$. Dire qu'elle est aussi moins fine, revient à dire que tout ensemble équicontinu de formes linéaires sur $P(\Omega_1, E_1)$ provient d'un ensemble équicontinu de formes linéaires sur $P(\Omega_1, E)$. Explicitant ceci au moyen de la proposition 2 bis, on est ramené à montrer ceci: $G = (E_1)^0$ étant un sous-espace vectoriel faiblement fermé du bidual F'' de l'espace F du type $(\mathfrak{F})$, A un ensemble d'applications holomorphes de l'ouvert $O (= \complement K)$ dans le quotient F''/G, tel que pour tout compact $K' \subset O$, $\bigcup_{f \in A} f(K')$ soit l'image d'une partie équicontinue de F'' considéré comme dual de F' fort (i. e. une partie de F'' contenue dans l'adhérence faible d'une partie bornée de F), montrer que A provient d'un ensemble B d'applications holomorphes de O dans F'', tel que pour tout compact $K' \subset O$, $\bigcup_{f \in B} f(K')$ soit partie équicontinue de F''.

Soit (K'_i) une suite de compacts dans O telle que tout autre compact $K' \subset O$ soit contenu dans l'un des K'_i, et soit pour tout i, M_i une partie équicontenue de F'' dont

l'image dans F''/G contienne $\bigcup_{f \in \Delta} f(K_i')$. On sait qu'il existe une suite (λ_i) de nombres > 0 telle que $\bigcup_i \lambda_i M_i$ soit partie bornée de F'' («première condition de dénombrabilité de Mackey»). Je montrerai ailleurs[4]) que toute réunion bornée d'une suite de parties équicontinues du bidual F'' d'un Fréchet F est elle même équicontinue, donc $M = \bigcup_i \lambda_i M_i$ est partie équicontinue de F''. Soit N l'enveloppe convexe cerclée faiblement fermée de M, N_1 son image canonique dans F''/G, c'est une partie convexe cerclée *fermée* du quotient F''/G, grâce au fait que G est faiblement fermé (car, N étant faiblement compact, $N + G$ sera partie faiblement fermée de F'', et à fortiori fortement fermée). Donc les espaces $\boldsymbol{C} \cdot N$ et $\boldsymbol{C} \cdot N_1$, munis respectivement des normes définies par les «boules» N et N_1, sont des espaces de *Banach* (voir note en bas de la page 54), et on a une application linéaire continue de $\boldsymbol{C} \cdot N$ *sur* $\boldsymbol{C} \cdot N_1$. Il suffit maintenant de considérer A comme un ensemble borné d'applications de O dans $\boldsymbol{C} \cdot N_1$, et d'appliquer le corollaire 3 de la proposition 8, pour que le résultat voulu apparaisse aussitôt.

Proposition 16. *Si E est un dual fort d'un espace* $(\mathfrak{M})$ (*resp. d'un espace* $(\mathfrak{F})$ *réflexif*), *ou plus généralement un sous-espace vectoriel fermé d'un tel espace, alors dans* $P(\Omega_1, E)$ *toute partie bornée est relativement compacte* (*resp.* $P(\Omega_1, E)$ *est semi-réflexif*).

Ici encore, on se ramène grâce au corollaire 2 de la proposition 14, au cas où Ω_1 est un compact K. Le lemme 1 ci-dessus permet de même de se ramener au cas où E est lui-même le dual fort d'un espace F du type $(\mathfrak{F})$. Mais alors, $P(K, E)$ est le dual fort de l'espace $P(\complement K, F)$ (prop. 13). Or ce dernier espace est un espace $(\mathfrak{M})$ (resp. un espace $(\mathfrak{F})$ réflexif) en vertu du théorème 5 du § 7, corollaire 1 (resp. le th. 6 du § 7, corollaire 1).

En particulier, il résulte des propositions qui précèdent que $P(\Omega_1)$ et $P(\Omega_2)$ sont des espaces réflexifs et complets, duals forts l'un de l'autre, dans chacun desquels les parties bornées sont relativement compactes («espaces $(\mathfrak{M})$ généralisés» complets). Ainsi c désignant la puissance du continu, on obtient une classe de 2^c «espaces $(\mathfrak{M})$ généralisés» complets remarquables, ne se réduisant pas à des espaces classiques.

3. Un exemple. L'exemple qui suit montrera que même dans les cas les plus simples, les propositions 11, 12, 13, 15, 16 ne sont plus valables en dehors des hypothèses restrictives que nous y avons posées.

Prenons pour E l'espace du type $(\mathfrak{M})$ ω, produit topologique d'une suite de droites complexes, et pour Ω_1 l'ensemble réduit au point origine 0. ω s'identifie à l'espace de toutes les suites complexes, son dual ω' est *somme directe* d'une suite de droites (c. f. [4]), et s'identifie donc à l'espace des suites de nombres complexes dont tous les termes à l'exception d'un nombre fini sont nuls, la dualité entre ω et ω' se concrétisant de façon évidente. — $P(\{0\}, \omega)$ s'identifie à l'espace des suites $(\overline{f_i})$ de fonctions holomorphes complexes locales au point 0, telles que les rayons d'holomorphie des $\overline{f_i}$ au point 0 aient une borne inférieure non nulle. C'est donc une partie effective d'un produit direct $\prod_i H_i$ d'espaces H_i tous identiques à l'espace $H = P(\{0\})$.

Le dual de $P(\{0\}, \omega)$ est $P(O, \omega')$, où $O = C\{0\}$ (complémentaire pris par rapport à la sphère de Riemann). Or il est immédiat que toute fonction holomorphe à valeurs dans ω', définie dans un ouvert *connexe* O, prend toutes ses valeurs dans un sous-espace vectoriel de dimension finie de ω' (car toute partie bornée de ω' est de dimension finie). On peut donc identifier $P(O, \omega')$ à la somme directe d'une suite d'espaces H_i' tous identiques à l'espace $H' = P(O)$. D'autre part, cette somme directe s'identifie au dual du produit vectoriel topologique $\prod_i H_i$ des espaces H_i (c. f. [4]).

---

[4]) Voir note [3]) en bas de la page 90.

Les parties bornées de $P(\{0\}, \omega)$ étant identiques aux parties faiblement bornées, il suit que la partie A de $P(\{0\}, \omega)$ est bornée si et seulement si elle est bornée dans le produit topologique ΠH_i, i. e. si pour tout indice i l'ensemble des projections $\overline{f_i}$ $(f \in A)$ est borné dans $H = P(\{0\})$. Mais cela n'implique évidemment nullement que les rayons d'holomorphie des $\overline{f_i}$ (correspondants à tous les indices i et toutes les $f \in A$) aient une borne inférieure non nulle, à fortiori *A peut ne pas être image canonique d'une partie bornée d'un $P(U, \omega)$*, où U serait un voisinage de 0 dans Ω. Il en résulte aussitôt que *$P(O, \omega')$ n'est pas tonnelé, et à fortiori non réflexif, bien que ω' soit réflexif.* On voit de plus immédiatement que toute partie bornée du produit topologique ΠH_i est contenue dans l'adhérence d'une partie bornée de $P(\{0\}, \omega)$ (car elle est même contenue dans l'adhérence d'une partie bornée contenue dans le sous-espace somme des H_i — fait tout à fait général aux produits vectoriels topologiques, et trivial); *par suite $P(\{0\}, \omega)$ n'est pas semi-réflexif, bien que ω soit un espace* $(\mathfrak{M})$. Enfin, notons que la topologie de $P(\{0\}, \omega)$ est la topologie forte dans sa dualité avec $P(O, \omega')$ (prop. 10), mais il est d'autre part immédiat que toute partie bornée de $P(O, \omega')$ est même bornée en tant que partie de la somme directe *topologique* $\Sigma H'_i$, toujours parceque O est connexe et les parties bornées de ω' sont de dimension finie. Par suite la topologie de $P(\{0\}, \omega)$ est aussi celle induite par le produit topologique ΠH_i. Comme $P(\{0\}, \omega)$ est dense dans ce produit (car il contient la *somme* des H_i) il suit que $P(\{0\}, \omega)$ n'*est pas complet* (*ω étant un espace* $(\mathfrak{M})$).

Eingegangen 7. November 1951.

Note ajoutée après la correction des épreuves. Je viens de prendre connaissance d'un travail sur le même sujet que le mien: *C. L. da Silva Dias*, Espaços Vectoriais Topológicos E Sua Applicação Nos Espaços Funcionais Analíticos, in Boletin Da Sociedade De Matemática De São Paulo, Vol 5 (1952), 10 et 20. L'auteur y fait un emploi systématique de la théorie moderne des espaces localement convexes.

Zur Theorie der Rédeischen schiefen Produkte.

Von *Rudolf Kochendörffer* in Rostock.

In einer kürzlich erschienenen Arbeit hat L. Rédei[1]) einen sehr allgemeinen Typ von Produkten zweier Gruppen G und Γ untersucht, der die Schreierschen Erweiterungen und die sog. Zappaschen Produkte als Spezialfälle enthält. Das allgemeinste derartige schiefe Produkt $G \circ \Gamma$ besteht aus Elementepaaren (a, α) mit $a \in G$, $\alpha \in \Gamma$, für die eine Produktbildung folgendermaßen definiert ist:

$$G \circ \Gamma: \quad (a, \alpha)\,(b, \beta) = (\alpha b^\alpha \beta^\alpha,\ a^b \alpha^b \beta).$$

Dabei sind b^α, β^α, a^b, α^b gewisse Funktionen der angegebenen Argumente, deren Werte Elemente aus G bzw. Γ sind.

Das schiefe Produkt $G \circ \Gamma$ heißt k-fach ausgeartet, wenn genau k der vier Relationen

$$b^\alpha = b, \quad \beta^\alpha = e, \quad a^b = \varepsilon, \quad \alpha^b = \alpha$$

identisch erfüllt sind (e bzw. ε sind die Einselemente von G bzw. Γ). Es gibt vier wesentlich verschiedene zweifach ausgeartete schiefe Produkte, die mit $G_1\Gamma$ bis $G_4\Gamma$ bezeichnet werden[2]). Die Produkte $G_1\Gamma$ und $G_2\Gamma$ sind in R ausführlich behandelt worden. Es ergibt sich, daß die Produkte $G_1\Gamma$ gerade die Schreierschen Erweiterungen von Γ mit G darstellen, während die Produkte $G_2\Gamma$ mit den Zappaschen Produkten zusammenfallen.

In der vorliegenden Arbeit sollen die beiden übrigen zweifach ausgearteten schiefen Produkte genauer untersucht werden. Es zeigt sich, daß beide durch zweimalige Erweiterung aus gewissen Untergruppen gewonnen werden können. Die betreffenden Untergruppen sowie die bei den Erweiterungen auftretenden Bestimmungsstücke lassen sich mittels der in der Produktdefinition auftretenden Funktionen festlegen.

I.

Die Rédeischen Produkte $G_3\Gamma$ sind folgendermaßen definiert:

$$(a, \alpha)\,(b, \beta) = (a b \alpha^\beta,\ a^b \alpha \beta)\ ^{3)}.$$

Wegen der Symmetrie der Produktdefinition ist klar, daß alle Aussagen über $G_3\Gamma$ richtig bleiben, wenn man darin G und Γ vertauscht. Jedem Satz läßt sich also ein in diesem Sinne „dualer" gegenüberstellen, was im folgenden nicht immer besonders betont werden soll.

Es seien e bzw. ε die Einselemente von G bzw. Γ. Wir wollen nur den Fall betrachten, daß (e, ε) das Einselement von $G_3\Gamma$ ist. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn

$$(1) \qquad \varepsilon^\alpha = \alpha^\varepsilon = e, \quad e^a = a^e = \varepsilon \ \text{ für alle } \ a \in G,\ \alpha \in \Gamma.$$

---

[1]) *L. Rédei*, Die Anwendung des schiefen Produktes in der Gruppentheorie, Journ. reine angew. Math. **188** (1950), 201—227. Diese Arbeit wird im folgenden mit R zitiert.

[2]) Vgl. R, (4) bis (7).

[3]) In R steht β^α statt α^β. Um eine vollständige Symmetrie bezüglich G und Γ zu haben, empfiehlt sich in unserm Fall diese Abänderung der Bezeichnung.

Das assoziative Gesetz für $G \mathrm{s} \Gamma$ ist gleichbedeutend mit der Gültigkeit folgender Relationen für beliebige $a, b, c \in G$, $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$:

$$a\beta^\gamma = \beta^\gamma a, \quad \alpha b^c = b^c \alpha, \tag{2}$$

$$\alpha^{b^c} = e, \quad a^{\beta^\gamma} = \varepsilon, \tag{3}$$

$$(a^b)^\gamma = e, \quad (\alpha^\beta)^c = \varepsilon, \tag{4}$$

$$(\alpha\beta)^\gamma \alpha^\beta = \alpha^{\beta\gamma}\beta^\gamma, \quad (ab)^c a^b = a^{bc} b^c. \tag{5}$$

Daß (2) bis (5) tatsächlich mit dem assoziativen Gesetz gleichbedeutend sind, ergibt sich durch Spezialisierung des viel allgemeineren Satzes 1 aus R, kann aber auch ohne Mühe direkt bestätigt werden (vgl. auch R, § 9).

Es seien nun

G_1 die von allen α^β erzeugte Untergruppe von G,
Γ_1 die von allen a^b erzeugte Untergruppe von Γ.

Aus (2) folgt, daß G_1 im Zentrum von G, Γ_1 im Zentrum von Γ enthalten sind.

In Verallgemeinerung von (3) und (4) gelten

$$\alpha^{\alpha_1} = e, \quad a^{a_1} = \varepsilon, \tag{3'}$$

$$\alpha_1^\alpha = e, \quad a_1^a = \varepsilon \tag{4'}$$

für beliebige $a \in G$, $\alpha \in \Gamma$, $a_1 \in G_1$, $\alpha_1 \in \Gamma_1$.

Beweis. Infolge unseres Dualitätsprinzips genügt es, $\alpha^{\alpha_1} = e$ und $\alpha_1^\alpha = e$ zu beweisen.

Jedes Element aus Γ_1 ist ein Produkt aus Elementen der Form a^b und den Inversen solcher Elemente. Wegen der linken Gleichungen (3) und (4) ergibt sich also unsere Behauptung durch vollständige Induktion, sobald folgende Aussagen bewiesen sind:

Gelten für zwei Elemente $\beta_1, \gamma_1 \in \Gamma_1$ und jedes Element $\alpha \in \Gamma$ die Gleichungen $\alpha^{\beta_1} = e$, $\alpha^{\gamma_1} = e$, so ist auch $\alpha^{\beta_1\gamma_1} = e$ und $\alpha_1^{\beta_1^{-1}} = e$.

Gelten für jedes α die Gleichungen $\beta_1^\alpha = e$, $\gamma_1^\alpha = e$, so ist auch $(\beta_1\gamma_1)^\alpha = e$ und $(\beta_1^{-1})^\alpha = e$.

Die Richtigkeit dieser Aussagen folgt nun leicht aus der linken Gleichung (5): Es ist zunächst

$$(\alpha\beta_1)^{\gamma_1}\alpha^{\beta_1} = \alpha^{\beta_1\gamma_1}\beta_1^{\gamma_1}.$$

Nach den Annahmen über β_1, γ_1 ist

$$(\alpha\beta_1)^{\gamma_1} = e, \quad \alpha^{\beta_1} = e, \quad \beta_1^{\gamma_1} = e,$$

also $\alpha^{\beta_1\gamma_1} = e$.

Ferner ist nach (5)

$$(\alpha\beta_1^{-1})^{\beta_1}\alpha^{\beta_1^{-1}} = \alpha^\varepsilon(\beta_1^{-1})^{\beta_1},$$

also wegen der Annahme über β_1 und (1) $\alpha^{\beta_1^{-1}} = e$. Weiter ist

$$(\beta_1\gamma_1)^\alpha\beta_1^{\gamma_1} = \beta_1^{\gamma_1\alpha}\gamma_1^\alpha,$$

also wegen der Annahmen über β_1, γ_1 auch $(\beta_1\gamma_1)^\alpha = e$. Und schließlich gilt

$$\varepsilon^\alpha\beta_1^{\beta_1^{-1}} = \beta_1^{\beta_1^{-1}\alpha}(\beta_1^{-1})^\alpha,$$

also wegen der Annahme über β_1 und (1) auch $(\beta_1^{-1})^\alpha = e$. Damit sind (3′) und (4′) bewiesen.

Die linke Gleichung (5) besagt, daß die Elemente α^β ein Faktorensystem für eine Erweiterung von G_1 mit Γ bilden[4]), bei der in G_1 durch Γ der identische Automorphismus induziert wird. Für $\gamma_1 \in \Gamma_1$ und $\alpha, \varrho \in \Gamma$ gilt nach (5)

$$(\alpha\varrho)^{\gamma_1}\alpha^\varrho = \alpha^{\varrho\gamma_1}\varrho^{\gamma_1},$$

[4]) Um auf die übliche Bezeichnungsweise zu kommen, schreibe man etwa $c_{\alpha,\beta}$ statt α^β.

also wegen (3′) und weil Γ_1 im Zentrum von Γ liegt:

$$\alpha^{\varrho} = \alpha^{\varrho\gamma_1} = \alpha^{\gamma_1\varrho}.$$

Ferner ist

$$(\varrho\gamma_1)^{\alpha}\varrho^{\gamma_1} = \varrho^{\gamma_1\alpha}\gamma_1^{\alpha},$$

also wegen (3′), (4′) und $\varrho^{\gamma_1\alpha} = \varrho^{\alpha}$

$$(\varrho\gamma_1)^{\alpha} = (\gamma_1\varrho)^{\alpha} = \varrho^{\alpha}.$$

Daher sind die Elemente α^{β} Funktionen der Nebenklassen von Γ nach Γ_1. Die α^{β} lassen sich also sogar auffassen als ein Faktorensystem zu einer Erweiterung von G_1 mit Γ/Γ_1.

Es sei

$$\Gamma = \sum_{\mathsf{A}\in\Gamma/\Gamma_1} \Gamma_1\gamma_{\mathsf{A}} \tag{6}$$

die Zerlegung von Γ nach Γ_1. Da Γ_1 im Zentrum von Γ liegt, läßt sich Γ auffassen als eine Erweiterung von Γ_1 mit Γ/Γ_1 mit identischer Automorphismengruppe. Das zugehörige Faktorensystem bestimmt sich aus

$$\gamma_{\mathsf{A}}\gamma_{\mathsf{B}} = \varphi_{\mathsf{A},\mathsf{B}}\gamma_{\mathsf{AB}}.$$

Das Duale gilt für G und G_1. Die Zerlegung sei

$$G = \sum_{A\in G/G_1} G_1 g_A,$$

das zugehörige Faktorensystem werde mit $f_{A,B}$ bezeichnet.

Für $a_1 \in G_1$, $\alpha_1 \in \Gamma_1$ gilt

$$(a_1, \varepsilon)(e, \alpha_1) = (e, \alpha_1)(a_1, \varepsilon) = (a_1, \alpha_1).$$

Daher ist (G_1, Γ_1)[5]) das direkte Produkt der beiden Untergruppen (G_1, ε) und (e, Γ_1) von $G \mathbin{3} \Gamma$. Es ist $(G_1, \varepsilon) \cong G_1$, $(e, \Gamma_1) \cong \Gamma_1$ und daher

$$(G_1, \Gamma_1) = (G_1, \varepsilon) \times (e, \Gamma_1) \cong G_1 \times \Gamma_1.$$

Für $a_1 \in G_1$, $\alpha_1 \in \Gamma_1$ wird nach (2), (3′) und (4′)

$$(b, \beta)(a_1, \alpha_1) = (ba_1, \beta\alpha_1) = (a_1 b, \alpha_1\beta) = (a_1, \alpha_1)(b, \beta).$$

Daher ist (G_1, Γ_1) im Zentrum von $G \mathbin{3} \Gamma$ enthalten, und man kann $G \mathbin{3} \Gamma$ als Erweiterung von (G_1, Γ_1) auffassen. Es wird

$$G \mathbin{3} \Gamma = \sum_{\substack{A\in G/G_1\\ \mathsf{A}\in\Gamma/\Gamma_1}} (G_1, \Gamma_1)(g_A, \gamma_{\mathsf{A}}).$$

Für $a_1, b_1 \in G_1$; $\alpha_1, \beta_1 \in \Gamma_1$ gilt

$$\begin{aligned}
&(a_1, \alpha_1)(g_A, \gamma_{\mathsf{A}})(b_1, \beta_1)(g_B, \gamma_{\mathsf{B}})\\
&\quad = (a_1, \alpha_1)(b_1, \beta_1)(g_A, \gamma_{\mathsf{A}})(g_B, \gamma_{\mathsf{B}})\\
&\quad = (a_1 b_1, \alpha_1\beta_1)(g_A g_B \gamma_{\mathsf{A}}^{\gamma_{\mathsf{B}}}, g_A^{g_B}\gamma_{\mathsf{A}}\gamma_{\mathsf{B}})\\
&\quad = (a_1 b_1, \alpha_1\beta_1)(g_{AB} f_{A,B}\gamma_{\mathsf{A}}^{\gamma_{\mathsf{B}}}, g_A^{g_B}\varphi_{\mathsf{A},\mathsf{B}}\gamma_{\mathsf{AB}})\\
&\quad = (a_1 b_1, \alpha_1\beta_1)(f_{A,B}\gamma_{\mathsf{A}}^{\gamma_{\mathsf{B}}}, g_A^{g_B}\varphi_{\mathsf{A},\mathsf{B}})(g_{AB}, \gamma_{\mathsf{AB}}).
\end{aligned}$$

Daher ist

$$G \mathbin{3} \Gamma/(G_1, \Gamma_1) \cong G/G_1 \times \Gamma/\Gamma_1.$$

Die Struktur von $G \mathbin{3} \Gamma$ läßt sich daher folgendermaßen beschreiben:

Satz 1. *Die Untergruppe (G_1, Γ_1) von $G \mathbin{3} \Gamma$ liegt im Zentrum und ist isomorph dem direkten Produkt $G_1 \times \Gamma_1$. Das schiefe Produkt $G \mathbin{3} \Gamma$ läßt sich auffassen als Erweiterung von (G_1, Γ_1) mit der Gruppe $G/G_1 \times \Gamma/\Gamma_1$. Das zugehörige Faktorensystem ist*

$$(f_{A,B}\gamma_{\mathsf{A}}^{\gamma_{\mathsf{B}}},\ g_A^{g_B}\varphi_{\mathsf{A},\mathsf{B}}),$$

und die in (G_1, Γ_1) induzierte Automorphismengruppe ist die identische.

---

[5]) Für zwei Teilmengen $H \in G$ und $\mathsf{H} \in \Gamma$ verstehen wir unter (H, H) stets die Gesamtheit aller (h, η) mit $h \in H$, $\eta \in \mathsf{H}$.

Man kann den Aufbau von $G \,{}_3\, \Gamma$ in folgender Weise auch in zwei Schritten durchführen. Für $\alpha_1, \beta_1 \in \Gamma_1$ wird

$$(a, \alpha_1)(b, \beta_1) = (ab, a^b \alpha_1 \beta_1).$$

Daher ist (G, Γ_1) eine Untergruppe von $G \,{}_3\, \Gamma$. Da (e, Γ_1) im Zentrum von $G \,{}_3\, \Gamma$, also erst recht im Zentrum von (G, Γ_1) enthalten ist, kann man (G, Γ_1) auffassen als Erweiterung von (e, Γ_1) mit G zum Faktorensystem a^b und mit identischer Automorphismengruppe.

Mit $\beta_1, \gamma_1 \in \Gamma_1$ wird

$$(a, \alpha)(b, \beta_1) = (ab, a^b \alpha \beta_1),$$
$$(c, \gamma_1)(a, \alpha) = (ca, c^a \gamma_1 \alpha).$$

Man kann nun (c, γ_1) so bestimmen, daß

$$(a, \alpha)(b, \beta_1) = (c, \gamma_1)(a, \alpha)$$

wird. Man setze nämlich $c = aba^{-1}$ und bestimme für dieses c das Element $\gamma_1 \in \Gamma_1$ aus $a^b \alpha \beta_1 = c^a \gamma_1 \alpha$, d. h. $\gamma_1 = a^b \beta_1 (c^a)^{-1}$. Die Gruppe (G, Γ_1) ist daher Normalteiler in $G \,{}_3\, \Gamma$. Unter Benutzung des Repräsentantensystems (6) von Γ nach Γ_1 erhält man

$$G \,{}_3\, \Gamma = \sum_{\mathsf{A} \in \Gamma/\Gamma_1} (G, \Gamma_1)(e, \gamma_{\mathsf{A}}).$$

Es wird

$$\begin{aligned}
&(a, \alpha_1)(e, \gamma_{\mathsf{A}})(b, \beta_1)(e, \gamma_{\mathsf{B}}) \\
&\quad = (a, \alpha_1)(b, \beta_1)(e, \gamma_{\mathsf{A}})(e, \gamma_{\mathsf{B}}) \\
&\quad = (ab, a^b \alpha_1 \beta_1)(\gamma_{\mathsf{A}}^{\gamma_{\mathsf{B}}}, \gamma_{\mathsf{A}} \gamma_{\mathsf{B}}) \\
&\quad = (ab, a^b \alpha_1 \beta_1)(\gamma_{\mathsf{A}}^{\gamma_{\mathsf{B}}}, \varphi_{\mathsf{A},\mathsf{B}}\, \gamma_{\mathsf{AB}}) \\
&\quad = (ab, a^b \alpha_1 \beta_1)(\gamma_{\mathsf{A}}^{\gamma_{\mathsf{B}}}, \varphi_{\mathsf{A},\mathsf{B}})(e, \gamma_{\mathsf{AB}}).
\end{aligned}$$

Daher ist $G \,{}_3\, \Gamma/(G, \Gamma_1) \cong \Gamma/\Gamma_1$ und $G \,{}_3\, \Gamma$ ist die Erweiterung von (G, Γ_1) mit Γ/Γ_1 zum Faktorensystem

$$(\gamma_{\mathsf{A}}^{\gamma_{\mathsf{B}}}, \varphi_{\mathsf{A},\mathsf{B}})$$

und mit identischer Automorphismengruppe.

Wir fassen die letzten Ergebnisse zusammen zu

Satz 2. *Der Normalteiler (G, Γ_1) von $G \,{}_3\, \Gamma$ läßt sich auffassen als Erweiterung von Γ_1 mit G zum Faktorensystem a^b und mit identischer Automorphismengruppe. $G \,{}_3\, \Gamma$ ist die Erweiterung von (G, Γ_1) mit Γ/Γ_1 zum Faktorensystem $(\gamma_{\mathsf{A}}^{\gamma_{\mathsf{B}}}, \varphi_{\mathsf{A},\mathsf{B}})$ und mit identischer Automorphismengruppe.*

Satz 2 ist nicht, wie Satz 1, zu sich selbst dual. Der zu Satz 2 duale Satz liefert vielmehr einen Aufbau von $G \,{}_3\, \Gamma$ über die Zwischengruppe (G_1, Γ).

Schließlich sei noch bemerkt, daß die Faktorensysteme $a^b, \alpha^\beta, f_{\mathsf{A},\mathsf{B}}, \varphi_{\mathsf{A},\mathsf{B}}$ unabhängige Bestimmungsstücke sind.

II.

Die Produktdefinition für die schiefen Produkte $G \,{}_4\, \Gamma$ lautet:

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab^\alpha, a^b \alpha \beta).$$

Es sei wieder (e, ε) das Einselement von $G \,{}_4\, \Gamma$. Dann gilt

(7) $$a^\varepsilon = a, \quad e^\alpha = e, \quad a^e = e^a = \varepsilon.$$

Das assoziative Gesetz in $G \,{}_4\, \Gamma$ ist gleichbedeutend mit folgenden Gleichungen:

(8) $$a^{b^c} = a, \quad a^{b^\gamma} = a^b,$$

(9) $$(a^\beta)^\gamma = a^{\gamma\beta}, \quad (ab)^\gamma = a^\gamma b^\gamma,$$

(10) $$(a^\beta)^c = \beta a^c \beta^{-1},$$

(11) $$(ab)^c a^b = a^{bc} b^c.$$

Man entnimmt dies entweder wieder aus R, Satz 1, oder bestätigt es durch eine leichte Rechnung direkt.

Wie aus der zweiten Gleichung (7) folgt, ist (e, Γ) eine Untergruppe von $G \triangleleft \Gamma$.

Die α_1 aus Γ mit $a^{\alpha_1} = a$ für jedes $a \in G$ bilden wegen der linken Gleichung (9) eine Untergruppe Γ_1 von Γ.

Wegen der linken Gleichung (8) sind insbesondere alle Elemente der Form b^e in Γ_1 enthalten[6]). Gleichung (9) besagt, daß G eine zu Γ invers-homomorphe Gruppe von Automorphismen besitzt. Der identische Automorphismus wird gerade durch die Elemente von Γ_1 erzeugt. Also ist Γ_1 Normalteiler in Γ, und jene Automorphismengruppe ist invers-isomorph zu Γ/Γ_1.

Es ist

$$(a, \alpha)(e, \varrho) = (a, \alpha\varrho), \quad (e, \sigma)(a, \alpha) = (a^\sigma, \sigma\alpha).$$

Also läßt sich dann und nur dann zu beliebigem (a, α) und (e, σ) ein Element (e, ϱ) so bestimmen, daß

$$(a, \alpha)(e, \varrho) = (e, \sigma)(a, \alpha),$$

wenn $\sigma \in \Gamma_1$ ist. Oder, anders ausgedrückt, (e, Γ_1) ist der größte in (e, Γ) enthaltene Normalteiler von $G \triangleleft \Gamma$.

Gleichung (11) besagt, daß die a^b ein in Γ_1 enthaltenes Faktorensystem für eine Erweiterung mit G darstellen, für welches die Automorphismengruppe die identische ist.

(G, Γ_1) ist, wie man sofort erkennt, eine Untergruppe von $G \triangleleft \Gamma$. Die Zerlegung von (G, Γ_1) in Nebengruppen nach (e, Γ_1) hat die Form

$$(G, \Gamma_1) = \sum_{a \in G} (a, \varepsilon)(e, \Gamma_1).$$

Es wird

$$\begin{aligned}(a, \varepsilon)(e, \alpha_1)(b, \varepsilon)(e, \beta_1) &= (a, \varepsilon)(b, \varepsilon)(e, \alpha_1)(e, \beta_1)\\ &= (ab, a^b)(e, \alpha_1\beta_1)\\ &= (ab, \varepsilon)(e, a^b)(e, \alpha_1\beta_1).\end{aligned}$$

D. h. (G, Γ_1) ist die Erweiterung von Γ_1 mit G zum Faktorensystem a^b und mit identischer Automorphismengruppe.

Da Γ_1 Normalteiler in Γ ist, hat man

$$\Gamma = \sum_{A \in \Gamma/\Gamma_1} \varrho_A \Gamma_1,$$

wobei A die Elemente von Γ/Γ_1 durchläuft. Für die Restklassenrepräsentanten gilt

$$\varrho_A \varrho_B = \varrho_{AB} \tau_{A,B} \tag{12}$$

mit einem gewissen Faktorensystem $\tau_{A,B}$ in Γ_1.

Es ist weiter

$$G \triangleleft \Gamma = \sum_{A \in \Gamma/\Gamma_1} (e, \varrho_A)(G, \Gamma_1).$$

Aus der Gleichung

$$(a, \alpha_1)(e, \varrho_A) = (e, \varrho_A)(a^{\varrho_A^{-1}}, \varrho_A^{-1}\alpha_1\varrho_A)$$

folgt, daß (G, Γ_1) Normalteiler in $G \triangleleft \Gamma$ ist. Die Faktorgruppe $G \triangleleft \Gamma/(G, \Gamma_1)$ ist isomorph zu Γ/Γ_1.

---

[6]) Setzt man in (10) $\beta = \beta_1 \in \Gamma_1$, so ergibt sich übrigens, daß die Elemente der Form a^b im Zentrum von Γ_1 enthalten sind. Im äußersten Fall könnte $\Gamma = \Gamma_1$ werden. $G \triangleleft \Gamma$ wäre dann die Erweiterung von Γ mit G zum Faktorensystem a^b und mit identischer Automorphismengruppe. Ist in diesem Fall insbesondere Γ nicht abelsch und erzeugt das Faktorensystem a^b eine echte (abelsche) Untergruppe von Γ, so ist Γ_1 sicher von der von den a^b erzeugten Untergruppe verschieden.

Ferner ist

$$(e, \varrho_A)(a, \alpha_1)(e, \varrho_B)(b, \beta_1) = (e, \varrho_A)(e, \varrho_B)(a^{\varrho_B^{-1}}, \varrho_B^{-1}\alpha_1\varrho_B)(b, \beta_1)$$
$$= (e, \varrho_{AB})(e, \tau_{A,B})(a^{\varrho_B^{-1}}, \varrho_B^{-1}\alpha_1\varrho_B)(b, \beta_1).$$

D. h. $G \triangleleft \Gamma$ ist die Erweiterung von (G, Γ_1) mit Γ/Γ_1 zum Faktorensystem $\tau_{A,B}$. In der zugehörigen zu Γ/Γ_1 isomorphen Gruppe von Automorphismen von (G, Γ_1) entspricht dem Element B von Γ/Γ_1 der Automorphismus

$$(a, \alpha_1) \to (a^{\varrho_B^{-1}}, \varrho_B^{-1}\alpha_1\varrho_B).$$

Wir fassen unsere Ergebnisse über $G \triangleleft \Gamma$ zusammen zu

Satz 3. *Der Normalteiler (G, Γ_1) von $G \triangleleft \Gamma$ ist die Erweiterung von Γ_1 mit G zum Faktorensystem a^b und mit identischer Automorphismengruppe. $G \triangleleft \Gamma$ selbst ist die Erweiterung von (G, Γ_1) mit Γ/Γ_1 zum Faktorensystem $\tau_{A,B}$ in* (12) *und mit der Automorphismengruppe*

$$(a, \alpha_1) \to (a^{\varrho_B^{-1}}, \varrho_B^{-1}\alpha_1\varrho_B).$$

Eingegangen 15. November 1951.

Zur Theorie der asymptotischen Dichte.

Von *Hans Rohrbach* und *Bodo Volkmann* in Mainz.

I. Einleitung.

Für eine Menge $\mathfrak{M}$ von nichtnegativen ganzen Zahlen bedeute $M(x)$ die Anzahlfunktion, d. h. die Anzahl der positiven Elemente $m \leqq x$ von $\mathfrak{M}$; ferner setze man

$$M(0) = 0, \quad M(-1) = \begin{cases} 0 & \text{für } \begin{cases} 0 \notin \mathfrak{M} \\ 0 \in \mathfrak{M} \end{cases} \\ -1 \end{cases}, \quad M(x, y) = M(y) - M(x)$$

für $y > x \geqq -1$, $M(x, y) = 0$ für $x \geqq y \geqq 0$. Dann heißt

$$\mu = \Delta(\mathfrak{M}) = \underset{x \to \infty}{\mathrm{fin}} \frac{M(x)}{x} \text{ bzw. } \mu^* = \Delta^*(\mathfrak{M}) = \underset{x \to \infty}{\lim} \frac{M(x)}{x}$$

die (finite) *Dichte* bzw. die *asymptotische Dichte* von $\mathfrak{M}$, und es ist $0 \leqq \mu \leqq \mu^* \leqq 1$. Unter der *Summe* $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ verstehe man die Menge der Elemente $a + b$ mit $a \in \mathfrak{A}$, $b \in \mathfrak{B}$. Ist $0 \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$, so ist $\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \leqq \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, und man erhält die Schnirelmannsche Summe ($\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ = Menge der Elemente $a, b, a + b$ mit $a \in \mathfrak{A}$, $b \in \mathfrak{B}$), die den Dichteuntersuchungen im allgemeinen zugrunde liegt. Insbesondere gilt dann für die Dichte der Summenmenge $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$:

$$(1) \quad \Delta(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = \gamma \geqq \alpha + \beta = \Delta(\mathfrak{A}) + \Delta(\mathfrak{B}), \textit{ falls } \alpha + \beta \leqq 1 \textit{ ist } (0 \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}).$$

Diese, früher als (α, β)-Vermutung bezeichnete, Abschätzung wurde 1942 von H. B Mann [4], sogar in der (auf A. Brauer zurückgehenden) verschärften Form

$$(2) \qquad \gamma \geqq \sigma(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \underset{x \to \infty}{\mathrm{fin}} \frac{A(x) + B(x)}{x} \text{ für } \sigma(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \leqq 1 \ (0 \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})$$

bewiesen[1]). Weniger bekannt war die, als (α^*, β^*)-Vermutung zu bezeichnende, analoge Abschätzung für die asymptotische Dichte der Summenmenge: *Für* $1 \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ *und* $\Delta^*(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \leqq 1$ *ist*

$$(3) \quad \Delta^*(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = \gamma^* \geqq \tfrac{3}{4}(\alpha^* + \beta^*) = \tfrac{3}{4}\left(\Delta^*(\mathfrak{A}) + \Delta^*(\mathfrak{B})\right) \ (0 \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}).$$

Sie wurde im Anschluß an (1) vom erstgenannten Verfasser [8] formuliert und bereits 1941, früher als (1), von H. H. Ostmann [6] bewiesen, ebenfalls in einer verschärften Form[2]):

$$(4) \qquad \gamma^* \geqq \frac{j}{j+1} \sigma^*(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \frac{j}{j+1} \underset{x \to \infty}{\lim} \frac{A(x) + B(x)}{x} \ (0 \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})$$

---

[1]) Vereinfachungen des ursprünglichen Beweises gaben *E. Artin* und *P. Scherk* [1] sowie *J. G. van der Corput* [2]. Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

[2]) Diese Aussage ist jedoch nicht immer eine Verschärfung von (3), da es Paare $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ gibt, für die in (3) das Gleichheitszeichen gilt, z. B. $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ = Menge der Zahlen, die $\equiv 0$ oder $1 \pmod 4$ sind. Hier ist $\alpha^* = \beta^* = \frac{1}{2}$, $\gamma^* = \frac{3}{4}$, also

$$\gamma^* = \tfrac{3}{4}(\alpha^* + \beta^*).$$

für $\sigma^*(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \leqq 1$. Dabei ist $j = j(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ der kleinste ganzzahlige Wert $x \geqq 0$, für den

$$A(x) + B(x) < x \tag{5}$$

ausfällt. Sofern $1 \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ gilt, ist (5) für $x = 0$, 1 und 2 nicht erfüllt und daher $j \geqq 3$, so daß sich (3) als Folgerung aus (4) ergibt.

Der Ostmannsche Beweis für (4) stützte sich auf Hilfsmittel und Ergebnisse einer vorangehenden Arbeit [5] von ihm, die einen Vorstoß in Richtung auf (1) unternommen hatte. Seine hierfür entwickelten Methoden sind verhältnismäßig kompliziert und jetzt, da (1) inzwischen bewiesen ist, z. T. überflüssig — jedenfalls nicht in vollem Umfang erforderlich, wenn man sich lediglich für den Beweis von (4) interessiert. Es war daher schon lange erwünscht, aus den Ostmannschen Arbeiten dasjenige herauszupräparieren, was für den Beweis von (4) unbedingt notwendig war. Das um so mehr, als Ostmann [7] die Abschätzung (4) noch verallgemeinern konnte zu

$$\Delta^*(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \geqq \varliminf_{x \to \infty} \frac{A(x) + B(x) - G(x)}{x} \quad \text{für } \Delta^*(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \leqq 1,\ 0 \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \tag{6}$$

(wo $\mathfrak{G}$ eine bestimmte noch zu definierende Teilmenge von $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ ist; vgl. Nr. 2) und auch der Beweis dieser Aussage frühere Ergebnisse wesentlich benutzte und deshalb schwer zugänglich blieb.

Man könnte auch daran denken, die Abschätzung (4) direkt, ohne die Ostmannschen Hilfsmittel, zu beweisen, etwa das Mannsche Beweisprinzip für (1) auf (4) zu übertragen. Eine solche Übertragung scheint jedoch, mit Rücksicht auf den von j abhängenden Faktor in (4), nicht so einfach und bei der Verallgemeinerung (6), wo die Menge $\mathfrak{G}$ erst mittels der spezifischen Begriffsbildungen von Ostmann erklärt wird, nicht möglich zu sein [2a]). Doch auch unabhängig von einer solchen Möglichkeit verdient die Ostmannsche Methode wegen ihrer Eigenart und Scharfsinnigkeit, von allem überflüssigem Beiwerk losgelöst allgemein zugänglich gemacht zu werden.

Wir geben daher im folgenden eine im wesentlichen auf den zweitgenannten Verfasser zurückgehende modifizierte, insbesondere stark vereinfachte Beweisanordnung für die als Satz von Ostmann bezeichnete Abschätzung (6) und folgern daraus neben (4) auch die weitere von Ostmann bewiesene Abschätzung

$$\Delta^*(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \geqq \varliminf_{x \to \infty} \frac{A(x) + \frac{l-1}{l} B(x)}{x} \geqq \Delta^*(\mathfrak{A}) + \frac{l-1}{l} \Delta^*(\mathfrak{B}) \quad (0 \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}), \tag{7}$$

die gültig ist, sofern die Menge $\mathfrak{B}$ irgend l aufeinanderfolgende Zahlen als Elemente enthält. Für den Spezialfall $0, 1 \in \mathfrak{B}\,(l = 2)$ wurde (7) bereits von P. Erdös [3] bewiesen.

Übrigens bedeutet die Voraussetzung $0 \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ für Abschätzungen der hier betrachteten Art keine Einschränkung. Bezeichnet nämlich für eine Menge (nichtnegativer ganzer Zahlen) $\mathfrak{M}$ und ein $w \geqq 1$ aus $\mathfrak{M}$ allgemein $\mathfrak{M}_w$ die Menge, die sich ergibt, wenn alle $m \in \mathfrak{M}$, $0 \leqq m \leqq w - 1$, gestrichen werden und von jedem Element der Restmenge die Zahl w subtrahiert wird, so ist $0 \in \mathfrak{M}_w$, ferner

$$\mathfrak{M}_w + \{w\} \leqq \mathfrak{M} \tag{8}$$

und für jedes $x > w$

$$1 + M_w(x - w) = M(w - 1, x) = M(x) - M(w - 1), \tag{9}$$

d. h. mit einer nur von w abhängenden Konstanten $c = c(w)$

$$M_w(x - w) = M(x) - c. \tag{10}$$

2a) Vgl. hierzu *Zusatz bei der Korrektur* auf S. 112.

Damit folgt aber einerseits, indem man (10) für $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ bei festen $u \in \mathfrak{A}, v \in \mathfrak{B}$ (für w) anwendet:

$$(11)\qquad \begin{aligned} \sigma^*(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) &= \varliminf_{x\to\infty} \frac{A(x)+B(x)}{x} = \varliminf_{x\to\infty} \frac{A_u(x-u)+B_v(x-v)+c}{x} \qquad (c = c(u, v)) \\ &= \varliminf_{x\to\infty} \frac{A_u(x)+B_v(x)}{x} = \sigma^*(\mathfrak{A}_u, \mathfrak{B}_v), \end{aligned}$$

andererseits mittels (8)

$$\mathfrak{A}_u + \mathfrak{B}_v + \{u+v\} = \mathfrak{A}_u + \{u\} + \mathfrak{B}_v + \{v\} \leqq \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$$

und hieraus[3])

$$(12)\qquad \Delta^*(\mathfrak{A}_u + \mathfrak{B}_v) \leqq \Delta^*(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}).$$

Hat man nun eine Aussage der Form

$$(13)\qquad \Delta^*(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \geqq \lambda\, \sigma^*(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \text{ für } \sigma^*(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \leqq 1$$

unter der Voraussetzung $0 \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ bewiesen, so ist (13) speziell für $\mathfrak{A}_u$, $\mathfrak{B}_v$ bei beliebigen, aber festen u, v gültig, da $0 \in \mathfrak{A}_u \cap \mathfrak{B}_v$ und $\sigma^*(\mathfrak{A}_u, \mathfrak{B}_v) = \sigma^*(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \leqq 1$ ist. Dann folgt aber auf Grund von (12) und (11) die Gültigkeit von (13) auch für den Fall, daß $0 \notin \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ ist.

Diese Betrachtung liefert, wie bereits Ostmann [6] bemerkt, gleich noch etwas mehr. Aus (4) folgt nämlich, da $\mathfrak{A}_u$ und $\mathfrak{B}_v$, wie eben gezeigt, die erforderlichen Voraussetzungen erfüllen,

$$(14)\qquad \Delta^*(\mathfrak{A}_u + \mathfrak{B}_v) \geqq \frac{j(\mathfrak{A}_u, \mathfrak{B}_v)}{j(\mathfrak{A}_u, \mathfrak{B}_v)+1}\, \sigma^*(\mathfrak{A}_u, \mathfrak{B}_v).$$

Dies gilt für jedes Paar u, v mit $u \in \mathfrak{A}, v \in \mathfrak{B}$. Setzt man nun

$$(15)\qquad j^* = \max_{u\in\mathfrak{A},\, v\in\mathfrak{B}} j(\mathfrak{A}_u, \mathfrak{B}_v) \text{ bzw. } j^* = \infty,$$

je nachdem ein Maximum der j-Werte existiert oder nicht, so folgt aus (14) mittels (12) und (11)

$$(16)\qquad \Delta^*(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \geqq \frac{j^*}{j^*+1}\, \sigma^*(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \text{ für } \sigma^*(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \leqq 1,$$

indem man (14) für ein Paar u, v benutzt, das das Maximum j^* liefert, bzw.

$$(17)\qquad \Delta^*(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \geqq \sigma^*(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \text{ für } \sigma^*(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \leqq 1,$$

indem man (14) für eine Folge von Paaren u, v mit $j(\mathfrak{A}_u, \mathfrak{B}_v) \to \infty$ benutzt.

Die Aussagen (16) und (17) geben eine Verschärfung, zugleich aber auch eine Präzisierung der Abschätzung (4). Sie zeigen einmal, wann das genaue Analogon des Mannschen Satzes (2) für die asymptotische Dichte bestimmt zutrifft, und zum andern, daß (4) mit einem größtmöglichen j-Wert gilt, falls ein größter j-Wert existiert. Dieses j^* beseitigt in gewissem Sinn die für eine asymptotische Aussage befremdende Abhängigkeit der Abschätzung (4) vom Anfang der Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

II. Der Ostmannsche Hilfssatz.

1. Definitionen. Es sei $\mathfrak{V} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$, $\mathfrak{D} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}' = \mathfrak{V} + \mathfrak{D}$. Dann ist offenbar

$$(18)\qquad \mathfrak{A} + \mathfrak{B} \geqq \mathfrak{V} + \mathfrak{D},$$

$$(19)\qquad A(x) + B(x) = V(x) + D(x).$$

---

[3]) Daß in (12) nicht das Gleichheitszeichen zu stehen braucht, zeigt das Beispiel $\mathfrak{A} = \{0, 1, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$, $\mathfrak{B} = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$ mit $u = v = 2$. Hier ist $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}$, $\Delta^*(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = 1$, $\Delta^*(\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}_2) = \frac{1}{2}$.

Hierbei ist $L(x) = 0$ zu setzen für alle x, falls $\mathfrak{L}$ die leere Menge bedeutet. Ferner betrachte man für $x = 0, 1, 2, \ldots$ die (ganzwertigen) Funktionen

$$I(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}; x) = I(x) = x - A(x) - B(x), \tag{20}$$

$$I(x, y) = I(y) - I(x) \text{ für } y \geqq x \geqq 0. \tag{21}$$

Nach (5) ist dann j der kleinste ganzzahlige Wert $x \geqq 0$ mit $I(x) \geqq 1$. Existiert kein solches x, so wird $j = \infty$ gesetzt.

Bezeichnet $\overline{\mathfrak{M}}$ die zu $\mathfrak{M}$ in bezug auf die Menge aller nichtnegativen ganzen Zahlen *komplementäre Menge*, so daß $M(x) + \overline{M}(x) = x$ ist für $x = 0, 1, 2, \ldots$, so folgt aus (19) und (20)

$$I(x) = x - V(x) - D(x) = \overline{V}(x) - D(x). \tag{22}$$

Ebenso bestätigt man leicht mittels (19), (20) und (21), daß

$$|I(x-1, x)| \leqq 1$$

ist und zwar genauer

$$I(x-1, x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x \in \mathfrak{D}, \\ 0 & \text{für } x \in \mathfrak{B} \cap \overline{\mathfrak{D}}, \\ 1 & \text{für } x \in \overline{\mathfrak{B}}, \end{cases} \tag{23}$$

gültig für $x = 1, 2, 3, \ldots$. Schließlich sei für $x = 0, 1, 2, \ldots$

$$K(x) = \max\{I(0), I(1), \ldots, I(x)\}. \tag{24}$$

Dann ist, wie man mittels (23) erkennt,

$$0 \leqq K(x) \leqq x \text{ und } 0 \leqq K(x+1) - K(x) \leqq 1.$$

Daher läßt sich $K(x)$ als Anzahlfunktion einer (möglicherweise endlichen) *Menge $\mathfrak{K}$ auffassen.* Hierin liegt eine der wesentlichen Vereinfachungen unserer Darstellung gegenüber der Ostmannschen. Sie wird dadurch ermöglicht, daß wir in (20) statt des Ostmannschen $J(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}; x)$ die Funktion $I(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}; x) = -J(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}; x)$ einführen.

Ein Beispiel mag die Begriffe verdeutlichen. Es sei

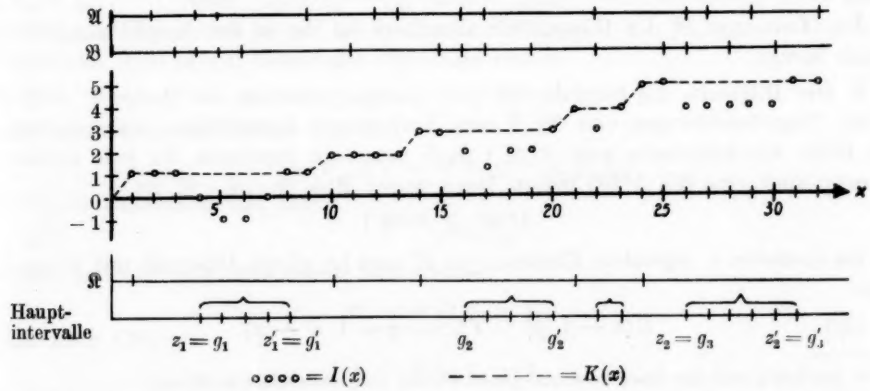
$$\mathfrak{A} = \{0, 2, 4, 5, 9, 12, 13, 16, 17, 22, 26, 27, 29, 32, \ldots\}$$

$$\mathfrak{B} = \{0, 3, 4, 5, 6, 11, 15, 16, 17, 19, 22, 25, 26, 28, 30, \ldots\}.$$

Dann ist, wie die nachstehende Figur zeigt,

$$\mathfrak{K} = \{1, 10, 14, 21, 24, \ldots\}.$$

Ferner bedeutet (23) anschaulich: Die Funktion $I(x)$ fällt, solange x zu $\mathfrak{A}$ und zu $\mathfrak{B}$ gehört, bleibt konstant, solange x zu $\mathfrak{A}$ oder zu $\mathfrak{B}$ gehört, und steigt, solange x weder zu $\mathfrak{A}$ noch zu $\mathfrak{B}$ gehört.



Nach Definition ist stets

$$I(x) \leqq K(x), \tag{25}$$

ferner $x \in \mathfrak{K}$ genau dann, wenn $K(x-1, x) = 1$ ist. Für jedes $k \in \mathfrak{K}$ ist also notwendig

$$I(k) > \max\{I(0), \ldots, I(k-1)\} \geqq I(k-1),$$

d. h. $I(k-1, k) = 1$. Mithin folgt einmal nach (24)

$$I(k) = K(k) \text{ für } k \in \mathfrak{K}, \tag{26}$$

zum andern $\mathfrak{K} \leqq \overline{\mathfrak{B}}$ nach (23). Insbesondere liefert das kleinste Element von $\mathfrak{K}$ den für (4) benötigten Wert von j.

2. Hauptintervalle. Unter einer *Kette der Länge l* oder einer *l-gliedrigen Kette* verstehe man eine Folge von l aufeinanderfolgenden nichtnegativen ganzen Zahlen. Ferner heiße *Hauptintervall* jede möglichst lange Kette von Zahlen x, für die $I(x) < K(x)$ ist, einschließlich der sich unmittelbar anschließenden ganzen Zahl (vgl. Figur). Diese Definition besagt:

a) Ist x Anfang eines Hauptintervalls, so ist $I(x) < I(x-1)$, und das bedeutet $I(x) - I(x-1) = -1$, d. h. $x \in \mathfrak{D}$ nach (23).

b) Ist x Ende eines Hauptintervalls, so ist $I(x) > I(x-1)$, also $I(x) - I(x-1) = 1$, d. h. $x \in \overline{\mathfrak{B}}$ nach (23).

c) Gehört x keinem Hauptintervall an und nicht zu $\mathfrak{K}$, so ist $I(x) - I(x-1) = 0$, d. h. $x \in \mathfrak{B} \cap \overline{\mathfrak{D}} \leqq \mathfrak{B}$ nach (23).

Nunmehr greife man aus der Menge $\mathfrak{H}$ aller Hauptintervallanfänge durch folgende Festsetzung zwei Teilmengen $\mathfrak{G} = \{g_1, g_2, \ldots\}$ und $\mathfrak{Z} = \{z_1, z_2, \ldots\}$ heraus: Es sei q eine natürliche Zahl, über die später noch passend verfügt werden wird, und $z_1 = g_1$ die kleinste Zahl, bei der das mit z_1 beginnende Hauptintervall mindestens q Elemente enthält [4]); ferner gehöre ein $x > z_1$ aus $\mathfrak{H}$ genau dann zu $\mathfrak{Z}$ bzw. zu $\mathfrak{G}$, wenn das mit x beginnende Hauptintervall mehr bzw. nicht weniger Elemente enthält als jedes vorhergehende Hauptintervall (vgl. Figur; $j = 1$). Die Enden der mit g_i bzw. z_i beginnenden Hauptintervalle seien g_i' bzw. z_i', und die Intervalle $[g_i, g_i']$ sollen $\mathfrak{G}$-Intervalle genannt werden. Es ist also

$$\mathfrak{Z} \leqq \mathfrak{G} \leqq \mathfrak{H} \leqq \mathfrak{D}, \tag{27}$$

und je zwei $\mathfrak{G}$-Intervalle $[g_{i_\mu}, g_{i_\mu}']$ und $[g_{i_\nu}, g_{i_\nu}']$ mit $z_m \leqq g_{i_\mu} < g_{i_\nu} < z_{m+1}$ (bei festem, passendem m) haben gleiche Länge. Schließlich sei $\{g_1', g_2', \ldots\} = \mathfrak{G}'$ und $\overline{\mathfrak{K} \cup \mathfrak{G}'} = \mathfrak{R}$. Dann ist, da nach Konstruktion $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{G}'$ elementefremd und $G(x) \geqq G'(x)$ ist,

$$R(x) = x - K(x) - G'(x) \geqq x - K(x) - G(x). \tag{28}$$

Die Teilmenge $\mathfrak{G}$ der Hauptintervallanfänge ist die in der Abschätzung (6) auftretende Menge.

3. Der Hilfssatz. Es handelt sich jetzt darum, zwischen der Menge $\mathfrak{C}' = \mathfrak{B} + \mathfrak{D}$ und den Begriffsbildungen von Nr. 2 eine Verbindung herzustellen, insbesondere mit deren Hilfe Abschätzungen von $\Delta^*(\mathfrak{C}')$ nach unten zu gewinnen, da jede solche Abschätzung auch eine für $\Delta^*(\mathfrak{C})$ liefert. Denn wegen $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{C} \geqq \mathfrak{C}'$ ist

$$\Delta^*(\mathfrak{C}) \geqq \Delta^*(\mathfrak{C}').$$

Ist zunächst $\bar{c}'$ irgendein Element von $\overline{\mathfrak{C}'}$ und $[x, y]$ ein Intervall mit $x < y < \bar{c}'$, so gilt

$$D(x-1, y) \leqq \overline{V}(\bar{c}' - y - 1, \bar{c}' - x). \tag{29}$$

---

[4]) Die Zahl q muß also dieser Vorschrift gemäß wählbar sein, anderenfalls sei $\mathfrak{G}$ leer.

Denn die Anzahl links bzw. rechts gibt die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{D} \cap [x, y]$ bzw. $\overline{\mathfrak{B}} \cap [\bar{c}' - y, \bar{c}' - x]$ an, und jedem $d \in \mathfrak{D} \cap [x, y]$ entspricht eine Zahl

$$\bar{c}' - d \in [\bar{c}' - y, \bar{c}' - x],$$

wobei offenbar $\bar{c}' - d \notin \mathfrak{B}$ ist (da sonst $\bar{c}' \in \mathfrak{B} + \mathfrak{D} = \mathfrak{C}'$ wäre).

Der Kerngedanke der Ostmannschen Darstellung ([5], Hilfssatz 10; [6], Hilfssatz 1) liegt nun im folgenden

Hilfssatz. *Mit den Bezeichnungen von Nr.* 1 *und Nr.* 2 *sei*

$$\bar{c}' \in \overline{\mathfrak{C}}' \cap [z_m, z_m + z_{m+1} - 1], \; g_i \in \mathfrak{G} \cap [z_m, z_{m+1} - 1], \; g_i \leqq \bar{c}'.$$

Dann ist

$$\bar{c}' - g_i \in \mathfrak{K} \cup \mathfrak{G}'.$$

Beweis. Nach (27) ist $g_i \in \mathfrak{D}$, also $\bar{c}' - g_i \in \overline{\mathfrak{B}}$. Es sei etwa $\bar{c}' - g_i = \bar{v}$. Liegt $\bar{v}$ in $\mathfrak{K}$, so ist nichts mehr zu beweisen; daher sei

$$\bar{v} = \bar{c}' - g_i \notin \mathfrak{K}. \tag{30}$$

Dann gehört $\bar{v}$ einem Hauptintervall an, da anderenfalls (vgl. Nr. 2, c)) $\bar{v} \in \mathfrak{B}$ wäre, was nicht zutrifft. Ist $[w, w']$ dies Hauptintervall, also

$$w \leqq \bar{v} = \bar{c}' - g_i \leqq w', \tag{31}$$

so muß $\bar{c}' - w \geqq g_i'$ sein. Angenommen nämlich, es wäre

$$g_i \leqq \bar{c}' - w < g_i'. \tag{32}$$

Dann betrachte man $I(w - 1, \bar{v})$ und $I(g_i - 1, \bar{c}' - w)$. Nach (22), (23) und (31) ist

$$I(w - 1, \bar{v}) = \overline{V}(w - 1, \bar{v}) - D(w - 1, \bar{v}) = \sum_{w \leqq x \leqq \bar{v}} I(x - 1, x) \leqq 0 \tag{33}$$

und mittels (32) analog

$$I(g_i - 1, \bar{c}' - w) = \overline{V}(g_i - 1, \bar{c}' - w) - D(g_i - 1, \bar{c}' - w) < 0. \tag{34}$$

Denn die Anzahl der Summanden $+1$ ist bei (33) höchstens so groß wie die der Summanden -1, bei (34) dagegen bestimmt kleiner, weil $\bar{c}' - w$ im Innern des Hauptintervalls liegt.

Wendet man jetzt (29) einmal mit $x = g_i$, $y = \bar{c}' - w$, zum andern mit $x = w$, $y = \bar{v}$ an, so folgt mittels (33)

$$D(g_i - 1, \bar{c}' - w) \leqq \overline{V}(w - 1, \bar{v}) \leqq D(w - 1, \bar{v}) \leqq \overline{V}(g_i - 1, \bar{c}' - w)$$

im Widerspruch zu (34). Folglich ist

$$\bar{c}' - w \geqq g_i'. \tag{35}$$

Andererseits ergibt sich aus (31) und der Wahl von $\bar{c}'$ bzw. g_i als Element von $[z_m, z_m + z_{m+1} - 1]$ bzw. $[z_m, z_{m+1} - 1]$, daß $w \leqq z_{m+1} - 1$ ist. Daher muß auch w' noch vor z_{m+1} liegen, und $[w, w']$ hat höchstens die Länge der in $[z_m, z_{m+1} - 1]$ gelegenen $\mathfrak{G}$-Intervalle. Also ist auf Grund der Definition von $\mathfrak{G}$

$$w' - w \leqq g_i' - g_i, \quad w' \leqq w - g_i + g_i'. \tag{36}$$

Damit erhält man auf Grund von (35)

$$\bar{c}' - w' \geqq \bar{c}' - w + g_i - g_i' \geqq g_i.$$

Dies ergibt zusammen mit (31)

$$\bar{c}' - w' = g_i. \tag{37}$$

Aus (35) und (37) folgt nun durch Subtraktion

$$w' - w \geqq g_i' - g_i,$$

mithin nach (36)

$$w' - w = g_i' - g_i.$$

Es ist also auch $[w, w']$ ein $\mathfrak{G}$-Intervall und wegen (37) schließlich

$$\bar{v} = \bar{c}' - g_i = w' \in \mathfrak{G}'.$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

III. Beweis des Satzes von Ostmann.

4. Der erste Beweisschritt. Man betrachte für festes $m = 1, 2, \ldots$ die Menge $\mathfrak{G}$ wieder im Intervall $[z_m, z_{m+1} - 1]$, die Menge $\mathfrak{R} = \overline{\mathfrak{K} \cup \mathfrak{G}'}$ im Intervall $[0, z_{m+1} - 1]$. Ist dann

$$g \in \mathfrak{G} \cap [z_m, z_{m+1} - 1], \quad r \in \mathfrak{R} \cap [0, z_{m+1} - 1],$$

so ist

$$r + g \in \mathfrak{C}'. \tag{38}$$

Anderenfalls folgte aus dem Hilfssatz mit $r + g = \bar{c}'$, $g = g_i$, daß $r \in \mathfrak{K}$ wäre. Insbesondere liefert (38), daß $r + z_m \in \mathfrak{C}'$ ist für jedes $r \in \mathfrak{R} \cap [0, z_{m+1} - 1]$, und das bedeutet:

Für je zwei ganze Zahlen s, t mit $1 \leqq s \leqq t < z_{m+1}$ ist

$$C'(z_m + s - 1, z_m + t) \geqq R(s - 1, t) \qquad (m = 1, 2, \ldots). \tag{39}$$

Nunmehr zeigen wir:

Satz 1. *Sind $\mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{R}$ wie in Nr. 1 und Nr. 2 definiert, so gilt*

$$\Delta^*(\mathfrak{C}') \geqq \Delta^*(\mathfrak{R}). \tag{40}$$

Beweis. Für irgendein $n = 1, 2, \ldots$ sei $2z_n \leqq x < 2z_{n+1}$ bzw. $2z^* \leqq x$, falls es ein letztes Element z^* in $\mathfrak{Z}$ gibt. Dann ist nach (39) mit $m = n$, $s = z_n$, $t = x - z_n$

$$C'(2z_n - 1, x) \geqq R(z_n - 1, x - z_n), \tag{41}$$

insbesondere für $x = z_n + z_{n+1} - 1$

$$C'(2z_n - 1, z_n + z_{n+1} - 1) \geqq R(z_n - 1, z_{n+1} - 1). \tag{42}$$

Analog erhält man für $s = z_m$, $t = z_{m+1} - 1$

$$C'(2z_m - 1, z_m + z_{m+1} - 1) \geqq R(z_m - 1, z_{m+1} - 1) \tag{43}$$

und für $s = z_{m-1}$, $t = z_m - 1$

$$C'(z_{m-1} + z_m - 1, 2z_m - 1) \geqq R(z_{m-1} - 1, z_m - 1). \tag{44}$$

Bildet man jetzt (43) für $m = 1, 2, \ldots, n - 1$ und (44) für $m = 2, 3, \ldots, n$ und addiert die entstehenden Ungleichungen, so folgt

$$C'(2z_1 - 1, 2z_n - 1) \geqq 2R(z_1 - 1, z_n - 1), \tag{45}$$

was zusammen mit (41)

$$C'(2z_1 - 1, x) \geqq R(z_1 - 1, x - z_n) + R(z_1 - 1, z_n - 1) \tag{46}$$

ergibt. Liegt insbesondere x im Intervall $z_n + z_{n+1} \leqq x < 2z_{n+1}$, so erhält man aus (39) mit $m = n + 1$, $s = z_n$, $t = x - z_{n+1}$

$$C'(z_n + z_{n+1} - 1, x) \geqq R(z_n - 1, x - z_{n+1}).$$

Addiert man hierzu (45) und (42), so folgt

$$C'(2z_1 - 1, x) \geqq R(z_1 - 1, x - z_{n+1}) + R(z_1 - 1, z_{n+1} - 1). \tag{47}$$

Nun setze man, falls $\mathfrak{Z}$ unendlich ist,

$$l = \begin{cases} 0, & \text{wenn } 2z_n \leqq x < z_n + z_{n+1} \text{ ist,} \\ 1, & \text{wenn } z_n + z_{n+1} \leqq x < 2z_{n+1} \text{ ist.} \end{cases}$$

Dann lassen sich (46) und (47) zusammenfassen zu

$$C'(2z_1 - 1, x) \geqq R(z_1 - 1, x - z_{n+l}) + R(z_1 - 1, z_{n+l} - 1).$$

Für endliches $\mathfrak{Z}$ hat sich man hierin z_{n+l} durch z^* ersetzt zu denken. Somit ist, da für positive a, b, c, d stets $\frac{a+b}{c+d} \geqq \min\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\right)$ ausfällt,

$$\frac{C'(x)}{x} \geqq \frac{C'(2z_1-1, x)}{x} \geqq \frac{R(z_1-1, x-z_{n+l}) + R(z_1-1, z_{n+l}-1)}{(x-z_{n+l}+1)+(z_{n+l}-1)}$$
$$\geqq \min\left\{\frac{R(z_1-1, x-z_{n+l})}{x-z_{n+l}+1}, \frac{R(z_1-1, z_{n+l}-1)}{z_{n+l}-1}\right\}.$$

Für zulässige $x = 1, 2, \ldots$ ist der zweite Ausdruck in der geschweiften Klammer eine Teilfolge von $\frac{R(z_1-1, t)}{t}$ $(t = 1, 2, \ldots)$, während für $x \to \infty$ der erste sich beliebig wenig von einer solchen Teilfolge und beide sich beliebig wenig von $\frac{R(t)}{t}$ unterscheiden. Durch Übergang zum $\underline{\lim}$ erhält man daher die Behauptung (40). Für endliches $\mathfrak{Z}$ ist der zweite Ausdruck in der geschweiften Klammer für genügend großes x konstant; im übrigen bleiben die Betrachtungen erhalten.

5. Der zweite Beweisschritt. Mit Hilfe von Satz 1 läßt sich der Beweis von (6) leicht zu Ende führen. Zu zeigen ist:

Satz 2 (Satz von Ostmann). *Sind $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ Mengen nichtnegativer ganzer Zahlen $(0 \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})$ und $\mathfrak{G}$ die in Nr. 2 definierte Teilmenge der Menge aller Hauptintervallanfänge, so ist*

$$\Delta^*(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) \geqq \underline{\lim}_{x\to\infty} \frac{A(x)+B(x)-G(x)}{x}, \tag{48}$$

falls $\Delta^*(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) \leqq 1$ ist.

Beweis. Wegen $\mathfrak{A}+\mathfrak{B} = \mathfrak{C} \geqq \mathfrak{C}'$ ist auf Grund von (40) und (28)

$$\Delta^*(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) \geqq \Delta^*(\mathfrak{C}') \geqq \Delta^*(\mathfrak{R}) = \underline{\lim}_{x\to\infty} \frac{R(x)}{x} \geqq \underline{\lim}_{x\to\infty} \frac{x-K(x)-G(x)}{x},$$

und hierin behalten die von $\mathfrak{R}$ abhängenden Ausdrücke sowie die nachfolgenden Abschätzungen auch dann ihren Sinn, wenn $\mathfrak{R}$ endlich ist. Da nun die Summe $K(x)+G(x)$ mit wachsendem x nicht abnimmt und bei jedem $x \in \mathfrak{R}$ bestimmt zunimmt, hat der zuletzt stehende Quotient an den Stellen $k_i \in \mathfrak{R}$ relative Minima. Daher ist, falls $\mathfrak{R}$ unendlich ist,

$$\begin{aligned}\underline{\lim}_{x\to\infty} \frac{x-K(x)-G(x)}{x} &= \underline{\lim}_{i\to\infty} \frac{k_i-K(k_i)-G(k_i)}{k_i}\\ &= \underline{\lim}_{i\to\infty} \frac{k_i-I(k_i)-G(k_i)}{k_i}\\ &= \underline{\lim}_{i\to\infty} \frac{A(k_i)+B(k_i)-G(k_i)}{k_i}\\ &\geqq \underline{\lim}_{x\to\infty} \frac{A(x)+B(x)-G(x)}{x}.\end{aligned} \tag{49}$$

Hierbei wurden (26) und (20) benutzt. Damit ist (48) für unendliches $\mathfrak{R}$ bewiesen.

Ist aber $\mathfrak{R}$ endlich, so gibt es Zahlen x_0 und c derart, daß $I(x) \leqq c$ ist für $x > x_0$, nach (20) also

$$A(x)+B(x) \geqq x-c \quad \text{für} \quad x > x_0$$

und daher

$$\sigma^*(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \underline{\lim}_{x\to\infty} \frac{A(x)+B(x)}{x} \geqq \underline{\lim}_{x\to\infty} \frac{x-c}{x} = 1$$

ist. Da nach Voraussetzung $\sigma^*(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \leqq 1$ ist, folgt also $\sigma^*(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = 1$. Daher verläuft bei endlichem $\mathfrak{K}$ die Abschätzung (49) wie folgt:

$$\varliminf_{x\to\infty} \frac{x - K(x) - G(x)}{x} = \varliminf_{x\to\infty} \frac{x - G(x)}{x}$$
$$= \varliminf_{x\to\infty} \frac{A(x) + B(x) - G(x)}{x},$$

womit auch für diesen Fall Satz 2 bewiesen ist.

IV. Folgerungen.

6. Beweis von (4). Aus Satz 2 sollen jetzt die Abschätzungen (4) und (7) gefolgert werden. Zum Beweis von (4), der sehr leicht zu führen ist, braucht man nur abzuschätzen, wieviel Zahlen $\leqq x$ in $\mathfrak{G}$-Intervallen liegen. Nach Konstruktion (Nr. 2) gehören die Elemente jedes Hauptintervalls nicht zu $\mathfrak{K}$. Folglich ist erst recht die Anzahl der Elemente $\leqq x$, die in $\mathfrak{G}$-Intervallen liegen, höchstens gleich $x - K(x)$. Wählt man nun das bei der Konstruktion von $\mathfrak{G}$ noch offen gebliebene $q = j + 1$, so enthält jedes (etwa vorhandene; vgl. [4]) $\mathfrak{G}$-Intervall mindestens $j + 1$ Elemente, und da $G(x)$ die unterhalb x liegenden $\mathfrak{G}$-Intervallanfänge zählt, folgt mit (25) und (20)

$$G(x)\,(j + 1) \leqq x - K(x) + j \leqq A(x) + B(x) + j,$$

also

$$\frac{j}{j+1} - G(x) \geqq -\frac{1}{j+1}\,(A(x) + B(x)).$$

Nach (48) ist daher

$$\gamma^* \geqq \varliminf_{x\to\infty} \frac{A(x) + B(x) - G(x)}{x} = \varliminf_{x\to\infty} \frac{A(x) + B(x) - G(x) + \dfrac{j}{j+1}}{x}$$
$$\geqq \frac{j}{j+1} \varliminf_{x\to\infty} \frac{A(x) + B(x)}{x},$$

womit (4) bewiesen ist.

7. Beweis von (7). Die Kette der Länge l, die $\mathfrak{B}$ nach Voraussetzung enthält, werde von den Zahlen $r + 1, r + 2, \ldots, r + l$ gebildet. Dann setze man wie in (15), aber unter Beschränkung auf $v = r + 1$,

$$j^* = \max_{u \in \mathfrak{A}} j(\mathfrak{A}_u, \mathfrak{B}_{r+1}) \text{ bzw. } j^* = \infty,$$

falls kein solches Maximum existiert. Ist dann $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ ein Paar mit $j^* = \infty$, so ist (7) trivialerweise richtig; denn in diesem Falle ist $\gamma^* \geqq \sigma^*$ (vgl. (17)) und ferner stets

$$\sigma^* = \varliminf_{x\to\infty} \frac{A(x) + B(x)}{x} \geqq \varliminf_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x} + \frac{l-1}{l} \varliminf_{x\to\infty} \frac{B(x)}{x} = \alpha^* + \frac{l-1}{l}\beta^*.$$

Ist aber j^* endlich und das zugehörige $\mathfrak{G}$ ebenfalls endlich, so folgt (7) wie eben mittels (48), da sich $\gamma^* \geqq \sigma^*$ für endliches $\mathfrak{G}$ sofort aus (48) ergibt. Ist $\mathfrak{G}$ unendlich, so setze man $q = j^*$ und unterscheide zum Beweis von (7) die beiden folgenden Fälle:

a) *Alle $\mathfrak{G}$-Intervalle $[g, g']$ enthalten mindestens l Elemente von $\mathfrak{B}$*, d. h. es ist

(50) $$B(g - 1, g') \geqq l \text{ für alle } g \in \mathfrak{G}.$$

Da nun für $x \geqq g_1$ in $[1, x]$ mindestens $G(x) - 1$ vollständige $\mathfrak{G}$-Intervalle liegen, ist nach (50)

$$B(x) \geqq l(G(x) - 1),$$
$$G(x) \leqq \frac{1}{l} B(x) + 1.$$

Hiermit folgt aus (48)

$$\gamma^* \geqq \varliminf_{x \to \infty} \frac{A(x) + B(x) - G(x)}{x}$$
$$\geqq \varliminf_{x \to \infty} \frac{A(x) + \frac{l-1}{l} B(x) - 1}{x} = \varliminf_{x \to \infty} \frac{A(x) + \frac{l-1}{l} B(x)}{x}.$$

Damit ist (7) in diesem Fall bewiesen.

b) *Es gibt ein* $\mathfrak{G}$*-Intervall* $[g_i, g_i']$ *mit*

$$B(g_i - 1, g_i') < l. \tag{51}$$

Dann ist für dieses $\mathfrak{G}$-Intervall

$$B(g_i - 1, g_i + x) - B(r, r + 1 + x) \leqq 0 \qquad (0 \leqq x \leqq g_i' - g_i), \tag{52}$$

wobei das Gleichheitszeichen für $x = g_i' - g_i$ bestimmt ausgeschlossen ist. Denn nach (51) enthält $[g_i, g_i']$ höchstens $l - 1$ Elemente von $\mathfrak{B}$, dagegen $[r + 1, r + g_i' - g_i]$ mindestens die l Elemente der bei $r + 1$ beginnenden Kette, da auf Grund unserer Definitionen $g_i' - g_i \geqq j^*$ und $j^* \geqq l$ ist. Ferner ist nach (20), (21) und (23)

$$I(g_i - 1, g_i + x) = x + 1 - A(g_i - 1, g_i + x) - B(g_i - 1, g_i + x) \leqq 0, \tag{53}$$

wo das Gleichheitszeichen jetzt für $x = g_i' - g_i$ gilt und sonst bestimmt ausgeschlossen ist

Man wähle nun $u_0 \in \mathfrak{A}$ so, daß $\mathfrak{A}_{u_0}$ die Beziehung $j(\mathfrak{A}_{u_0}, \mathfrak{B}_{r+1}) = j^*$ erfüllt. Dann. ergibt sich folgendermaßen ein Widerspruch. Es ist, da $0 \in \mathfrak{A}_{g_i} \cap \mathfrak{B}_{r+1}$ ist, die Funktion $I(\mathfrak{A}_{g_i}, \mathfrak{B}_{r+1}; x)$ definiert. Man erhält ferner mittels (9), nachdem man dort x durch $x + w$ ersetzt hat,

$$1 + A_{g_i}(x) = A(g_i - 1, g_i + x),$$
$$1 + B_{r+1}(x) = B(r, r + 1 + x)$$

und dann hiermit für $x = 1, 2, 3, \ldots$

$$I(\mathfrak{A}_{g_i}, \mathfrak{B}_{r+1}; x) = x - A_{g_i}(x) - B_{r+1}(x)$$
$$= x + 2 - A(g_i - 1, g_i + x) - B(r, r + 1 + x).$$

Nach (52) und (53) folgt weiter

$$I(\mathfrak{A}_{g_i}, \mathfrak{B}_{r+1}; x) \leqq 1 + I(g_i - 1, g_i + x),$$

wobei für $0 \leqq x < g_i' - g_i$ das Zeichen $\leqq$ steht und $I(g_i - 1, g_i + x) < 0$ ist, dagegen für $x = g_i' - g_i$ das Zeichen $<$ und $I(g_i - 1, g_i + x) = 0$ gilt. In beiden Fällen ist daher die linke Seite < 1, also, da es sich um ganzwertige Funktionen handelt,

$$I(\mathfrak{A}_{g_i}, \mathfrak{B}_{r+1}; x) \leqq 0 \text{ für } 0 \leqq x \leqq g_i' - g_i.$$

Dies liefert aber nach der Definition (5) von j

$$j(\mathfrak{A}_{g_i}, \mathfrak{B}_{r+1}) > g_i' - g_i.$$

Andererseits ist nach Konstruktion von $\mathfrak{G}$ und der Wahl von $q = j^*$ stets $g_i' - g_i \geqq j^*$ und daher

$$j(\mathfrak{A}_{g_i}, \mathfrak{B}_{r+1}) > j(\mathfrak{A}_{u_0}, \mathfrak{B}_{r+1}).$$

im Widerspruch zur Bestimmung von u_0. Der Fall b) ist daher zu verwerfen und (7) damit vollständig bewiesen.

Literaturverzeichnis.

[1] *E. Artin* und *P. Scherk*, On the sum of two sets of integers, Annals of Math. (2) **44**, 138–142, 1943.
[2] *J. G. van der Corput*, On sets of integers. I., Proceedings Acad. of Science Amsterdam, 252–261, 1947.
[3] *P. Erdös*, On the asymptotic density of the sum of two sequences, Annals of Math. (2) **43**, 65–68, 1942.
[4] *H. B. Mann*, A proof of the fundamental theorem on the density of sums of sets of positive integers, Annals of Math. (2) **43**, 523–529, 1942.
[5] *H.-H. Ostmann*, Über die Dichte der Summe zweier Zahlenmengen, Deutsche Mathematik **5**, 177–212, 1940.
[6] *H.-H. Ostmann*, Beweis einer Vermutung über die asymptotische Dichte und Verschärfung einer Abschätzung für die Dichte der Summe zweier Zahlenmengen, Deutsche Mathematik **6**, 213–247, 1941/42.
[7] *H.-H. Ostmann*, Verfeinerte Lösung der asymptotischen Dichtenaufgabe, Journal f. d. r. u. a. Mathematik **187**, 183–188, 1949.
[8] *H. Rohrbach*, Einige neuere Untersuchungen über die Dichte in der additiven Zahlentheorie, Jahresbericht d. Deutschen Math. Vereinig. **48**, 199–236, 1938.

Eingegangen 25. April 1952.

Zusatz bei der Korrektur.

Im Anschluß an einen Vortrag, den der erstgenannte Verfasser über die vorstehenden Untersuchungen im August 1952 im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach hielt, hat sich Herr Martin Kneser mit der auf S. 103 erwähnten Möglichkeit beschäftigt, die Ostmannschen Ergebnisse mit den Mannschen Hilfsmitteln zu beweisen. Seine Bemühungen führten zu einem vollen Erfolg. Die Aussage (6) konnte er dabei, unter Vermeidung der Menge $\mathfrak{G}$, noch schärfer formulieren. Wegen der Einzelheiten sei auf die inzwischen erschienene Arbeit verwiesen: *M. Kneser*, Abschätzungen der asymptotischen Dichte von Summenmengen, Math. Zeitschr. **58** (1953), 459—484.

Über die Lage der charakteristischen Wurzeln einer Matrix.

Meinem Freunde Hans Rohrbach zum 50. Geburtstage am 27. Februar 1953 gewidmet.

Von *Alfred Brauer* in Chapel Hill.

Im Jahre 1931 veröffentlichte H. Rohrbach[1]) eine Arbeit, die für mich der Ausgangspunkt einer ganzen Reihe eigener Arbeiten wurde[2]). Zwar habe ich in ihnen und in Vorträgen über sie Rohrbach immer zitiert, wenn es angebracht war. Doch ist es mir darüber hinaus ein Bedürfnis, einmal ausdrücklich zu betonen, wie wichtig seine Arbeit für mich geworden ist. Darum widme ich die vorliegende Abhandlung, in der einige meiner bisherigen Resultate weiter verbessert werden, meinem langjährigen Freunde, dem ich nicht nur in mathematischer Beziehung, sondern auch sonst in vieler Hinsicht zu größtem Danke verpflichtet bin.

Es sei $A = (a_{\varkappa\lambda})$ eine quadratische Matrix n-ter Ordnung. Man setze

$$P_\varkappa = \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\varkappa}}^{n} |a_{\varkappa\nu}| \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n).$$

In M II, Satz 11, hatte ich bewiesen, daß jede charakteristische Wurzel von A im Innern oder auf dem Rande mindestens eines der $n(n-1)/2$ Cassinischen Ovale

$$|z - a_{\varkappa\varkappa}|\,|z - a_{\lambda\lambda}| \leqq P_\varkappa P_\lambda \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, n;\ \varkappa \neq \lambda)$$

liegt. In M V, Satz 35, hatte ich gezeigt, daß diese Ovale durch andere Ovale mit denselben Brennpunkten ersetzt werden können, die häufig kleiner sind. Aber z. B. für die wichtige Klasse der Matrizen mit positiven Elementen gibt der Satz 35 nur den Satz 11.

In der vorliegenden Arbeit verschärfe ich Satz 35 folgendermaßen:

Satz 1. *Es sei $A = (a_{\varkappa\lambda})$ eine quadratische Matrix n-ter Ordnung. Man setze für jedes $\varkappa$ und λ mit $\varkappa \neq \lambda$*

$$(1)\quad Q_{\varkappa\lambda} = \sum_{\nu} \{|a_{\varkappa\lambda}a_{\lambda\nu}| + |a_{\lambda\varkappa}a_{\varkappa\nu}| + |a_{\varkappa\nu}a_{\lambda\nu}|\} + \sum_{\nu<\mu} |a_{\varkappa\nu}a_{\lambda\mu} + a_{\lambda\nu}a_{\varkappa\mu}|,$$

wo μ und ν von 1 bis n laufen, aber $\mu \neq \varkappa, \lambda$ und $\nu \neq \varkappa, \lambda$ ist. Ferner bezeichne man die Hauptunterdeterminante der charakteristischen Determinante von A, welche die Zeilen $\varkappa$ und λ enthält, mit $D_{\varkappa\lambda}$. Dann liegt jede charakteristische Wurzel von A im Innern oder auf dem Rande mindestens eines der $\frac{1}{2}\,n(n-1)$ Ovale

$$(2)\qquad |D_{\varkappa\lambda}| \leqq Q_{\varkappa\lambda} \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, n;\ \varkappa \neq \lambda).$$

---

[1]) *H. Rohrbach*, Bemerkungen zu einem Determinantensatz von Minkowski, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **40** (1931), 49–53.

[2]) *A. Brauer*, Limits for the characteristic roots of a matrix, Duke Math. Journal **13** (1946), 387–395; II, Duke Math. Journal **14** (1947), 21–26; III, Duke Math. Journal **15** (1948), 871–877; IV, Applications to stochastic matrices, Duke Math. Journal **19** (1952), 75–91; V, Duke Mathematical Journal **19** (1952), 553–562. (Diese Arbeiten werden im folgenden kurz mit M I, M II, M III, M IV, M V zitiert werden.) — On the characteristic equations of certain matrices, Bull. of the Amer. Math. Soc. **53** (1947), 605–607. — Matrices with all their characteristic roots in the interior of the unit circle, Journal of the Elisha Mitchell Scient. Soc **68** (1952), 180–183. — Letter to the Editor, Econometrica **21** (1953), 218–219. — Bounds for characteristic roots of matrices, Proceedings of the International Symposium on „Solutions of Linear Systems of Equations and Determination of Eigenvalues" in Los Angeles 1951 (im Druck).

Die Brennpunkte dieser Ovale sind gegeben durch

$$c_{\varkappa\lambda} = \tfrac{1}{2}\{a_{\varkappa\varkappa} + a_{\lambda\lambda} \pm \sqrt{(a_{\varkappa\varkappa} - a_{\lambda\lambda})^2 + 4a_{\varkappa\lambda}a_{\lambda\varkappa}}\}.$$

Für schiefsymmetrische Matrizen liegen sie sämtlich auf der imaginären Achse.

Der erwähnte Satz 35 kann folgendermaßen formuliert werden:

Jede charakteristische Wurzel von A liegt im Innern oder auf dem Rande von mindestens einem der Ovale

$$(3) \qquad |z - a_{\varkappa\varkappa}|\,|z - a_{\lambda\lambda}| - |a_{\varkappa\lambda}a_{\lambda\varkappa}| \leqq Q_{\varkappa\lambda}.$$

Da nun

$$|D_{\varkappa\lambda}| = |(z - a_{\varkappa\varkappa})(z - a_{\lambda\lambda}) - a_{\varkappa\lambda}a_{\lambda\varkappa}| \geqq |z - a_{\varkappa\varkappa}|\,|z - a_{\lambda\lambda}| - |a_{\varkappa\lambda}a_{\lambda\varkappa}|$$

ist, folgt, daß für jedes Wertepaar $\varkappa$, λ, für das $a_{\varkappa\lambda}a_{\lambda\varkappa}$ nicht verschwindet, das Oval (2) im Innern des entsprechenden Ovals (3) liegt. Die beiden Kurven haben nur diejenigen Punkte gemeinsam, für die $\arg\{(z - a_{\varkappa\varkappa})(z - a_{\lambda\lambda})\} = \arg(a_{\varkappa\lambda}a_{\lambda\varkappa})$ ist. Daher gibt der obige Satz 1 für den Spezialfall von Matrizen mit positiven Elementen bessere Abschätzungen für die imaginären Wurzeln als Satz 35. Für die reellen Wurzeln sind die Resultate im Falle positiver Matrizen nur besser, wenn die betreffenden Ovale (2) zweifach zusammenhängend sind.

In ähnlicher Weise werden einige andere meiner früheren Sätze verbessert werden, insbesondere der Satz 37 der Arbeit M V über die reellen Wurzeln der Matrizen mit reellen Elementen.

Beweis von Satz 1. Wenn ω eine charakteristische Wurzel von A ist, so hat das Gleichungssystem

$$(4) \qquad \omega x_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\varkappa\lambda}x_\lambda \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n)$$

eine nicht-triviale Lösung $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Man nehme an, daß

$$(5) \qquad |x_r| \geqq |x_s| \geqq \operatorname{Max}|x_\nu| \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n;\ \nu \neq r, s)$$

ist und betrachte die r-te und s-te der Gleichungen (4)

$$(6) \qquad (\omega - a_{rr})\,x_r = \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq r}}^{n} a_{r\nu}x_\nu,$$

$$(7) \qquad (\omega - a_{ss})\,x_s = \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq s}}^{n} a_{s\nu}x_\nu.$$

Wenn $x_s = 0$ ist, sind alle $x_\nu = 0$ mit Ausnahme von x_r. Wegen (6) ist daher $\omega = a_{rr}$ und wegen (7) $a_{sr} = 0$. Daher ist $D_{rs} = 0$, und der Satz ist in diesem Falle bewiesen.

Man kann daher annehmen, daß $x_s \neq 0$ ist. Durch Multiplikation von (6) und (7) erhält man

$$(8) \qquad \begin{aligned}(\omega - a_{rr})(\omega - a_{ss})\,x_r x_s - a_{rs}a_{sr}x_r x_s &= a_{rs}x_s\Big(\sum_{\nu\neq r,s} a_{s\nu}x_\nu\Big)\\ &+ a_{sr}x_r\Big(\sum_{\nu\neq r,s} a_{r\nu}x_\nu\Big) + \sum_{\nu\neq r,s} a_{r\nu}a_{s\nu}x_\nu^2 + \sum_{\substack{\mu,\nu\neq r,s\\ \nu<\mu}} (a_{r\mu}a_{s\nu} + a_{r\nu}a_{s\mu})\,x_\mu x_\nu.\end{aligned}$$

Dividiert man durch $x_r x_s$, so folgt wegen (5) und (1)

$$|D_{rs}| = |(\omega - a_{rr})(\omega - a_{ss}) - a_{rs}a_{sr}| \leqq Q_{rs}.$$

Für die reellen Wurzeln von Matrizen mit reellen Elementen kann Satz 1 weiter verschärft werden.

Es seien $\varkappa$ und λ gegebene Zahlen und $\varkappa \neq \lambda$. Man betrachte die Summe

$$(9) \quad a_{\varkappa\lambda}\Big(\sum_{\nu\neq\varkappa,\lambda} a_{\lambda\nu}\frac{x_\nu}{x_\varkappa}\Big) + a_{\lambda\varkappa}\Big(\sum_{\nu\neq\varkappa,\lambda} a_{\varkappa\nu}\frac{x_\nu}{x_\lambda}\Big) + \sum_{\nu\neq\varkappa,\lambda} a_{\varkappa\nu}a_{\lambda\nu}\frac{x_\nu^2}{x_\varkappa x_\lambda} + \sum_{\substack{\mu,\nu\neq\varkappa,\lambda\\ \nu<\mu}} (a_{\varkappa\mu}a_{\lambda\nu} + a_{\varkappa\nu}a_{\lambda\mu})\frac{x_\mu x_\nu}{x_\varkappa x_\lambda}.$$

Man denke sich hier die beiden Summanden jeder Klammer der letzten Summe zu einem positiven, negativen oder verschwindenden Koeffizienten zusammengefaßt. Wenn A eine

Matrix mit reellen Elementen und ω eine reelle charakteristische Wurzel ist, kann man alle Komponenten x_ν des charakteristischen Vektors als reell annehmen. Man setze $x_\nu = \varepsilon_\nu y_\nu$, wo $\varepsilon_\nu = \pm 1$ und $y_\nu \geqq 0$ ist für $\nu = 1, 2, \ldots, n$.

Es kann sein, daß alle ε_ν bekannt sind, wie z. B. im Falle, daß ω die größte Wurzel einer nicht-negativen Matrix ist, wo alle $\varepsilon_\nu = 1$ sind. In einem solchen Falle setze man in (9) für die ε_ν die Werte ein und bezeichne die Summe der positiven Koeffizienten der Quotienten der y_ν mit $p_{\varkappa\lambda}$, die Summe der negativen Koeffizienten mit $n_{\varkappa\lambda}$. Im allgemeinen Falle bezeichne man mit $p_{\varkappa\lambda}$ die größtmögliche Summe der positiven Koeffizienten der Quotienten der y_ν bei allen möglichen Zeichenkombinationen der ε_ν für gegebenes $\varkappa$ und λ. Entsprechend bezeichne man die kleinstmögliche Summe der negativen Koeffizienten mit $n_{\varkappa\lambda}$. Unter Benutzung dieser Bezeichnung gilt

Satz 2. *Jede reelle Wurzel ω einer Matrix A mit reellen Elementen genügt mindestens einer der $n(n-1)/2$ Ungleichungen*

$$n_{\varkappa\lambda} \leqq D_{\varkappa\lambda} \leqq p_{\varkappa\lambda} \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, n;\ \varkappa < \lambda). \tag{10}$$

Der Beweis ergibt sich sofort aus (8) und (9).

Man kann den Satz 2 auch folgendermaßen formulieren:

Jede Wurzel einer Matrix mit reellen Elementen liegt in mindestens einem der $n(n-1)/2$ Gebiete, die man erhält, wenn man aus jedem Oval (2) *diejenigen Stücke der reellen Achse herausschneidet, für die* (10) *nicht erfüllt ist.*

In M III habe ich den folgenden Satz bewiesen: Ist $\mathfrak{x}$ ein charakteristischer Vektor, der zur Wurzel ω von A gehört, und ist $f(z)$ ein beliebiges Polynom, so ist $\mathfrak{x}$ auch ein charakteristischer Vektor, der zur Wurzel $f(\omega)$ von $f(A)$ gehört. Mit Hilfe dieses Resultates hatte ich einige Sätze bewiesen, insbesondere Satz 19 in M III und Satz 39 in M V, die oft sehr gute Abschätzungen für die charakteristischen Wurzeln liefern. Auf Grund der obigen Sätze 1 und 2 lassen sich diese Sätze noch weiter verbessern. Da sich die Beweise unmittelbar aus den Beweisen der Sätze 1 und 2 und den Beweisen der entsprechenden früheren Sätze ergeben, formuliere ich hier nur den Wortlaut und übergehe die Beweise.

Satz 3. *Es seien $A = (a_{\varkappa\lambda})$ eine quadratische Matrix n-ter Ordnung und $f_1(z)$, $f_2(z), \ldots, f_n(z)$ beliebige Polynome. Es sei $B = (b_{\varkappa\lambda})$ die Matrix, deren ν-te Zeile für $\nu = 1, 2, \ldots, n$ die ν-te Zeile der Matrix $f_\nu(A)$ ist. Ferner seien $Q^*_{\varkappa\lambda}$ die durch* (1) *für die Matrix B definierten Größen. Dann genügt jede charakteristische Wurzel ω von A mindestens einer der $n(n-1)/2$ Bedingungen*

$$|D^*_{\varkappa\lambda}| = |\{f_\varkappa(\omega) - b_{\varkappa\varkappa}\}\{f_\lambda(\omega) - b_{\lambda\lambda}\} - b_{\varkappa\lambda} b_{\lambda\varkappa}| \leqq Q^*_{\varkappa\lambda}$$
$$(\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, n;\ \varkappa \neq \lambda).$$

Satz 4. *Unter Benutzung der Bezeichnungen von Satz 3 sei jetzt angenommen, daß alle Elemente von A und alle Koeffizienten der Polynome $f_\nu(z)$ reell sind. Ferner seien $p^*_{\varkappa\lambda}$ und $n^*_{\varkappa\lambda}$ die Zahlen für die Matrix B, die den Zahlen $p_{\varkappa\lambda}$ und $n_{\varkappa\lambda}$ der Matrix A entsprechen. Dann genügt jede reelle Wurzel ω von A mindestens einer der $n(n-1)/2$ Bedingungen*

$$n^*_{\varkappa\lambda} \leqq D^*_{\varkappa\lambda} \leqq p^*_{\varkappa\lambda} \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, n;\ \varkappa < \lambda).$$

Daß diese Sätze 1 bis 4 oft weit bessere Abschätzungen als meine früheren Resultate ergeben, zeigen die folgenden Beispiele:

Im M IV war gezeigt worden, daß die von 1 verschiedenen charakteristischen Wurzeln der Matrix

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0{,}33 & 0{,}27 & 0{,}21 & 0{,}19 \\ 0{,}42 & 0{,}14 & 0{,}23 & 0{,}21 \\ 0{,}44 & 0{,}26 & 0{,}12 & 0{,}18 \\ 0{,}42 & 0{,}27 & 0{,}22 & 0{,}09 \end{pmatrix}$$

die charakteristischen Wurzeln der Matrix

$$A_2 = \begin{pmatrix} -0{,}09 & 0 & -0{,}01 \\ 0 & -0{,}13 & 0{,}01 \\ 0{,}02 & -0{,}01 & -0{,}10 \end{pmatrix}$$

sind und daß jede von ihnen daher in mindestens einem der beiden Ovale

$$(11) \quad |z+0{,}09|\,|z+0{,}10| < 0{,}0003 \text{ und } |z+0{,}10|\,|z+0{,}13| < 0{,}0003$$

und in mindestens einem der beiden Ovale

$$(12) \quad |z+0{,}09|\,|z+0{,}10| < 0{,}0004 \text{ und } |z+0{,}10|\,|z+0{,}13| < 0{,}0002$$

liegen muß. Es folgt nun, wenn man Satz 1 auf die Zeilen und auf die Spalten von A_2 anwendet, daß die Ovale (11) durch die drei Ovale

$$(13) \quad \begin{cases} |(z+0{,}09)\,(z+0{,}10)+0{,}0002| < 0{,}0001, \\ |(z+0{,}10)\,(z+0{,}13)+0{,}0001| < 0{,}0002, \\ |z+0{,}09|\,|z+0{,}13| < 0{,}0001 \end{cases}$$

und die Ovale (12) durch die drei Ovale

$$(14) \quad \begin{cases} |(z+0{,}09)\,(z+0{,}10)+0{,}0002| < 0{,}0002, \\ |(z+0{,}10)\,(z+0{,}13)+0{,}0001| < 0{,}0001, \\ |z+0{,}09|\,|z+0{,}13| < 0{,}0002 \end{cases}$$

ersetzt werden können. Die durch (13) und (14) bestimmten Gebiete sind kleiner als die Gebiete (11) und (12). Z. B. ergibt sich aus (11) und (12), daß die reellen Wurzeln von A_2 in den Intervallen $-0{,}1357 < \omega < -0{,}12$ und $-0{,}1157 < \omega < -0{,}0769$ liegen, während aus (13) und (14) folgt, daß sie in den Intervallen $-0{,}1324 < \omega < -0{,}12$; $-0{,}11 < \omega < -0{,}0969$ und $-0{,}0927 < \omega < -0{,}0876$ liegen.

In M V betrachtete ich die nicht-negative Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Löst man für die größte charakteristische Wurzel ω die zu den Spalten gehörigen linearen Gleichungen, so sind, wie gezeigt wurde, die erste und die vierte Komponente des charakteristischen Vektors die absolut größten. Wählte man $f_1(z) = z^3 - 14{,}5z^2 + 52{,}5z$ und $f_4(z) = z^3 - 7z^2 + 6z$, so wurden die erste und vierte Spalte der Matrix B (als Zeilen geschrieben)

$$(15) \quad \begin{cases} 33{,}5 & 0 & 1{,}5 & -1{,}5 & 0 \\ 42 & 0 & -8 & -1 & 1, \end{cases}$$

und Satz 39 und 40 von M V ergaben

$$(16) \quad 9{,}1687 < \omega < 9{,}1851.$$

Wendet man dagegen Satz 4 an Stelle von M V, Satz 39 an, so folgt aus (15)

$$-13{,}5 < (\omega^3 - 14{,}5\omega^2 + 52{,}5\omega - 33{,}5)\,(\omega^3 - 7\omega^2 + 6\omega + 1) + 63 < 76{,}5,$$

und man erhält statt (16) die Aussage $9{,}1687 < \omega < 9{,}1784$. Tatsächlich liegt ω im Intervall $9{,}17267 < \omega < 9{,}17268$.

University of North Carolina.

Eingegangen 20. Februar 1953

Über den dritten Hardy-Littlewoodschen Satz zur Goldbachschen Vermutung.

Herrn Prof. Dr. H. Rohrbach zum 50. Geburtstag gewidmet.

Von *Achim Zulauf* in Mainz.

Einleitung.

Der erste und dritte Hardy-Littlewoodsche Satz [1] zum Goldbachschen Problem lauten bekanntlich (vgl. auch Landau [10], V. Teil):

Wenn die Hypothese (H) wahr ist, d. h. wenn es eine Weltkonstante $\theta < {}^3/_4$ derart gibt, daß alle Dirichletschen Funktionen $L(s, \chi) \neq 0$ sind für $\Re e\, s > \theta$, so gilt:

(1) Alle genügend großen ungeraden Zahlen sind Summe dreier ungerader Primzahlen.

(2) Fast alle geraden Zahlen sind Summe zweier ungerader Primzahlen.

Bei der klassischen Beweismethode, die Hardy und Littlewood benutzten, werden die Eigenschaften gewisser durch unendliche Reihen definierter analytischer Funktionen (hier insbesondere die Nullstellenverteilung der L-Funktionen) ausgenutzt.

I. M. Vinogradov [2], der 1937 die Aussage (1), die man seitdem den Goldbach-Vinogradovschen Satz nennt, erstmalig vollständig, d. h. ohne unbewiesene Annahme, bewies, entfernte sich von der klassischen Methode, indem er endliche Exponentialsummen als Hilfsmittel benutzte. Mit der Vinogradovschen Methode wurde im Anschluß daran auch (2) bewiesen [3].

Ju. V. Linnik [4] zeigte nun 1945, daß man auch mit der Hardy-Littlewoodschen Methode zum Ziele kommen kann, indem er die Hypothese (H) durch schwächere, aber gültige Resultate von Siegel-Walfisz (s. S. Chowla [5]) und von Linnik [6] über die Nullstellenverteilung der L-Funktionen ersetzte. Sein Beweis hat den Vorzug größerer Einheitlichkeit. Die mir bekannten Linnikschen Veröffentlichungen wie auch die etwas ausführlichere von N. G. Čudakov [7] brachten jedoch nur einen Beweis von (1). Die folgende Arbeit wird nun als Spezialfall den Beweis von (2) nach der klassischen Methode, mit den Linnikschen Hilfsmitteln enthalten.

Die Sätze (1) und (2) sind nämlich folgender Erweiterung fähig:

Sind $K \geqq 1$ und $Z \geqq 3$ beliebig aber fest gegeben, und sind $\mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_Z$ irgend Z prime Restklassen mod K, *so gilt:*

(1′) *Jede genügend große zu Z paritätische Zahl $n \in \mathfrak{R}_1 + \cdots + \mathfrak{R}_Z$ ist Summe von Z ungeraden Primzahlen p_ν, die beziehentlich $\in \mathfrak{R}_\nu$ sind.*

(2′) *Fast alle geraden Zahlen $n \in \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2$ sind Summe von zwei ungeraden Primzahlen $p_1 \in \mathfrak{R}_1$, $p_2 \in \mathfrak{R}_2$.*

Offenbar enthalten (1′) und (2′) als Spezialfall $K = 1$ oder 2, $Z = 3$ die alten Sätze (1) und (2).

Satz (1′) wurde 1925 von H. Rademacher [8] unter Annahme der Hardy-Littlewoodschen Hypothese (H) bewiesen. Einen Beweis ohne diese Annahme und zwar mit den

Linnikschen Hilfsmitteln habe ich kürzlich angegeben (siehe [11]). Überdies werde ich zeigen daß (1′) sich in einfacher Weise aus dem hier zu beweisenden Satz (2′) ergibt. Der Fall $Z > 3$ folgt übrigens fast trivialerweise aus $Z = 3$; er ist nur dann von Interesse, wenn man über Satz (1′) hinaus noch etwas über das asymptotische Verhalten der Anzahl der Darstellungen aussagen will. Eine solche asymptotische Formel habe ich ebenfalls angegeben ([11], Satz 10).

Satz (2′) wurde, soweit mir bekannt, bisher noch nicht nach der klassischen Methode bewiesen (auch nicht unter Annahme von (H)).

Mit den Vinogradovschen Hilfsmitteln wurde das Problem der Sätze (1′) und (2′) erfolgreich durch J. G. van der Corput [9] behandelt. Dieser hat sogar noch allgemeinere Resultate erzielt, indem er Darstellungen der Form

$$n = U_1 p_1 + U_2 p_2 + U_3 p_3 \text{ bzw. } n = U_1 p_1 + U_2 p_2 \qquad (p_y \equiv a_y \pmod{K_y})$$

betrachtete, wo die U_y ganze teilerfremde Koeffizienten $\gtreqless 0$ sind und überdies den Primzahlen p_y die Beschränkung $A_y < p_y \leqq B_y$ auferlegt ist.

Trotzdem scheint es mir lohnend, noch einmal diesen Beweis des Satzes (2′) aufzuschreiben; denn einmal ist er verhältnismäßig kurz und durchsichtig (was natürlich nicht nur durch die neue Methode, sondern vielmehr auch durch das geringere Aussagevolumen bedingt ist), zum anderen aber macht er offensichtlich, daß die klassische Methode im Verein mit den neuen Linnikschen Hilfsmitteln durchaus mit der Vinogradovschen konkurrieren kann.

Der in § 2 gegebene Ansatz zum Beweis von (2′) ist die sinngemäße Verallgemeinerung des Hardy-Littlewoodschen im Spezialfall $K = 1$. Und zwar wird die erzeugende Funktion

$$f(w) = \sum_p (\log p)\, w^p$$

im allgemeinen Fall durch

$$F(w, a) = \sum_X \bar{X}(a)\, f(w, X) = \varphi(K) \sum_{p \equiv a(K)} (\log p)\, w^p \text{ mit } f(w, X) = \sum_p X(p)\, (\log p)\, w^p$$

ersetzt (Rademacher benutzte $f(w, X) = \sum_p X(p)\, w^p$, was jedoch aus Gründen, die ich in [11] ausgeführt habe, hier nicht möglich ist).

Auch die Weiterführung des Beweises in § 3 verläuft (abgesehen von der durch die Erweiterung bedingten Verallgemeinerung und der durch die Anwendung der Linnikschen Hilfsmittel bedingten Abweichung in der Ordnung der Fareyzerschneidung) analog dem Beweis von Hardy und Littlewood. Die eigentlichen analytischen Schwierigkeiten des § 3 stecken demzufolge im sog. *großen Hilfssatz* (§ 3, (d)), den ich aus einer früheren Arbeit ([11], Satz 7) übernehmen werde.

In § 4 werden die Endresultate bewiesen. Dabei wird noch ein Hilfsresultat verwendet, das — um den späteren Beweisgang nicht zu unterbrechen — bereits in § 1 vorbereitet wird. Es handelt sich im wesentlichen um den Nachweis von

$$(3) \qquad S_\gamma^*(m) = \sum_{1 \leqq h \leqq \gamma} W_m(h) > C_1 > 0 \text{ mit } W_m(h) = \frac{\mu^2(h)}{\varphi^2(h)} \cdot \sum_{b \mid (h, m)} b\, \mu\left(\frac{h}{b}\right)$$

für gerades m und $\gamma \geqq 1$ (C_1 unabhängig von m und γ). Dieser Nachweis ist notwendigerweise erheblich umständlicher als der entsprechende bei Landau [10], da $S_\gamma^*(m)$ für $\gamma \to \infty$; $m \to \infty$ nicht gleichmäßig absolut in m konvergiert, und da der Quotient γ/m von größerer Ordnung sein kann als bei Landau. Daß (3) unabhängig von m und γ gilt, liegt keineswegs in der Natur der Sache; es hätte nämlich sogar genügt, wenn die Aussage (3) (wie implizit bei Hardy und Littlewood [1], V) nur im quadratischen Mittel bzgl. m bewiesen worden wäre.

Noch ein Wort zu den angewandten Bezeichnungen. Es bedeute

$$g(x) \ll G(x) \text{ (lies: } g(x) \text{ klein gegen } G(x)),$$

daß $|g(x)| \leqq C \cdot G(x)$ ist für jedes x des gemeinsamen Definitionsbereiches; es ist also

$$g(x) = h(x) + O(F(x)) \text{ gleichbedeutend mit } g(x) - h(x) \ll F(x),$$

Ferner bezeichnen $C, C_1, C_2, \ldots$ positive Konstanten. Eine Abhängigkeit von *beliebig aber fest* eingeführten Größen (z. B. A und K) wird nicht in die Bezeichnung aufgenommen. Die Abschätzungen wie auch die Konstanten C dürfen also von solchen Größen (aber sonst von nichts) abhängen.

§ 1. Vorbereitungen.

Hilfssatz 1. *Für ungerades $j \geqq 3$ gilt*

$$\varphi(j) > \frac{4}{5} j^{5/6}.$$

Beweis. Zunächst ist offenbar für $\lambda \geqq 1$

$$2 > \frac{4}{5} \cdot 3^{5/6}; \quad \varphi(3^\lambda) = 2 \cdot 3^{\lambda-1} > \frac{4}{5} \cdot 3^{5/6+\lambda-1} \geqq \frac{4}{5} \cdot 3^{5/6\lambda}.$$

Wegen $n - 1 > n^{5/6}$ für $n = 5$ und $\frac{d}{dn}(n-1) = 1 > \frac{5}{6} n^{-1/6} = \frac{d}{dn}(n^{5/6})$ für $n \geqq 1$ ist ferner für jede Primzahl $p \geqq 5$ und jedes $\lambda \geqq 1$

$$p - 1 > p^{5/6}; \quad \varphi(p^\lambda) = (p-1)\, p^{\lambda-1} > p^{5/6+\lambda-1} \geqq p^{5/6\lambda}.$$

Aus der Distributivität der φ-Funktion folgt sofort die Behauptung.

Hilfssatz 2. *Sei $g \geqq 2$ gerade; $\beta \geqq 1$ und $\chi(g, j)$ der Hauptcharakter* mod g, *also $= 0$ oder 1 je nachdem $(g, j) > 1$ oder $= 1$ ist.*

Dann ist

$$\sum_{1 \leqq j \leqq \beta} \frac{\chi(g, j)\, \mu(j)}{\varphi^2(j)} \geqq C_1 > 0,$$

wobei C_1 von β und g nicht abhängt.

Beweis. Das erste Glied der in Frage stehenden Summe hat den Wert 1. Da $\chi(g, j)$ für gerades j und $\mu(j)$ für nicht-quadratfreies j (insbesondere für $j = 9$) verschwindet, und da jedenfalls $|\chi(g, j)\, \mu(j)| \leqq 1$ ist, gilt also

$$\sum_{1 \leqq j \leqq \beta} \frac{\chi(g, j)\, \mu(j)}{\varphi^2(j)} \geqq 1 - \sum_{\substack{2 \leqq j \leqq \beta \\ 2 \nmid j;\, j \neq 9}} \frac{1}{\varphi^2(j)} = \frac{95}{144} - \sum_{\substack{11 \leqq j \leqq \beta \\ 2 \nmid j}} \frac{1}{\varphi^2(j)}.$$

Weiter ist nach Hilfssatz 1

$$\sum_{\substack{11 \leqq j \leqq \beta \\ 2 \nmid j}} \frac{1}{\varphi^2(j)} < \left(\frac{5}{4}\right)^2 \sum_{\substack{11 \leqq j \leqq \beta \\ 2 \nmid j}} j^{-5/3} < \left(\frac{5}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=10}^{\infty} j^{-5/3} < \left(\frac{5}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_9^\infty j^{-5/3}\, dj < \frac{45}{144},$$

woraus die Behauptung mit $C_1 = \frac{50}{144}$ folgt.

Hilfssatz 3. *Sei m ganz, h ganz und $\geqq 1$. Sei*

$$W_m^*(h) = \sum_{b \mid (h, m)} b\mu\left(\frac{h}{b}\right); \quad W_m(h) = \frac{\mu^2(h)}{\varphi^2(h)} W_m^*(h).$$

Dann ist

$$W_m(h) = \frac{\mu^2(h)}{\varphi(D)} \cdot \frac{\mu\left(\frac{h}{D}\right)}{\varphi^2\left(\frac{h}{D}\right)} \quad \textit{mit } D = (h, m).$$

Beweis. Aus $(h_1, h_2) = 1$ folgt leicht

$$(1)\qquad \begin{aligned} W_m^*(h_1)\cdot W_m^*(h_2) &= \Big(\sum_{b_1 \mid (h_1, m)} b_1 \mu\Big(\frac{h_1}{b_1}\Big)\Big)\Big(\sum_{b_2 \mid (h_2, m)} b_2 \mu\Big(\frac{h_2}{b_2}\Big)\Big) \\ &= \sum_{b \mid (h_1 h_2, m)} b\mu\Big(\frac{h_1 h_2}{b}\Big) = W_m^*(h_1 h_2). \end{aligned}$$

Für quadratbehaftetes h ist nun die Behauptung des Hilfssatzes 3 trivial (beide Seiten verschwinden dann wegen $\mu(h) = 0$). Sei also h quadratfrei. Dann ist $\left(\frac{h}{D}, D\right) = 1$ und es folgt aus (1):

$$W_m^*(h) = W_m^*(D)\cdot W_m^*\Big(\frac{h}{D}\Big).$$

Hierin ist einmal wegen $D \mid m$; $(D, m) = D$ und nach Landau ([10], Satz 40)

$$W_m^*(D) = \sum_{b \mid D} b\mu\Big(\frac{D}{b}\Big) = \sum_{b \mid D} \frac{D}{b}\,\mu(b) = \varphi(D).$$

Andererseits ist wegen der Quadratfreiheit von h

$$\Big(\frac{h}{D}, m\Big) = \Big(\frac{h}{(h, m)}, m\Big) = 1;\quad W_m^*\Big(\frac{h}{D}\Big) = \sum_{b \mid 1} b\mu\Big(\frac{h}{D\cdot b}\Big) = \mu\Big(\frac{h}{D}\Big).$$

Daher wird

$$W_m^*(h) = \mu\Big(\frac{h}{D}\Big)\cdot\varphi(D);\quad W_m(h) = \frac{\mu^2(h)}{\varphi^2(h)}\cdot\mu\Big(\frac{h}{D}\Big)\cdot\varphi(D) = \frac{\mu^2(h)}{\varphi(D)}\cdot\frac{\mu\Big(\frac{h}{D}\Big)}{\varphi^2\Big(\frac{h}{D}\Big)},$$

wobei nochmals $\left(\frac{h}{D}, D\right) = 1$ für quadratfreies h beachtet wurde.

Hilfssatz 4. *Sei $m \geqq 2$ gerade; $\gamma \geqq 1$; $K \geqq 1$ ganz;*

$$S_\gamma^*(m) = \sum_{\substack{h \leqq \gamma \\ (h, K) = 1}} W_m(h).$$

Dann ist

$$S_\gamma^*(m) > C_1 > 0$$

unabhängig von m, K und γ.

Beweis. Nach Hilfssatz 3 ist

$$S_\gamma^*(m) = \sum_{\substack{h \leqq \gamma \\ (h, K) = 1}} \frac{\mu^2(h)}{\varphi(D)}\cdot\frac{\mu\Big(\frac{h}{D}\Big)}{\varphi^2\Big(\frac{h}{D}\Big)}.$$

Nun entspricht jedem h mit

$$h \leqq \gamma;\ (h, K) = 1;\ \mu(h) \neq 0$$

genau ein Wertepaar D, j mit

$$(2)\qquad \begin{cases} Dj = h;\ D \leqq \gamma;\ D \mid m;\ (D, K) = 1;\ \mu(D) \neq 0; \\ j \leqq \dfrac{\gamma}{D};\ (j, Km) = 1;\ \mu(j) \neq 0. \end{cases}$$

Denn erstens erfüllen $D = (h, m)$; $j = \frac{h}{D}$ alle Bedingungen (2) [$(j, m) = 1$ folgt dann aus $\mu(h) = 0$; alles andere ist sofort zu sehen] und zweitens ist D $\left(\text{also auch } j = \frac{h}{D}\right)$ durch die Bedingungen eindeutig bestimmt (aus $D \mid m$ und $(j, Km) = 1$ folgt nämlich $D = (Dj, m) = (h, m)$).

Andererseits entspricht jedem Wertepaar D, j mit

$$D \leqq \gamma;\ D \mid m;\ (D, K) = 1;\ \mu(D) \neq 0;$$

$$j \leqq \frac{\gamma}{D};\ (j, Km) = 1;\ \mu(j) \neq 0$$

genau ein h mit

$$h = Dj;\ h \leqq \gamma;\ (h, K) = 1;\ \mu(h) \neq 0$$

(aus $D \mid m$; $(j, Km) = 1$ folgt nämlich $(j, D) = 1$; $\mu(h) = \mu(j)\mu(D) \neq 0$; alles andere ist sofort zu sehen).

Es ist daher

$$S_\gamma^*(m) = \sum_{\substack{D \mid m \\ D \leqq \gamma \\ (D, K) = 1}} \frac{\mu^2(D)}{\varphi(D)} \sum_{\substack{j \leqq \frac{\gamma}{D} \\ (j, Km) = 1}} \frac{\mu^3(j)}{\varphi^2(j)} = \sum_{\substack{D \mid m \\ D \leqq \gamma \\ (D, K) = 1}} \frac{\mu^2(D)}{\varphi(D)} \sum_{j \leqq \frac{\gamma}{D}} \frac{\chi(Km, j)\,\mu(j)}{\varphi^2(j)}$$

(man beachte, daß im Falle $\mu(h) \neq 0$ stets $\mu^2(h)\mu(j) = \mu^2(D)\mu^3(j) = \mu^2(D)\mu(j)$ ist). Nach Hilfssatz 2 mit $\beta = \frac{\gamma}{D}$ und $g = Km$ folgt weiter

$$S_\gamma^*(m) \geqq \sum_{\substack{D \mid m \\ D \leqq \gamma \\ (D, K) = 1}} \frac{\mu^2(D)}{\varphi(D)} \cdot C_1 \geqq \frac{\mu^2(1)}{\varphi(1)} \cdot C_1 = C_1 > 0,$$

wie zu beweisen war.

§ 2. Ansatz.

(a) Es sei $K \geqq 1$ beliebig aber fest gegeben.

(b) Es seien a_1 und a_2 zu K teilerfremd beliebig gegeben.

(c) Es sei für $|w| < 1$

$$F(w, a_y) = \varphi(K) \sum_{p_y \equiv a_y (K)} (\log p_y)\, w^{p_y},$$

wo die p_y (wie im folgenden stets) unabhängig voneinander die ungeraden Primzahlen durchlaufen, und

$$H(w) = F(w, a_1) \cdot F(w, a_2).$$

Die Definitionen (a) bis (c) gelten im folgenden ständig.

(d) Es ist für $|w| < 1$

$$H(w) = \varphi^2(K) \sum_{m=0}^{\infty} \nu(m)\, w^m$$

mit

$$\nu(m) = \sum_{\substack{p_1 + p_2 = m \\ p_y \equiv a_y (K)}} (\log p_1)(\log p_2),$$

wie sich durch Ausmultiplizieren des definierenden Produktes unmittelbar ergibt.

(e) Für jedes ganze $k > 0$ sei

$$d = (K, k);\ Q \pmod d \text{ so bestimmt, daß } \frac{k \cdot Q}{d} \equiv 1 \pmod d;$$

$$R = \frac{k \cdot Q}{d} \ (R \text{ also mod } k \text{ bestimmt und } \equiv 1 \pmod d);$$

$$N(k) = 1 \text{ oder } 0, \text{ je nachdem } \left(\frac{k}{d}, K\right) = 1 \text{ oder } > 1 \text{ ist.}$$

(f) Im folgenden sei ständig $A > 2$ beliebig aber fest gegeben; $A_1 = 4A + 38$; $A_2 = \frac{A}{3}$; n ganz und genügend groß (d. h. $> C$); $\tau = \log^{A_1} n$.

(g) Es sei

$$S_\gamma(m) = \sum_{k \leq \gamma} N(k) \frac{\mu^2}{\varphi^2}\left(\frac{k}{d}\right) \sum_{\substack{1 \leq l \leq k \\ (l,k)=1}} e^{2\pi i \frac{l}{k}(R(a_1+a_2)-m)}.$$

Dann ist (unabhängig von n und m)

$$S_{\sqrt{\tau}}(m) \geqq C_1 > 0 \text{ für gerades } m \equiv a_1 + a_2 \pmod{K}.$$

Für ganzes M ist nämlich nach Landau ([10], Satz 222)

$$\sum_{\substack{1 \leq l \leq k \\ (l,k)=1}} e^{2\pi i \frac{l}{k}\mathsf{M}} = \sum_{b \mid (k, \mathsf{M})} b\mu\left(\frac{k}{b}\right) = W^*_{\mathsf{M}}(k).$$

Nun ist

$$\text{(g. 1)} \qquad \left(\frac{k}{d}, K\right) = \left(\frac{k}{d}, k, K\right) = \left(\frac{k}{d}, (k, K)\right) = \left(\frac{k}{d}, d\right).$$

Für alle k mit $N(k) \neq 0$ gilt daher infolge § 1, (1)

$$W^*_{\mathsf{M}}(k) = W^*_{\mathsf{M}}\left(\frac{k}{d}\right) \cdot W^*_{\mathsf{M}}(d).$$

Jetzt ist, wenn man

$$\mathsf{M} = R(a_1 + a_2) - m = \frac{k \cdot Q}{d}(a_1 + a_2) - m$$

setzt,

$$\left(\frac{k}{d}, \mathsf{M}\right) = \left(\frac{k}{d}, \frac{k}{d} Q(a_1 + a_2) - m\right) = \left(\frac{k}{d}, m\right)$$

und (wegen $R \equiv 1(d)$, $m \equiv a_1 + a_2(K)$ und $d \mid K$)

$$(d, \mathsf{M}) = (d, R(a_1 + a_2) - m) = (d, (a_1 + a_2) - m) = d.$$

Daher wird bei dieser Wahl von M

$$W^*_{\mathsf{M}}\left(\frac{k}{d}\right) = \sum_{b \mid \left(\frac{k}{d}, m\right)} b\mu\left(\frac{k}{db}\right) = W^*_m\left(\frac{k}{d}\right);$$

$$W^*_{\mathsf{M}}(d) = \sum_{b \mid d} b\mu\left(\frac{d}{b}\right) = \sum_{b \mid d} \frac{d}{b}\mu(b) = \varphi(d),$$

letzteres nach Landau ([10], Satz 40). Damit kommt

$$\sum_{\substack{1 \leq l \leq k \\ (l,k)=1}} e^{2\pi i \frac{l}{k}\left(R(a_1+a_2)-m\right)} = W^*_m\left(\frac{k}{d}\right) \cdot \varphi(d);$$

$$S_{\sqrt{\tau}}(m) = \sum_{\substack{k \leq \sqrt{\tau} \\ \left(\frac{k}{d}, K\right)=1}} W_m\left(\frac{k}{d}\right) \varphi(d) = \sum_{d \mid K} \varphi(d) \sum_{\substack{h \leq \frac{\sqrt{\tau}}{d} \\ (h, K)=1}} W_m(h) = \sum_{d \mid K} \varphi(d)\, S^*_{\frac{\sqrt{\tau}}{d}}(m)$$

$$\geqq \sum_{d \mid K} \varphi(d) \cdot C_1 = C_1 \cdot K \geqq C_1 > 0$$

nach § 1, Hilfssatz 4, wegen $d \leqq K \leqq \sqrt{\tau}$ und nach Landau ([10], Satz 39).

(h) Es sei für $|w| < 1$

$$G_{\sqrt{\tau}}(w) = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)\, S_{\sqrt{\tau}}(m)\, w^m.$$

Das konvergiert für $|w| < 1$ wegen

$$S_{\sqrt{\tau}}(m) \ll \sum_{\substack{k \leq \sqrt{\tau} \\ \left(\frac{k}{d}, K\right)=1}} \frac{1}{\varphi^2\left(\frac{k}{d}\right)} \varphi(k) = \sum_{\substack{k \leq \sqrt{\tau} \\ \left(\frac{k}{d}, d\right)=1}} \frac{\varphi^2(d)}{\varphi(k)} \ll \sum_{k \leq \sqrt{\tau}} \frac{1}{\varphi(k)} \leqq \sqrt{\tau}$$

(beachte (g. 1); also $\varphi\left(\frac{k}{d}\right) = \frac{\varphi(k)}{\varphi(d)}$ und $\varphi(d) \leqq d \leqq K \ll 1$).

(i) Es ist mit $r = e^{-1/n}$

$$\sum_{n \log^{-A_2} n < m \leqq n} (\varphi^2(K)\, \nu(m) - (m+1)\, S_{\sqrt{\tau}}(m))^2 \ll \int_0^{2\pi} |H(re^{i\alpha}) - G_{\sqrt{\tau}}(re^{i\alpha})|^2\, d\alpha = J(n).$$

$J(n)$ hängt vermittels r und $\sqrt{\tau}$ von n ab. A und K werden nicht in die Bezeichnung aufgenommen, da sie fest sind; a_1 und a_2 nicht, da $J(n)$ später unabhängig von diesen abgeschätzt werden kann.

Die Richtigkeit von (i) ist wie folgt einzusehen: Es ist wegen $e^{-2} \leqq e^{-2m/n}$ für $m \leqq n$:

$$\begin{aligned} &2\pi\, e^{-2} \sum_{n \log^{-A_2} n \leqq m \leqq n} (\varphi^2(K) \cdot \nu(m) - (m+1) \cdot S_{\sqrt{\tau}}(m))^2 \\ &\leqq 2\pi \sum_{n \log^{-A_2} n \leqq m \leqq n} (\varphi^2(K) \cdot \nu(m) - (m+1) \cdot S_{\sqrt{\tau}}(m))^2 \cdot r^{2m} \\ &\leqq 2\pi \sum_{m=0}^{\infty} (\varphi^2(K) \cdot \nu(m) - (m+1) \cdot S_{\sqrt{\tau}}(m))^2 \cdot r^{2m}. \end{aligned}$$

Da nun nach (d) und (h) für $|w| < 1$

$$H(w) - G_{\sqrt{\tau}}(w) = \sum_{m=0}^{\infty} (\varphi^2(K) \cdot \nu(m) - (m+1) \cdot S_{\sqrt{\tau}}(m)) \cdot w^m$$

ist, so ist mit $w = re^{i\alpha}$ nach Landau ([10], Satz 223)

$$2\pi \sum_{m=0}^{\infty} (\varphi^2(K) \cdot \nu(m) - (m+1) \cdot S_{\sqrt{\tau}}(m))^2 \cdot r^{2m} = \int_{-\pi}^{+\pi} = \int_0^{2\pi} |H(re^{i\alpha}) - G_{\sqrt{\tau}}(re^{i\alpha})|^2\, d\alpha,$$

und es folgt die Behauptung (i).

Das Resultat (i) ist der Ansatzpunkt für den späteren Beweis des in der Einleitung angekündigten Satzes (2'). Das Integral $J(n)$ wird im nächsten Paragraphen abgeschätzt; das Endergebnis folgt dann leicht im letzten Paragraphen.

§ 3. Abschätzung des Integrales $J(n)$.

(a) Es seien $K, a_1, a_2, A, A_1, A_2, n, \tau$ und r definiert wie früher (§ 2 (a), (b), (f), (i)).

(b) Es seien $F(w, a)$, $H(w)$, $G_{\sqrt{\tau}}(w)$ definiert wie früher (§ 2 (c), (h)).

(c) Es sei $\mathfrak{C}_r$ der Kreis $w = re^{i\alpha}$; $0 \leqq \alpha < 2\pi$ und $\mathfrak{C}_{r\varrho}$ der Fareybogen $w = re^{i\alpha}$; $\alpha_{\varrho 1} \leqq \alpha < \alpha_{\varrho 2}$, der bei der Fareyzerschneidung der Ordnung τ den Punkt

$$\varrho = e^{2\pi i \frac{l}{k}};\ 1 \leqq l \leqq k \leqq \tau;\ (l, k) = 1$$

im Inneren enthält.

Bekanntlich sind l und k dann eindeutig durch ϱ bestimmt. $\frac{\alpha_{\varrho 1}}{2\pi}$ und $\frac{\alpha_{\varrho 2}}{2\pi}$ sind untere und obere Mediante von $\frac{l}{k}$.

(d) (Großer Hilfssatz) Für $w \in \mathfrak{C}_{r\varrho}$ (d. h. $\alpha_{\varrho 1} \leqq \alpha \leqq \alpha_{\varrho 2}$) gilt:

$$F(w, a_y) - \psi_\varrho(w, a_y) \ll n \log^{-A} n$$

mit $\psi_\varrho(w, a_y) = N(k)\, \frac{\mu}{\varphi}\left(\frac{k}{d}\right) \cdot \varrho^{Ra_y} \cdot \Phi_\varrho(w)$ und $\Phi_\varrho(w) = \frac{1}{1 - w\varrho^{-1}}$.

Dies folgt aus [11], Satz 7, wenn man dort speziell $M = n$ setzt (vgl. hierzu [11], § 4. 3 (f)).

Zur beabsichtigten Anwendung von (d) wird der Integrationsweg $\mathfrak{C}_r$ von $J(n)$ in Bogen $\mathfrak{C}_{r\varrho}$ zerlegt, und auf jedem Bogen $\mathfrak{C}_{r\varrho}$ der Integrand geeignet umgeformt.

(e) Haben d, Q, R und N die in § 2 (e) festgelegte Bedeutung, so ist auf $\mathfrak{C}_{r\varrho}$:

$$H(w) - G_{\sqrt{\tau}}(w) = N(k)\frac{\mu^2}{\varphi^2}\left(\frac{k}{d}\right)\cdot \varrho^{R(a_1+a_2)}\cdot \Phi_\varrho^2(w) - G_{\sqrt{\tau}}(w)$$
$$+ \psi_\varrho(w, a_1)\cdot\{F(w, a_2) - \psi_\varrho(w, a_2)\} + \{F(w, a_1) - \psi_\varrho(w, a_1)\}\cdot F(w, a_2)$$
$$= (U_\varrho^{\langle 0\rangle}(w) - G_{\sqrt{\tau}}(w)) + U_\varrho^{\langle 1\rangle}(w) + U_\varrho^{\langle 2\rangle}(w),$$

wo die $U_\varrho^{\langle\lambda\rangle}$ zeilenweise durch die vorstehende Gleichung definiert sind. Denn es ist nach Definition von $\psi_\varrho(w, a_y)$ und wegen $N^2(k) = N(k)$

$$\psi_\varrho(w, a_1)\cdot\psi_\varrho(w, a_2) = N(k)\frac{\mu^2}{\varphi^2}\left(\frac{k}{d}\right)\cdot \varrho^{R(a_1+a_2)}\cdot \Phi_\varrho^2(w) = U_\varrho^{\langle 0\rangle}(w).$$

(f) Es ist

$$J(n) = \int_0^{2\pi} |H(re^{i\alpha}) - G_{\sqrt{\tau}}(re^{i\alpha})|^2\, d\alpha \ll$$
$$\ll \sum_\varrho \int_{\alpha_{\varrho 1}}^{\alpha_{\varrho 2}} |U_\varrho^{\langle 0\rangle}(re^{i\alpha}) - G_{\sqrt{\tau}}(re^{i\alpha})|^2\, d\alpha + \sum_\varrho \int_{\alpha_{\varrho 1}}^{\alpha_{\varrho 2}} |U_\varrho^{\langle 1\rangle}(re^{i\alpha})|^2\, d\alpha + \sum_\varrho \int_{\alpha_{\varrho 1}}^{\alpha_{\varrho 2}} |U_\varrho^{\langle 2\rangle}(re^{i\alpha})|^2\, d\alpha$$

nach (e) und wegen $|a + b + c|^2 \leqq 3(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2)$.

Die Posten rechts in (f) werden nun einzeln abgeschätzt.

(g) Es ist

$$\sum \int_{\alpha_{\varrho 1}}^{\alpha_{\varrho 2}} |U_\varrho^{\langle 1\rangle}(re^{i\alpha})|^2\, d\alpha \ll n^3 \log^{-A} n;$$

denn nach (d) und wegen $|\mu| \leqq 1$, $|\varrho| = 1$ ist auf $\mathfrak{C}_{r\varrho}$:

$$|U_\varrho^{\langle 1\rangle}(w)|^2 = |\psi_\varrho(w, a_1)|^2\cdot|F(w, a_2) - \psi_\varrho(w, a_2)|^2 \ll n^2 \log^{-2A} n\cdot\frac{N(k)}{\varphi^2\left(\frac{k}{d}\right)}\,|\Phi_\varrho^2(w)|;$$

$$\sum_\varrho \int_{\alpha_{\varrho 1}}^{\alpha_{\varrho 2}} |U_\varrho^{\langle 1\rangle}(re^{i\alpha})|^2\, d\alpha \ll n^2 \log^{-2A} n\cdot \sum \frac{N(k)}{\varphi^2\left(\frac{k}{d}\right)} \int_{\alpha_{\varrho 1}}^{\alpha_{\varrho 2}} |\Phi_\varrho^2(re^{i\alpha})\, d\alpha$$
$$\ll n^3 \log^{-2A} n\cdot \sum_\varrho \frac{N(k)}{\varphi^2\left(\frac{k}{d}\right)} \ll n^3 \log^{1-2A} n \leqq n^3 \log^{-A} n,$$

wobei noch [11], § 4. 3 (h), (k. 1) verwendet wurde.

(h) Es ist

$$\sum_\varrho \int_{\alpha_{\varrho 1}}^{\alpha_{\varrho 2}} |U_\varrho^{\langle 2\rangle}(re^{i\alpha})|^2\, d\alpha \ll n^3 \log^{-A} n.$$

Denn nach (d) ist auf $\mathfrak{C}_{r\varrho}$:

$$|U_\varrho^{\langle 2\rangle}(w)|^2 = |F(w, a_1) - \psi_\varrho(w, a_1)|^2\cdot|F(w, a_2)|^2 \ll n^2 \log^{-2A} n\cdot|F(w, a_2)|^2;$$
$$\sum_\varrho \int_{\alpha_{\varrho 1}}^{\alpha_{\varrho 2}} |U_\varrho^{\langle 2\rangle}(re^{i\alpha})|^2\, d\alpha \ll n^2 \log^{-2A} n\cdot \sum_\varrho \int_{\alpha_{\varrho 1}}^{\alpha_{\varrho 2}} |F(re^{i\alpha}, a_2)|^2\, d\alpha$$
$$= n^2 \log^{-2A} n\cdot \int_0^{2\pi} |F(re^{i\alpha}, a_2)|^2\, d\alpha \ll n^3 \log^{2-2A} n \leqq n^3 \log^{-A} n,$$

wobei noch [11], § 4. 3 (i) benutzt wurde.

Zur späteren Anwendung sei noch gleich vorausgeschickt, daß nach der Schwarzschen Ungleichung für endliche Summen gilt:

(i) Es ist

$$\left|\sum_\lambda \xi_\lambda\right|^2 \leqq \left(\sum_\lambda 1\cdot|\xi_\lambda|\right)^2 \leqq \left(\sum_\lambda 1\right)\left(\sum_\lambda |\xi_\lambda|^2\right).$$

(j) Es ist

$$\sum_{\varrho} \int_{\alpha_{\varrho 1}}^{\alpha_{\varrho 2}} | U_{\varrho}^{\langle 0 \rangle}(re^{i\alpha}) - G_{\sqrt{\tau}}(re^{i\alpha}) |^2 \, d\alpha \ll n^3 \log^{-A} n.$$

Denn es ist zunächst wegen

$$\Phi_{\varrho'}^2(w) = \frac{1}{(1 - w\varrho'^{-1})^2} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)(w\varrho'^{-1})^m; \quad \varrho' = e^{2\pi i \frac{l'}{k'}}$$

und wegen der absoluten Konvergenz für $|w| < 1$, wenn

(j. 1) $\qquad \varrho'$ in $\sum_{\varrho'}$ alle $\varrho' = e^{2\pi i \frac{l'}{k'}}$; $1 \leqq l' \leqq k' \leqq \sqrt{\tau}$; $(l', k') = 1$

durchläuft:

$$\sum_{\varrho'} N(k') \frac{\mu^2}{\varphi^2}\left(\frac{k'}{d'}\right) \cdot \varrho'^{R'(a_1+a_2)} \cdot \Phi_{\varrho'}^2(w)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) w^m \sum_{\varrho'} N(k') \frac{\mu^2}{\varphi^2}\left(\frac{k'}{d'}\right) \cdot \varrho'^{R'(a_1+a_2)-m} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) w^m S_{\sqrt{\tau}}(m) = G_{\sqrt{\tau}}(w) .$$

Daher ist, im Verein mit der Definition von $U_{\varrho}^{\langle 0 \rangle}(w)$, auf $\mathfrak{C}_{r\varrho}$:

$$G_{\sqrt{\tau}}(w) - U_{\varrho}^{\langle 0 \rangle}(w) = \sum_{\varrho' \neq \varrho} N(k') \frac{\mu^2}{\varphi^2}\left(\frac{k'}{d'}\right) \cdot \varrho'^{R'(a_1+a_2)} \cdot \Phi_{\varrho'}^2(w) - \begin{cases} 0 & , \text{ falls } k \leqq \sqrt{\tau} \\ U_{\varrho}^{\langle 0 \rangle}(w), & \text{falls } k > \sqrt{\tau} \end{cases}$$

$$\ll \sum_{\varrho' \neq \varrho} |\Phi_{\varrho'}^2(w)| + \begin{cases} 0 & , \text{ falls } k \leqq \sqrt{\tau} \\ |U_{\varrho}^{\langle 0 \rangle}(w)|, & \text{falls } k > \sqrt{\tau} \end{cases}$$

(beachte $|N| \leqq 1$; $\left|\frac{\mu^2}{\varphi^2}\right| \leqq 1$; $|\varrho'| = 1$). Es ist also auf $\mathfrak{C}_{r\varrho}$:

$$|G_{\sqrt{\tau}}(w) - U_{\varrho}^{\langle 0 \rangle}(w)|^2 \ll \left(\sum_{\varrho' \neq \varrho} |\Phi_{\varrho'}^2(w)|\right)^2 + \begin{cases} 0 & , \text{ falls } k \leqq \sqrt{\tau} \\ |U_{\varrho}^{\langle 0 \rangle}(w)|^2, & \text{falls } k > \sqrt{\tau} \end{cases}$$

(j. 2) $$\ll \tau \sum_{\varrho' \neq \varrho} |\Phi_{\varrho'}^4(w)| + \begin{cases} 0 & , \text{ falls } k \leqq \sqrt{\tau} \\ |U_{\varrho}^{\langle 0 \rangle}(w)|^2, & \text{falls } k > \sqrt{\tau} \end{cases}$$

wobei (i) angewendet und noch beachtet wurde:

(j. 3) $$\sum_{\varrho' \neq \varrho} 1 \leqq \sum_{\varrho'} 1 = \sum_{k' \leqq \sqrt{\tau}} \sum_{\substack{1 \leqq l' \leqq k' \\ (l', k') = 1}} 1 = \sum_{k' \leqq \sqrt{\tau}} \varphi(k') \leqq \sqrt{\tau} \cdot \sqrt{\tau} = \tau .$$

In den folgenden Punkten (k) und (l) wird gezeigt, daß $\sum_{\varrho} \int_{\alpha_{\varrho 1}}^{\alpha_{\varrho 2}} \cdots d\alpha$ über jeden der beiden Terme rechts in (j. 2) ein $O(n^3 \log^{-A} n)$ ist. Damit wird dann (j) bewiesen sein.

(k) Es ist

$$\sum_{\varrho} \int_{\alpha_{\varrho 1}}^{\alpha_{\varrho 2}} \tau \sum_{\varrho' \neq \varrho} |\Phi_{\varrho'}^4(re^{i\alpha})| \, d\alpha \ll n^3 \log^{-A} n .$$

Um die Aussage (k) zu beweisen, ist es bequem, zu jedem ϱ die ϱ' statt durch (j. 1) folgendermaßen zu bezeichnen:

(k. 1) $\qquad \varrho'$ durchläuft in $\sum_{\varrho'}$ alle $\varrho' = e^{2\pi i \frac{l'}{k'}}$ mit

$$1 \leqq k' \leqq \sqrt{\tau}; \; k'\left(\frac{l}{k} - \frac{1}{2}\right) \leqq l' \leqq k'\left(\frac{l}{k} + \frac{1}{2}\right); \; (l', k') = 1 .$$

(Das besagt dasselbe wie (j. 1); denn es ist offenbar gleichgültig, welches reduzierte Restsystem l' (mod k') durchläuft.) Nach (k. 1) ist dann

$$\left|\frac{l}{k} - \frac{l'}{k'}\right| \leqq \frac{1}{2}; \; \left|\frac{l}{k} - \frac{l'}{k'}\right| = \frac{|lk' - kl'|}{kk'} \geqq \frac{1}{kk'} \geqq \frac{1}{k\sqrt{\tau}},$$

letzteres, da $\varrho' \neq \varrho$; also $\frac{l}{k} - \frac{l'}{k'} \neq 0$ ist. Setzt man

$$\vartheta = \operatorname{arc} w\varrho^{-1} = \alpha - 2\pi \frac{l}{k},$$

so ist daher nach [11], § 3. 2 (g) für $w \in \mathfrak{C}_{r\varrho}$ (und genügend großes n)

$$\text{(k. 2)} \quad \left|2\pi\left(\frac{l}{k} - \frac{l'}{k'}\right) + \vartheta\right| \geqq 2\pi\left|\frac{l}{k} - \frac{l'}{k'}\right| - |\vartheta| \geqq \frac{2\pi}{k}\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}} - \frac{1}{\tau}\right) \geqq \frac{C_2}{k\sqrt{\tau}}.$$

Nun ist jeder Punkt des Kreises $|z| = e^{-1/n}$ von $e^{-1/n}$ weniger weit entfernt als von 1; also ist für $w \in \mathfrak{C}_{r\varrho}$:

$$\text{(k. 3)} \quad |1 - w\varrho'^{-1}| = \left|1 - e^{-\frac{1}{n} + i\left(\alpha - 2\pi\frac{l'}{k'}\right)}\right| \geqq \left|1 - e^{i\left(\alpha - 2\pi\frac{l'}{k'}\right)}\right| \cdot e^{-\frac{1}{n}}$$

$$\geqq \left|1 - e^{i\left\{2\pi\left(\frac{l}{k} - \frac{l'}{k'}\right) + \vartheta\right\}}\right| e^{-1}.$$

Jetzt ist wegen der Regularität von $\frac{1}{1 - e^{-\zeta}} - \frac{1}{\zeta}$ für $|\zeta| < 2\pi$:

$$\frac{1}{1 - e^{-\zeta}} = \frac{1}{\zeta} + O(1) \ll \frac{1}{|\zeta|} + 1 \ll \frac{1}{|\zeta|} \text{ für } |\zeta| \leqq \frac{3}{2}\pi$$

$\left(\text{beachte } 1 \ll \frac{2}{3\pi} \leqq \frac{1}{|\zeta|}\right)$. Aus

$$\left|2\pi\left(\frac{l}{k} - \frac{l'}{k'}\right) + \vartheta\right| \leqq 2\pi\left|\frac{l}{k} - \frac{l'}{k'}\right| + |\vartheta| \leqq 2\pi \cdot \frac{1}{2} + \frac{2\pi}{k\tau} < \frac{3\pi}{2}$$

(siehe [11], § 3. 2 (g)) folgt deshalb in Verbindung mit (k. 3) und (k. 2) für $w \in \mathfrak{C}_{r\varrho}$

$$|\Phi_{\varrho'}(w)| = \frac{1}{\left|1 - w\varrho'^{-1}\right|} \ll \frac{1}{\left|1 - e^{i\left\{2\pi\left(\frac{l}{k} - \frac{l'}{k'}\right) + \vartheta\right\}}\right|} \ll \frac{1}{\left|2\pi\left(\frac{l}{k} - \frac{l'}{k'}\right) + \vartheta\right|} \ll k \cdot \sqrt{\tau} \leqq \tau^{3/2},$$

also nach (j. 3)

$$\tau \cdot \sum_{\varrho' \neq \varrho} |\Phi^4_{\varrho'}(w)| \ll \tau \cdot \tau^6 \sum_{\varrho' \neq \varrho} 1 \ll \tau^8;$$

$$\sum_{\varrho} \int_{\alpha_{\varrho 1}}^{\alpha_{\varrho 2}} \tau \sum_{\varrho' \neq \varrho} |\Phi^4_{\varrho'}(re^{i\alpha})|\, d\alpha \ll \tau^8 \sum_{\varrho} \int_{\alpha_{\varrho 1}}^{\alpha_{\varrho 2}} d\alpha = 2\pi\tau^8 \ll n^3 \log^{-A} n,$$

wie unter (k) behauptet.

(l) Es ist

$$\sum_{\substack{\varrho \\ \sqrt{\tau} < k \leqq \tau}} \int_{\alpha_{\varrho 1}}^{\alpha_{\varrho 2}} |U_\varrho^{\langle 0 \rangle}(re^{i\alpha})|^2\, d\alpha \ll n^3 \log^{-A} n.$$

Denn wegen $|\mu| \leqq 1$, $|\varrho| = 1$ ist

$$|U_\varrho^{\langle 0 \rangle}(w)|^2 \leqq N(k) \frac{1}{\varphi^4\left(\frac{k}{d}\right)} |\Phi^4_\varrho(w)|,$$

und daher wird nach [11]; § 4. 3 (h)

$$\sum_{\substack{\varrho \\ \sqrt{\tau} < k \leqq \tau}} \int_{\alpha_{\varrho 1}}^{\alpha_{\varrho 2}} |U_\varrho^{\langle 0 \rangle}(re^{i\alpha})|^2\, d\alpha \leqq \sum_{\substack{\varrho \\ \sqrt{\tau} < k \leqq \tau}} N(k) \frac{1}{\varphi^4\left(\frac{k}{d}\right)} \int_{\alpha_{\varrho 1}}^{\alpha_{\varrho 2}} |\Phi^4(re^{i\alpha})|\, d\alpha \ll n^3 \sum_{\substack{\varrho \\ \sqrt{\tau} < k \leqq \tau}} N(k) \frac{1}{\varphi^4\left(\frac{k}{d}\right)}$$

$$= n^3 \sum_{\sqrt{\tau} < k \leqq \tau} N(k) \frac{1}{\varphi^4\left(\frac{k}{d}\right)} \sum_{\substack{1 \leqq l \leqq k \\ (l,k) = 1}} 1 = n^3 \sum_{\sqrt{\tau} < k \leqq \tau} N(k) \frac{\varphi(k)}{\varphi^4\left(\frac{k}{d}\right)} \leqq n^3 \sum_{\sqrt{\tau} < k \leqq \tau} \frac{\varphi^4(d)}{\varphi^3(k)} \ll n^3 \sum_{k > \sqrt{\tau}} \frac{1}{\varphi^3(k)};$$

denn für alle k mit $N(k) \neq 0$ (also $N(k) = 1$) gilt $\varphi\left(\frac{k}{d}\right) = \frac{\varphi(k)}{\varphi(d)}$ nach § 2, (g. 1) und es ist $\varphi(d) \leqq d \leqq K \ll 1$. Nach Landau $\left([10], \text{Satz 245 mit } \varepsilon = \frac{1}{2}\right)$ gilt schließlich:

$$\sum_{k>\sqrt{\tau}} \frac{1}{\varphi^3(k)} \ll \sum_{k>\sqrt{\tau}} k^{-3/2} < \int_{[\sqrt{\tau}]}^{\infty} \frac{dk}{k^{3/2}} = \frac{2}{[\sqrt{\tau}]^{1/2}} \ll \tau^{-1/4} = \log^{-A-0,5} n < \log^{-A} n\,,$$

womit (l), also nach (k) und (j. 2) auch (j) bewiesen ist.

§ 4. Endresultate.

Satz 1. *Sei K eine beliebig aber fest vorgegebene ganze Zahl. Seien a_1 und a_2 beliebig zu K teilerfremd. Dann gilt:*

Fast alle geraden positiven Zahlen m mit

(1) $$m \equiv a_1 + a_2 \pmod K$$

sind in der Form

(2) $$m = p_1 + p_2;\ p_y \equiv a_y \pmod K;\ \ p_y \text{ ungerade Primzahl } (y = 1, 2)$$

darstellbar.

Genauer: Bezeichnet $B(x)$ für $x > 0$ die Anzahl der Ausnahmezahlen $\leqq x$ (d. h. der positiven geraden $m \leqq x$, die zwar (1) genügen, aber keine Darstellung (2) besitzen), so ist

$$\frac{B(x)}{x} \ll \log^{-A_2} x;\ A_2 > 0 \text{ beliebig aber fest.}$$

Beweis. Für die $B(n) - B(n \log^{-A_2} n)$ Ausnahmezahlen m mit $n \log^{-A_2} n < m \leqq n$ ist $\nu(m) = 0$, also

$$(\varphi^2(K)\,\nu(m) - (m+1)\,S_{\sqrt{\tau}}(m))^2 = (m+1)^2\,S^2_{\sqrt{\tau}}(m) \geqq m^2 \cdot C_1^2 \geqq C_1^2 \cdot n^2 \log^{-2A_2} n$$

nach § 2, (g). Daher ist

$$\begin{aligned}(B(n) - B(n \log^{-A_2} n)) \cdot C_1^2 \cdot n^2 \log^{-A} n \\ \leqq \sum_{\substack{n \log^{-A_2} n < m \leqq n \\ m \text{ Ausnahmezahl}}} (\varphi^2(K)\,\nu(m) - (m+1)\,S_{\sqrt{\tau}}(m))^2 \\ \leqq \sum_{n \log^{-A_2} n < m \leqq n} (\varphi^2(K)\,\nu(m) - (m+1)\,S_{\sqrt{\tau}}(m))^2 \ll n^3 \log^{-A_2} n,\end{aligned}$$

letzteres nach § 2 (i) und § 3 (f) (g), (h), (j). Also:

$$B(n) - B(n \log^{-A_2} n) \ll n^3 \log^{-A} n \cdot \frac{1}{C_1^2 \cdot n^2 \log^{-2A_2} n} \ll n \log^{-A_2} n;$$

$$B(n) = B(n \log^{-A_2} n) + O(n \log^{-A_2} n) \ll n \log^{-A_2} n$$

wegen $-A + 2A_2 = -A_2$ und $B(x) \leqq x$.

Die Behauptung ist damit für $A_2 > \frac{2}{3}$ und genügend großes n bewiesen. A fortiori gilt sie für beliebiges $A_2 > 0$ und beliebiges $x > 0$ statt n.

Zum Abschluß sei noch gezeigt, daß aus dem eben bewiesenen Satz 1 folgt:

Satz 2. *Sei $K \geqq 1$ eine beliebig aber fest gegebene ganze Zahl. Sei $Z \geqq 3$ beliebig und seien $a_1, \ldots, a_Z$ beliebig zu K teilerfremd.*

Dann ist jede genügend große natürliche Zahl $n (\geqq n_0(Z))$ mit

(3) $$n \equiv Z \pmod 2;\ n \equiv \sum_{y=1}^{Z} a_y \pmod K$$

in der Form

(4) $$n = \sum_{y=1}^{Z} p_y;\ \ p_y \equiv a_y \pmod K;\ \ p_y \text{ ungerade Primzahl}$$

darstellbar.

Beweis. Aus dem Primzahlsatz für arithmetische Progressionen folgt

(5) $$\pi_{K,a}(n) = \sum_{\substack{p \leqq n \\ p \equiv a(K)}} 1 \geqq \frac{1}{2}\,\frac{1}{\varphi(K)}\,\frac{n}{\log n} \text{ für } n \geqq n_1 = C_3;\ (a, K) = 1.$$

(Man denke sich n_1 gleich so groß, daß (5) gleichmäßig für alle die $\varphi(K)$ möglichen a-Werte gilt. Dann hängt n_1 nur von K ab, ist also konstant in unserem Sinne, d. h. wirklich $= C_3$). Aus (5) folgt

$$\pi_{K,a}(n) \geqq 3 \text{ für } n \geqq C_4. \tag{6}$$

Bezeichnet p_y' die kleinste ungerade Primzahl $\equiv a_y \pmod K$, so ist also nach (6):

$$\sum_{y=4}^{Z} p_y' \begin{cases} < \sum\limits_{y=4}^{Z} C_4 = (Z-3)\cdot C_4 = d(Z), & \text{falls } Z \geqq 4 \\ = 0 = d(3) & \text{, falls } Z = 3. \end{cases}$$

Ist nun der Satz 2 für $Z = 3$ bewiesen, so auch für $Z > 3$; denn für jedes $n' \geqq n_0(3) + d(Z) = n_0(Z)$, das (3) erfüllt, erfüllt

$$n' - \sum_{y=4}^{Z} p_y' = n$$

die Bedingungen (3) (mit $Z = 3$) und $n \geqq n_0(3)$.

Der Spezialfall $Z = 3$ des Satzes 2 ergibt sich nun folgendermaßen aus Satz 1: Es sei $\hat{n} \geqq \max(C_3, C_4)$, es erfülle $\hat{n}$ die Bedingung (3) (mit $Z = 3$), aber es besitze $\hat{n}$ keine Darstellung (4) (mit $Z = 3$). Dann ist offenbar jede der mindestens $\pi_{K,a_3}(\hat{n}) - 2$ Zahlen

$$m = \hat{n} - p_3 \text{ mit } p_3 < n;\ p_3 \equiv a_3 \pmod K;\ p_3 \text{ ungerade Primzahl}$$

eine Ausnahmezahl im Sinne von Satz 1, d. h. es ist

$$B(\hat{n}) \geqq \pi_{K,a_3}(\hat{n}) - 2 \geqq \frac{1}{3}\pi_{K,a_3}(\hat{n}) \geqq \frac{1}{6\,\varphi(K)}\frac{\hat{n}}{\log \hat{n}} \tag{7}$$

(wobei (5) und (6) berücksichtigt wurden). Nach Satz 1 ist aber (mit $A_2 = 2$)

$$B(\hat{n}) \leqq C_5 \cdot \hat{n} \log^{-2} \hat{n}.$$

Das besagt mit (7):

$$\frac{\hat{n}}{\log \hat{n}} \cdot \frac{1}{6\,\varphi(K)} \leqq C_5 \cdot \hat{n} \log^{-2} \hat{n};\ \log \hat{n} \leqq 6\,\varphi(K) \cdot C_5 = C_6;\ \hat{n} \leqq e^{C_6} = n_0(3),$$

womit Satz 2 im Falle $Z = 3$, also nach dem anfangs Gezeigten auch allgemein bewiesen ist.

Literaturverzeichnis.

[1] *G. H. Hardy* und *J. E. Littlewood*, Some problems of partitio numerorum. III: On the expression of a number as a sum of primes, Acta math. **44** (1922), 1–70: V: A further contribution to Goldbach's problem, Proceed. London Math. Soc. (2) **22** (1924), 46–56.

[2] *I. M. Vinogradov*, Representation of an odd number as a sum of three primes, Doklady Akad. Nauk SSSR **15** (1937), 291–294.

I. M. Vinogradov, Some theorems concerning the theory of primes, Mat. Sbornik **2** (**44**) (1937), 179–196.

[3] *N. G. Čudakov*, Sur le problème de Goldbach, Doklady Akad. Nauk SSSR **17** (1937), 335–338.

J. G. van der Corput, Sur l'hypothèse de Goldbach pour presque tous les nombres pairs, Acta arithm. Warszawa **2** (1937), 266–290.

T. Estermann, On Goldbach's problem, Proceed. London Math. Soc. (2) **44** (1938), 307–314.

[4] *Ju. V. Linnik*, A new proof of the Goldbach-Vinogradov theorem, Mat. Sbornik **19** (**61**) (1946), 3–8.

[5] *S. Chowla*, A new proof of a theorem of Siegel, Annals of Math. (2) **51** (1950), 120–122.

[6] *Ju. V. Linnik*, On the density of zeros of Dirichlet's L-series, Izvestija Akad. Nauk SSSR, ser. mat., **10** (1946), 35–46.

[7] *N. G. Čudakov*, On Goldbach-Vinogradov's theorem, Annals of Math. (2) **48** (1947), 515–542.

[8] *H. Rademacher*, Über eine Erweiterung des Goldbachschen Problems, Math. Zeitschr. **25** (1925), 627–657.

[9] *J. G. van der Corput*, Über Summen von Primzahlen und Primzahlquadraten, Math. Annalen **116** (1938), 1–50.

[10] *E. Landau*, Vorlesungen über Zahlentheorie **1**, Leipzig (1927).

[11] *A. Zulauf*, Beweis einer Erweiterung des Satzes von Goldbach-Vinogradov, Journal f. Math. **190** (1952), 169–198.

Eingegangen 25. April 1951.

Über die Transformationen der Hauptgruppe in der nichteuklidischen Geometrie und die komplexe Trigonometrie.

Dem Andenken an Geh.-Rat Professor Dr. Friedrich Schilling, 1868—1950, gewidmet.

Von *Kuno Fladt* in Calw (Württ. Schwarzwald).

Einleitung.

Die vorliegende Abhandlung ist zwei Problemen gewidmet: der Bestimmung der *Bewegungen* und *Umlegungen* in der nichteuklidischen Geometrie und der Begründung der allgemeinen *Trigonometrie* im nichteuklidischen Raume.

Die ersten Erforscher der nichteuklidischen Geometrie, also — von den Vorläufern abgesehen — Gauß, Bolyai und Lobatschefsky sind elementargeometrisch, d. h. um in den heutigen Begriffen zu sprechen, auf Grund der Hilbertschen Axiome der euklidischen und nichteuklidischen Geometrie[1]) vorgegangen, rechnerisch dabei nur, indem sie auf geometrischem Wege die Grundgleichungen der Trigonometrie gewannen (und damit zugleich die Widerspruchslosigkeit der nichteuklidischen Geometrie — beschränkt auf die hyperbolische — bewiesen). Die späteren Forscher, allen voran Felix Klein, machten die grundlegende Entdeckung, daß das ganze Lehrgebäude der nichteuklidischen Geometrie mit einem Schlag durchsichtig wird, wenn man sie in die projektive Geometrie einordnet. Auf diesem Wege sind die räumlichen Bewegungen und Umlegungen überhaupt erstmals gewonnen worden.

Solange man aber der euklidischen und nichteuklidischen Geometrie ein Eigenrecht zuerkennt und sie im wesentlichen durch die Kongruenzaxiome und ein Parallelenaxiom kennzeichnet, wird man auch verlangen, sie ohne Benützung spezifisch projektiver Begriffsbildungen aufzubauen. Es bleibt dann noch die Frage nach der Methode. Das Ideal wäre die rein geometrische, synthetische. Für die ebene Geometrie sind dazu Ansätze vorhanden[2]), für die Raumgeometrie ist diese Methode noch nicht durchgeführt, vielleicht auch deswegen, weil der rein geometrische Beweis der Vollständigkeit immer sehr schwierig ist. So bleibt die rechnerische Methode, aber eine solche, die sich möglichst an die Geometrie anlehnt und in ihren Ergebnissen zu dieser zurückführt. Felix Klein hat erkannt, daß in der euklidischen Geometrie die *Quaternionen* das geschmeidigste Rechenhilfsmittel sind. W. Clifford, A. Buchheim und E. Kosiol (s. u.) haben gezeigt, daß in der nichteuklidischen Geometrie *Biquaternionen* an deren Stelle treten müssen. Im folgenden wird die Theorie auf diesem Wege vollständig durchgeführt.

Als Hauptergebnis der Arbeit möchte ich aber bezeichnen, daß es auf dem nämlichen Wege überraschend einfach gelingt, auch die *Trigonometrie* zu gewinnen, und zwar sogleich

---

[1]) *D. Hilbert*, Grundlagen der Geometrie, 7. Auflage, Leipzig 1930.

[2]) *H. Liebmann*, Die Bewegungen in der hyperbolischen Geometrie, Math. Ann. **85**, 1922.

in ihrer allgemeinsten Form, im *Raum* und für *komplexe Argumente*. Fr. Schilling (s. u.) hat nämlich als erster gezeigt, daß drei windschiefe Geraden des nichteuklidischen Raumes zusammen mit den Geraden ihrer kürzesten Abstände ein sechsrechtwinkliges Sechseck bestimmen, in dem jede der 6 Geraden einen Winkel φ und einen Abstand σ zwischen ihren beiden Nachbargeraden hervorruft. φ und σ setzen sich zusammen zu einer komplexen Größe $\varphi + \sqrt{k}\sigma$ und zwischen den 6 komplexen Größen der 6 Geraden bestehen die Gleichungen der komplexen Trigonometrie, die alle „Trigonometrien" — z. B. die ebene und die sphärische als Spezialfälle — umfaßt.

Um die Rechenarten so kurz und elegant wie möglich und so zu gestalten, daß sie gleicherweise für die elliptische wie für die hyperbolische Geometrie gelten, ist es zweckmäßig, auch die *Kreis-* und die *Hyperbelfunktionen* zu *einer* Kategorie zusammenzufassen, die wir mangels eines besseren Namens *Kegelschnittsfunktionen* nennen. Das geschieht in § 1; § 2 ist den ebenen, § 3 den räumlichen Bewegungen und Umlegungen, § 4 der Trigonometrie gewidmet.

Wir schließen diese Einleitung mit einigen genaueren Literaturangaben.

Die Bewegungen und Umlegungen der nichteuklidischen Geometrie als automorphe Kollineationen eines Kegelschnitts bzw. einer Fläche 2. Ordnung, sind in ihrer allgemeinen Gestalt — aber ohne explizite Formeln — wohl erstmals bei Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie I, 1876, S. 130ff., und II_1, 1891, S. 356ff., zu finden, in spezieller Gestalt in Felix Kleins berühmten Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie, Ausgabe von 1928, S. 98ff., die ebenen Bewegungen in Gestalt sehr schöner allgemeiner Formeln bei H. Beck, Koordinatengeometrie, Berlin 1921, S. 278ff., und in der Abhandlung von K. Kommerell über die automorphen Kollineationen einer Kurve 2. Ordnung, erschienen im Jahresbericht der DMV 52, 1942, S. 28 (kursiv).

Die Trigonometrie der nichteuklidischen Ebene findet sich im Anschluß an die Autokollineationen eines Kegelschnitts bei H. Beck, a. a. O. S. 300ff. Fr. Schilling (1868 bis 1950) machte bei seinen grundlegenden Untersuchungen über die Schwarzsche s-Funktion (ausführlich in Mathematische Annalen 44, 1894, S. 1ff., kürzer bereits in 39, 1891, S. 598ff.) die Entdeckung, daß sich die Formeln der sphärischen Trigonometrie auch für komplexe Werte der Argumente sehr einfach geometrisch deuten lassen. Felix Klein hat diese Deutung in seinen Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion, neue Ausgabe, Berlin 1933, S. 36ff., aus der Invariantentheorie der binären quadratischen Formen erschlossen. Fr. Schilling hat sie sodann im 2. Band seiner Bewegungstheorie im nichteuklidischen hyperbolischen Raum, München 1948, S. 235ff., wieder auf rein projektivem Wege hergeleitet.

Im folgenden ergibt sich die „komplexe" Trigonometrie unmittelbar aus der Theorie der Bewegungen auf einem überraschend kurzen Wege.

§ 1. Vorbemerkungen.

1. Es ist äußerst zweckmäßig, zunächst die *Kreisfunktionen* $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, $\operatorname{tg}\varphi$, $\operatorname{ctg}\varphi$ und die *Hyperbelfunktionen* $\operatorname{ch}\varphi$, $\operatorname{sh}\varphi$, $\operatorname{th}\varphi$, $\operatorname{cth}\varphi$ auch in der Schreibweise zu einer einzigen Funktionsgattung zusammenzufassen. Beide Funktionen lassen sich als Flächenfunktionen des Sektors 2φ im Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$ bzw. der Einheitshyperbel $x^2 - y^2 = 1$ auffassen. Nimmt man statt der Einheit beim Kreis die Strecke $R = \frac{1}{\sqrt{k}}$, $k > 0$, bei der Hyperbel die Strecke $R = \frac{1}{\sqrt{-k}}$, $k < 0$, so treten an Stelle der beiden

ersten Funktionen die Funktionen $\cos\frac{\varphi}{R}$ usw. oder $\cos\sqrt{k}\varphi$, $\sin\sqrt{k}\varphi$, $\operatorname{ch}\sqrt{-k}\varphi$, $\operatorname{sh}\sqrt{-k}\varphi$ oder auch $\cos\sqrt{k\varepsilon}\varphi$, $\sin\sqrt{k\varepsilon}\varphi$, $\operatorname{ch}\sqrt{k\varepsilon}\varphi$, $\operatorname{sh}\sqrt{k\varepsilon}\varphi$, wo bei den Kreisfunktionen $k > 0$, $\varepsilon = +1$, bei den Hyperbelfunktionen $k < 0$, $\varepsilon = -1$ ist. Jetzt können wir für beide Funktionsarten dieselbe Bezeichnung $C_\varepsilon\sqrt{k\varepsilon}\varphi$, $S_\varepsilon\sqrt{k\varepsilon}\varphi$ gebrauchen, wo $\sqrt{k\varepsilon}\varphi$ als Argument (nicht als Faktor) zu verstehen ist und der Index ε darauf hinweist, daß zwischen ihnen die Gleichung

$$C_\varepsilon^2\sqrt{k\varepsilon}\varphi + \varepsilon S_\varepsilon^2\sqrt{k\varepsilon}\varphi = 1 \tag{0}$$

besteht. Die späteren Anwendungen, insbes. die Möglichkeit, zur Grenze $k \to 0$ übergehen zu können, erheischen aber noch eine Umbildung. Statt $C_\varepsilon\sqrt{k\varepsilon}\varphi$, $S_\varepsilon\sqrt{k\varepsilon}\varphi$ führen wir die Funktionen

$$C_k\varphi = C_\varepsilon\sqrt{k\varepsilon}\varphi \quad \text{und} \quad S_k\varphi = \frac{1}{\sqrt{k\varepsilon}}\, S_\varepsilon\sqrt{k\varepsilon}\varphi$$

ein, die nun die Gleichung

$$C_k^2\varphi + kS_k^2\varphi = 1 \tag{00}$$

erfüllen, $k > 0$ bei den Kreis-, $k < 0$ bei den Hyperbelfunktionen. Statt $C_k\varphi$ und $S_k\varphi$ schreiben wir endlich einfach $C\varphi$ und $S\varphi$ und definieren noch die Funktionen $T\varphi = \frac{S\varphi}{C\varphi}$ und $Ct\varphi = \frac{1}{T\varphi}$. Damit hat man nun endlich folgende Definition der *Kegelschnittsfunktionen*[3])

$$\begin{cases} C\varphi = C_k\varphi = C_\varepsilon\sqrt{k\varepsilon}\varphi = \cos\sqrt{k}\varphi = \operatorname{ch}\sqrt{-k}\varphi, \\ S\varphi = S_k\varphi = \dfrac{S_\varepsilon\sqrt{k\varepsilon}\varphi}{\sqrt{k\varepsilon}} = \dfrac{\sin\sqrt{k}\varphi}{\sqrt{k}} = \dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{-k}\varphi}{\sqrt{-k}}, \\ T\varphi = T_k\varphi = \dfrac{T_\varepsilon\sqrt{k\varepsilon}\varphi}{\sqrt{k\varepsilon}} = \dfrac{\operatorname{tg}\sqrt{k}\varphi}{\sqrt{k}} = \dfrac{\operatorname{th}\sqrt{-k}\varphi}{\sqrt{-k}}, \\ Ct\varphi = Ct_k\varphi = \sqrt{k\varepsilon}\, Ct\sqrt{k\varepsilon}\varphi = \sqrt{k}\operatorname{ctg}\sqrt{k}\varphi = \sqrt{-k}\operatorname{cth}\sqrt{-k}\varphi, \end{cases} \tag{1}$$

wobei stets $k\varepsilon > 1$, also entweder $k > 0$, $\varepsilon = +1$ oder $k < 0$, $\varepsilon = -1$ ist.

Wir vermerken das kleinste System der allerwichtigsten *goniometrischen Formeln*:

$$C^2\varphi + kS^2\varphi = 1, \quad 1 + kT^2\varphi = \frac{1}{C^2\varphi}, \quad k + Ct^2\varphi = \frac{1}{S^2\varphi}, \tag{2}$$

$$C2\varphi = C^2\varphi - kS^2\varphi = 2C^2\varphi - 1 = 1 - 2kS^2\varphi, \quad S2\varphi = 2S\varphi\, C\varphi, \tag{3}$$

$$C(\varphi \pm \psi) = C\varphi\, C\psi \mp k\, S\varphi\, S\psi, \quad S(\varphi \pm \psi) = S\varphi\, C\psi \pm C\varphi\, S\psi, \tag{4}$$

$$C\varphi \pm \sqrt{-k}\, S\varphi = e^{\pm\sqrt{-k}\varphi}, \tag{5}$$

$$\frac{dC\varphi}{d\varphi} = -kS\varphi, \quad \frac{dS\varphi}{d\varphi} = C\varphi, \quad \frac{dT\varphi}{d\varphi} = \frac{1}{C^2\varphi}, \quad \frac{dCt\varphi}{d\varphi} = -\frac{1}{S^2\varphi}. \tag{6}$$

Ferner ist

$$\begin{cases} \lim\limits_{k\to 0} S\varphi = \varphi \lim\limits_{k\to 0}\dfrac{\sin\sqrt{k}\varphi}{\sqrt{k}\varphi} = \varphi, \quad \lim\limits_{k\to 0} C\varphi = \lim\limits_{k\to 0}\cos\sqrt{k}\varphi = 1, \\ \lim\limits_{k\to 0} 2\dfrac{1 - C\varphi}{k} = \lim\limits_{k\to 0} 4\, S_k^2\dfrac{\varphi}{2} = \varphi^2 \lim \dfrac{\sin^2\sqrt{k}\,\dfrac{\varphi}{2}}{\left(\sqrt{k}\,\dfrac{\varphi}{2}\right)^2} = \varphi^2. \end{cases} \tag{7}$$

[3]) Vgl. *K. Fladt*, Die Kreis- und Hyperbelfunktionen als Flächenfunktionen, Zeitschr. f. math. u. nat. U. **68**, 1937, S. 116 u. 174.

Damit läßt sich z. B. ein einwandfreier Grenzübergang von der sphärischen zur ebenen euklidischen Trigonometrie bewerkstelligen. Aus dem sphärischen Sinus- und Cosinussatz in der Form

$$\sin \sqrt{k}a : \sin \sqrt{k}b : \sin \sqrt{k}c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$

und

$$\cos \sqrt{k}a = \cos \sqrt{k}b \cos \sqrt{k}c + \sin \sqrt{k}b \sin \sqrt{k}c \cos \alpha$$

wird nämlich

$$a \cdot \frac{\sin \sqrt{k}a}{\sqrt{k}a} : b \cdot \frac{\sin \sqrt{k}b}{\sqrt{k}b} : c \cdot \frac{\sin \sqrt{k}c}{\sqrt{k}c} = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$

und

$$\frac{2(1 - \cos \sqrt{k}a)}{k} = \frac{2(1 - \cos \sqrt{k}b)}{k} + \frac{2(1 - \cos \sqrt{k}c)}{k}$$
$$- 2k \cdot \frac{1 - \cos \sqrt{k}b}{k} \cdot \frac{1 - \cos \sqrt{k}c}{k} - 2bc \frac{\sin \sqrt{k}b}{\sqrt{k}b} \cdot \frac{\sin \sqrt{k}c}{\sqrt{k}c} \cos \alpha$$

und daraus für $\lim k \to 0$

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma \quad \text{und} \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha .$$

2. Wir gebrauchen nun *projektive Koordinaten* und zwar in der Ebene Punktkoordinaten $x_1 \mid x_2 \mid x_3$ und Geradenkoordinaten $X_1 \mid X_2 \mid X_3$, im Raume Punktkoordinaten $x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid x_4$ und Ebenenkoordinaten $X_1 \mid X_2 \mid X_3 \mid X_4$. Wir setzen weiter als bekannt voraus, daß die *nichteuklidische Geometrie* (NEG) *der Ebene* durch den *absoluten Kegelschnitt* (AK) mit der *Ordnungsgleichung*

$$x \mid x = k(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 = 0 \tag{8}$$

der *Klassengleichung*

$$X \mid X = X_1^2 + X_2^2 + kX_3^2 = 0 \tag{9}$$

und mit den entsprechenden *Polargleichungen* (Polare und Pol)

$$x \mid y = k(x_1 y_1 + x_2 y_2) + x_3 y_3 = 0 \tag{10}$$

und

$$X \mid Y = X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + kX_3 Y_3 = 0 \tag{11}$$

beherrscht wird, die *NEG des Raumes* dagegen durch die *absolute Fläche 2. Grades* (AF) mit der *Ordnungsgleichung*

$$x \mid x = k(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + x_4^2 = 0, \tag{12}$$

der *Klassengleichung*

$$X \mid X = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + kX_4^2 = 0 \tag{13}$$

und den entsprechend zu bildenden *Polargleichungen* (Polarebene und Pol).

Für $k > 0$ hat man die *elliptische* oder auch die *sphärische Geometrie*[4]), für $k < 0$ die *hyperbolische Geometrie*, für $k \to 0$ zerfallen beide in die *euklidische Geometrie*.

Die *Hauptgruppe* wird gebildet von denjenigen linearen Punkttransformationen, für welche die Form $x \mid x$ *relative Invariante* ist, d. h. bis auf einen konstanten Faktor in sich übergeht. Es wird sich herausstellen, daß sie in der NEG nur die *Bewegungen* und *Umlegungen* umfaßt, es also in ihr keine Streckungen gibt.

---

[4]) Auf die Erörterung ihres Unterschiedes können wir in diesem Aufsatz nicht eingehen.

§ 2. Die ebene Geometrie.

3. Verschärft man für den Augenblick die Bedingung der Invarianz, und verlangt daß $x \mid x$ *absolute* Invariante sei:

$$x \mid x = x \mid x, \tag{1}$$

dann ist für $k = \varepsilon = +1$ die Lösung in einem früheren Aufsatz [5]) schon angegeben. Wir entnehmen daraus nämlich den

Satz 1. *Die Bewegungen und Umlegungen der elliptischen Geometrie der Ebene sind in abstracto identisch mit denjenigen Bewegungen und Umlegungen des euklidischen Raumes, die einen Punkt festlassen, oder auch mit den Bewegungen und Umlegungen auf der Kugel des euklidischen Raumes.*

Wir wollen das Problem indes für beliebiges k lösen. Dazu braucht man — und das ist ein Glücksfall — nur etwas allgemeinere, *nichteuklidische Quaternionen* einzuführen, deren Einheiten die Multiplikationstafel

(2)

$e_0 = 1$	e_1	e_2	e_3
e_1	$-k$	ke_3	$-e_2$
e_2	$-ke_3$	$-k$	e_1
e_3	e_2	$-e_1$	-1

erfüllen. Man überzeugt sich leicht, daß es Quaternionen sind, d. h. alle Rechnungsgesetze mit der einen Ausnahme des kommutativen Gesetzes der Multiplikation erfüllt sind. Nur sind im Fall $k < 0$ Teiler der Null, d. h. solche Quaternionen zu vermeiden, für die $Nx = 0$ ist.

Das Produkt $c = ab$ der beiden Quaternionen a und b hat dann die Koordinaten

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 b_0 - a \mid b \\ c_1 &= a_0 b_1 + a_1 b_0 + \widehat{ab}_1 \\ c_2 &= a_0 b_2 + a_2 b_0 + \widehat{ab}_2 \\ c_3 &= a_0 b_3 + a_3 b_0 + k\widehat{ab}_3, \end{aligned} \tag{3}$$

wo zur Abkürzung

(4) $a_2 b_3 - a_3 b_2 = \widehat{ab}_1,\ a_3 b_1 - a_1 b_3 = \widehat{ab}_2,\ a_1 b_2 - a_2 b_1 = \widehat{ab}_3$

gesetzt ist, welche drei geraden Koordinaten wir in dem Symbol $\widehat{ab}$ zusammenfassen.

Die Lösung ist nun wörtlich dieselbe wie die für $k = +1$ und lautet

(5) $\bar{x} = axa^{-1}$ für die *Bewegungen*,

(6) $\bar{x} = -axa^{-1}$ für die *Umlegungen* des euklidischen Raumes, die den Nullpunkt festlassen, wenn das Entfernungsquadrat durch die Form

$$x \mid x = k(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 \tag{7}$$

gegeben ist [6]).

---

[5]) *K. Fladt*, Über die Transformationen der Hauptgruppe im euklidischen Raume, Math. phys. Sem. Berichte **2**, 1951; eine Abhandlung, deren Kenntnis hier vorausgesetzt und die als „1. Abh." zitiert wird.

[6]) Deutet man für $k < 0$ x_3 als Zeit, x_1 und x_2 als Koordinaten der Ebene, so hat man in $x_1 \mid x_2 \mid x_3$ die „Welt" der auf zwei räumliche Koordinaten beschränkten *speziellen Relativitätstheorie* und die Gleichungen (5) stellen die Lorentztransformation dar.

Der *Drehwinkel bei der Drehung* (5) ergibt sich nach Satz 1 der Nr. **6** der 1. Abh. aus

$$\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2} = \frac{a_0}{\sqrt{\mathfrak{a}\mid\mathfrak{a}}} \quad \text{oder} \quad \cos\vartheta = \frac{\operatorname{ctg}^2\frac{\vartheta}{2} - 1}{\operatorname{ctg}^2\frac{\vartheta}{2} + 1} = \frac{a_0^2 - \mathfrak{a}\mid\mathfrak{a}}{a_0^2 + \mathfrak{a}\mid\mathfrak{a}}$$

oder

$$\cos\vartheta = \frac{a_0^2 - a\mid a}{a_0^2 + a\mid a}. \tag{8}$$

Weiter ist

$$Sax = -a\mid x \quad \text{und} \quad Sax = Sxa = a\mid x.$$

Aus $x = axa^{-1}$ folgt aber $xa = ax$ und $Sxa = Sax$, also ist

$$a\mid x = a\mid x. \tag{9}$$

Nun setzen wir aus der nichteuklidischen Geometrie der Ebene noch als bekannt voraus die Formel

$$C\varrho = \frac{a\mid x}{\sqrt{a\mid a}\,\sqrt{x\mid x}} \tag{10}$$

für die Entfernung ϱ zweier Punkte a und x und die Formel

$$S\sigma = \frac{(Ax)}{\sqrt{A\mid A}\,\sqrt{x\mid x}} \tag{11}$$

für den Abstand σ des Punktes x von der Geraden A.

Dann ist die Gleichung des Kreises um den Punkt a mit dem Radius ϱ

$$(a\mid x)^2 - C^2\varrho\cdot a\mid a\cdot x\mid x = 0, \tag{12}$$

wo $a\mid a > 0$, d. h. a im Fall $k < 0$ ein *eigentlicher* Punkt[7]), d. h. ein im Innern des AK $x\mid x = 0$ gelegener Punkt ist. Durch unsere Transformation wird daraus wegen (9) und (1) einfach

$$(a\mid x)^2 - C^2 a\mid a\cdot x\mid \bar{x} = 0,$$

d. h. der Kreis (12) geht in sich über, und das gilt wegen der Homogenität in $x_1\mid x_2\mid x_3$ auch, wenn x und x projektive Koordinaten und $x\mid x$ (und $a\mid x$) nicht mehr absolute, sondern bloß noch relative Invarianten sind, also an Stelle von (5) die Gleichung

$$\varrho x = axa^{-1}\ ^{8)} \tag{13}$$

tritt. Die Gleichung (13) stellt also auch in der nichteuklidischen Geometrie eine *Drehung* und zwar um den Punkt $a_1\mid a_2\mid a_3$ dar. Für projektive Koordinaten fällt dann weiter der Unterschied zwischen den Gleichungen (5) und (6) ganz weg. Gibt es also „nichteuklidische" Umlegungen, so müssen sie anderswo gesucht werden. Wir werden sie alsbald finden.

4. Ist $a\mid a < 0$, so ist jedenfalls $k < 0$ und der Punkt a liegt außerhalb des AK. Dann führen wir die absolute Polare

$$A_1 = ka_1,\quad A_2 = ka_2,\quad A_3 = a_3 \tag{14}$$

des Punktes a ein. Es wird dann

$$a\mid x = (Ax),\quad a\mid a = \frac{1}{k}A\mid A, \tag{0}$$

$$C\varrho = \frac{\sqrt{k}(Ax)}{\sqrt{A\mid A}\,\sqrt{x\mid x}} = \sqrt{k}\,S\sigma. \tag{00}$$

---

[7]) Jetzt bezeichnet a also sowohl die Quaternion $a_0\mid a_1\mid a_2\mid a_3$ als den Punkt a, was bei einiger Vorsicht zu keinem Mißverständnis führt.

[8]) Man könnte jetzt in (13) auch $\tilde{a}$ statt a^{-1} schreiben, tut es aber nicht.

Aus dem Kreis (12) wird die *Abstandslinie*

$$(15) \qquad (Ax)^2 - S^2\sigma A \mid A \cdot x \mid x = 0.$$

Jeder Kreis ist also zugleich eine Abstandslinie zur absoluten Polaren seines Mittelpunkts. Aus (00) wird für $k > 0$, $\varepsilon = +1$

$$\cos \sqrt{k}\varrho = \sin \sqrt{k}\sigma = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{k}\sigma\right), \text{ d. h. } \varrho + \sigma = \frac{\pi}{2\sqrt{k}}.$$

Für $k < 0$, $\varepsilon = -1$ aber folgt

$$\operatorname{ch} \sqrt{-k}\varrho = \operatorname{sh} \sqrt{-k}\sigma = \operatorname{sh}\left(\frac{i\pi}{2} - \sqrt{-k}\sigma\right), \text{ d. h. } \varrho + \sigma = \frac{\pi}{2\sqrt{-k}}.$$

Ist also σ reell, so ist ϱ im Fall $k < 0$ imaginär und umgekehrt. Ehe wir diese Ergebnisse weiter verfolgen, erledigen wir noch den Fall $a \mid a = 0$, wo a ein absoluter Punkt ist: dann ist die Entfernungskurve ein sogenannter *Grenzkreis*. Seine Gleichung ergibt sich aus der Gleichung des Kreises um a durch den Punkt b:

$$(16) \qquad b \mid b \cdot (a \mid x)^2 - (a \mid b)^2 \cdot x \mid x = 0$$

für $a \mid a = 0$.

5. Einer *Drehung* um den Kreismittelpunkt a entsprach eine *Schiebung* (oder, wie H. Beck sagt, *Gleitung*) längs der Abstandslinie von A. Der *Drehwinkel* ϑ folgte aus (8).

Um die *Schubstrecke* zu ermitteln, läßt sich die Berechnung der Koordinaten von (13) bzw. (5) anscheinend nicht mehr vermeiden. Sie werden

$$(17) \qquad \begin{cases} (a_0^2 + a \mid a)\, x_1 = (a_0^2 - a \mid a)\, x_1 + 2a \mid x \cdot a_1 + 2a_0(a_2 x_3 - a_3 x_2), \\ (a_0^2 + a \mid a)\, x_2 = (a_0^2 - a \mid a)\, x_1 + 2a \mid x \cdot a_2 + 2a_0(a_3 x_1 - a_1 x_3), \\ (a_0^2 + a \mid a)\, x_3 = (a_0^2 - a \mid a)\, x_3 + 2a \mid x \cdot a_3 + 2a_0 k(a_1 x_2 - a_2 x_1). \end{cases}$$

Durch Erweitern mit kx_1, kx_2, x_3 folgt daraus

$$(0) \qquad (a_0^2 + a \mid a)\, x \mid x = (a_0^2 - a \mid a) \cdot x \mid x + 2(a \mid x)^2.$$

Liegen x und x auf der Schubachse (14), so ist $(Ax) = a \mid x = 0$ und damit erhält man aus (0)

$$\frac{x \mid x}{x \mid x} = \frac{a_0^2 - a \mid a}{a_0^2 + a \mid a}.$$

Andererseits folgt die Entfernung χ zweier entsprechender Punkte x und x der Schubachse, d. h. die Schubstrecke, aus

$$(18) \qquad C\chi = \frac{x \mid x}{\sqrt{x \mid x}\,\sqrt{x \mid x}} = \frac{x \mid x}{x \mid x} = \frac{a_0^2 - a \mid a}{a_0^2 + a \mid a} = \cos\vartheta.$$

Für $k > 0$, $\varepsilon = +1$ ist also $\cos \sqrt{k} = \cos\vartheta$, $\chi = \dfrac{\vartheta}{\sqrt{k}}$; für $k < 0$, $\varepsilon = -1$ aber $\chi = \dfrac{i\vartheta}{\sqrt{-k}}$. Setzt man noch $A_0 = a_0$, so kommt mittels (14)

$$(19) \qquad C = \frac{kA_0^2 - A \mid A}{kA_0^2 + A \mid A}.$$

Nun zerfallen für $k < 0$, d. h. in der *hyperbolischen Geometrie*, die Schiebungen in zwei Arten:

1. die *eigentlichen Schiebungen* mit $Na > 0$, d. h. $kA_0^2 + A \mid A < 0$ $(k < 0)$,
2. die *uneigentlichen Schiebungen* mit $Na < 0$, d. h. $kA_0^2 + A \mid A > 0$.

Im 1. Fall ist $C\chi = \dfrac{A \mid A - kA_0^2}{-A \mid A - kA_0^2} > 0$, χ reell, im 2. Fall $C\chi < 0$, χ imaginär.

Die Verbindungsgerade g zweier entsprechender Punkte x und $\bar{x}$ trifft also vermutlich die Schubachse $a \mid x = 0$ im 1. Fall in einem *uneigentlichen*, im 2. Fall in einem *eigentlichen* Punkt. In der Tat: Ein Punkt z der Verbindungsgeraden von x und $\bar{x}$ hat die Koordinaten $x + \lambda\bar{x}$ oder wegen (17) kürzer $z = \mu x + a \mid x \cdot a + a_0 \cdot y$, wo $y_1 = \widehat{ax}_1$, $y_2 = \widehat{a\bar{x}}_2$, $y_3 = k\widehat{ax}_3$ (s. o. (4)). Er liegt auf der Achse, wenn $a \mid z = (\mu + a \mid a)\, a \mid x = 0$, d. h. $\mu = -a \mid a$ ist. Daher ist $z = -a \mid a \cdot x + a \mid x \cdot a + a_0 y$, woraus mittels einer eleganten Rechnung vermöge der Identität

$$k\,\{\widehat{ax}_1^2 + \widehat{a\bar{x}}_2^2 + k\widehat{ax}_3^2\} \equiv a \mid a \cdot x \mid x - (a \mid x)^2 \tag{20}$$

sofort $z \mid z = \{a \mid a \cdot x \mid x - (a \mid x)^2\}\, Na$ folgt. Nun ist aber im Falle einer Schiebung $a \mid a < 0$, also hat $z \mid z$ das entgegengesetzte Zeichen von Na, q. e. d.

Die Punkte x und $\bar{x}$ befinden sich also im 1. Fall auf derselben, im 2. Fall auf verschiedenen Seiten der Schubachse $(Ax) = 0$. Insbesondere erhält man für $A_0 = 0$, d. h. $a_0 = 0$, eine besondere uneigentliche Schiebung, die *Umwendung* um $(Ax) = 0$ mit den Gleichungen

$$\varrho x = A \mid A \cdot x - 2A \mid x \cdot A^*, \text{ wo } A_1^* = A_1,\ A_2^* = A_2,\ A_3^* = kA_3 \text{ ist}, \tag{21}$$

die der *Spiegelung* $a_0 = 0$ an a mit den Gleichungen

$$\varrho x = a \mid a \cdot x - 2a \mid x \cdot a \tag{22}$$

entspricht. Der Leser beweise selbst, daß jede *uneigentliche Schiebung* aus einer *eigentlichen Schiebung* und der *Umwendung* um A zusammensetzbar ist. Da für $Na < 0$ auch $a \mid a < 0$ sein muß, so ist *jede* Transformation, für die $Na < 0$ ist, eine *uneigentliche Schiebung*. In diesen haben wir die gesuchten *Umlegungen* der hyperbolischen Geometrie gefunden.

Die Transformationen, für die $Na > 0$ ist, sind dagegen die *Bewegungen*[9]) (Drehungen, Grenzdrehungen, eigentliche Schiebungen).

In der *elliptischen und sphärischen Geometrie* besteht wegen $k > 0$, $a \mid a > 0$, $Na > 0$ kein Unterschied zwischen Drehungen und Schiebungen: sie sind beide gleichzeitig *reell*. Trotzdem gibt es im *geometrischen* Sinn wieder *Umlegungen*, nämlich wieder die *Umwendungen* (21) und die aus ihnen und den Drehungen und Schiebungen zusammengesetzten Transformationen, die wieder *uneigentliche Schiebungen* heißen mögen.

6. Die Zusammensetzung zweier Bewegungen (13), etwa $\varrho x = axa^{-1}$ und $\varrho\bar{x} = bxb^{-1}$ ergibt die Bewegung

$$\varrho x = abx(ab)^{-1} = cxc^{-1} \text{ mit } c = ab. \tag{23}$$

Sie ist eine

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Drehung}\\ \text{Grenzdrehung}\\ \text{Schiebung}\end{array}\right\}, \text{ je nachdem } c \mid c \lesseqgtr 0,$$

d. h. $a \mid a \cdot b_0^2 + 2a \mid b \cdot a_0 b_0 + b \mid b \cdot a_0^2 + a \mid a \cdot b \mid b - (a \mid b)^2 \lesseqgtr 0$ ist.

Die konstruktive Behandlung stimmt für $k > 0$ weithin mit derjenigen der euklidischen Geometrie überein, für $k < 0$ ist sie außerordentlich mannigfaltig und kann ohne genaueres Eingehen auf die hyperbolische Geometrie nicht gegeben werden.

---

[9]) *H. Beck* hat in seinem Buch: Koordinatengeometrie I. Teil, Berlin 1919, gezeigt, daß die nichteuklidischen *Umlegungen* einen anderen Charakter haben als die euklidischen und will daher den Namen *Umlegungen* für sie vermieden wissen. Aus geometrischen Gründen können wir uns ihm nicht anschließen.

Endlich gehen für $\lim k \to 0$ die nichteuklidischen Drehungen in euklidische, die nichteuklidischen Grenzdrehungen und Schiebungen in euklidische Schiebungen über, während die Geradenspiegelungen solche bleiben.

§ 3. Die Geometrie des Raumes.

7. Auch im Raum müssen wir die mit den Formeln (10) und (11) von Nr. 3 gleichlautenden Formeln für die Entfernung ϱ zweier Punkte a und x und den Abstand σ eines Punktes x von einer Ebene A als bekannt voraussetzen, weiter aber die nähere Bekanntschaft mit den *Plückerschen Linienkoordinaten* einer Geraden. Sind x und y Punkte einer Geraden, so sind dies die sechs homogenen Koordinaten

$$(1)\qquad \begin{cases} \varrho\mathfrak{x}_1 = x_4 y_1 - x_1 y_4, & \varrho\mathfrak{x}_2 = x_4 y_2 - x_2 y_4, & \varrho\mathfrak{x}_3 = x_1 y_3 - x_3 y_4, \\ \varrho\dot{\mathfrak{x}}_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2, & \varrho\dot{\mathfrak{x}}_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3, & \varrho\dot{\mathfrak{x}}_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1, \end{cases}$$

kurz $\varrho\mathfrak{x} = \widehat{xy}$, zwischen denen die Identität

$$(2)\qquad \tfrac{1}{2}(\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}_1\dot{\mathfrak{x}}_1 + \mathfrak{x}_2\dot{\mathfrak{x}}_2 + \mathfrak{x}_3\dot{\mathfrak{x}}_3 = 0$$

besteht. Die Bedingung, daß sich die Geraden $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ schneiden, lautet

$$(3)\qquad (\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = \mathfrak{x}_1\dot{\mathfrak{y}}_1 + \mathfrak{x}_1\dot{\mathfrak{y}}_2 + \mathfrak{x}_3\dot{\mathfrak{y}}_3 + \dot{\mathfrak{x}}_1\mathfrak{y}_1 + \dot{\mathfrak{x}}_2\mathfrak{y}_2 + \dot{\mathfrak{x}}_3\mathfrak{y}_3 = 0,$$

umfaßt also (2) als besonderen Fall. An die Seite der Formen $x \mid x$, $x \mid y$, $X \mid X$, $X \mid Y$ von Nr. 2 treten die Formen

$$(4)\qquad \mathfrak{x} \mid \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{x}_2^2 + \mathfrak{x}_3^2 + k(\dot{\mathfrak{x}}_1^2 + \dot{\mathfrak{x}}_2^2 + \dot{\mathfrak{x}}_3^2)$$

und

$$(5)\qquad \mathfrak{x} \mid \mathfrak{y} = \mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1 + \mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_2 + \mathfrak{x}_3\mathfrak{y}_3 + k(\dot{\mathfrak{x}}_1\dot{\mathfrak{y}}_1 + \dot{\mathfrak{x}}_2\dot{\mathfrak{y}}_2 + \dot{\mathfrak{x}}_3\dot{\mathfrak{y}}_3).$$

Dann bestehen noch die Identitäten

$$(6)\qquad k\mathfrak{x} \mid \mathfrak{x} = x \mid x \cdot y \mid y - (x \mid y)^2$$

und

$$(7)\qquad k\mathfrak{x} \mid \mathfrak{y} = x \mid x \cdot y \mid z - x \mid y \cdot x \mid z,$$

wo $\mathfrak{x} = \widehat{xy}$, $\mathfrak{y} = \widehat{xz}$ ist.

Für *eigentliche* Punkte ist $x \mid x \cdot y \mid y - (x \mid y)^2 \gtrless 0$, je nachdem $k \gtrless 0$ ist, für *eigentliche* Geraden also $\mathfrak{x} \mid \mathfrak{x} > 0$.

Um den *Winkel* zweier sich schneidender Geraden zu finden, bestimmen wir sie durch die Punkte x und y bzw. x und z. Die Punkte x, y, z bilden dann ein Dreieck mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ, in dem nach dem Cosinussatz $Ca = Cb\,Cc + k\,Sb\,Sc \cos\alpha$, also

$$\cos\alpha = \frac{Ca - Cb\,Cc}{k\,Sb\,Sc}$$

gilt. Nun ist

$$Ca = \frac{y \mid z}{\sqrt{y \mid y}\,\sqrt{z \mid z}},$$

entsprechend Cb, Cc in zyklischer Vertauschung, so daß

$$kS^2a = 1 - C^2a = \frac{y \mid y \cdot z \mid z - (y \mid z)^2}{y \mid y \cdot z \mid z}$$

und entsprechend in zyklischer Vertauschung. Damit kommt

$$\cos\alpha = \frac{x \mid x \cdot y \mid z - x \mid y \cdot x \mid z}{\sqrt{x \mid x \cdot y \mid y - (x \mid y)^2}\,\sqrt{x \mid x \cdot z \mid z - (x \mid z)^2}}$$

und daher für den $\sphericalangle\, \varphi$ der beiden Geraden $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ nach (6) und (7)

$$\cos\varphi = \frac{\mathfrak{x} \mid \mathfrak{y}}{\sqrt{\mathfrak{x} \mid \mathfrak{x}}\,\sqrt{\mathfrak{y} \mid \mathfrak{y}}} \tag{8}$$

mit

$$\mathfrak{x} \mid \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y} \mid \mathfrak{y} - (\mathfrak{x} \mid \mathfrak{y})^2 > 0 \text{ und } (\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = 0. \tag{9}$$

8. Leider geht die Behandlung der Bewegungen und Umlegungen im nichteuklidischen Raum nicht ganz so glatt vonstatten wie in der Ebene. Wir haben jetzt 4 Koordinaten, von denen wir die vierte x_4 vorübergehend mit x_0 bezeichnen wollen. Dann bedeuten $x_0 \mid x_1 \mid x_2 \mid x_3$ zunächst reelle Koordinaten im vierdimensionalen Raum. Aus ihnen bauen wir die Quaternion

$$x = x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \tag{10}$$

mit der Norm

$$x \mid x = Nx = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \tag{11}$$

auf. Diese enthält $4 + 6 = 10$ wesentliche Konstanten, 4 vom Werte 1, 6 vom Werte 0; die allgemeine lineare Transformation $x \to x$, die den Ursprung in Ruhe läßt, hat $4 \cdot 4 = 16$ Konstanten, so daß $16 - 10 = 6$ wesentliche Parameter für diejenigen Transformationen übrig bleiben müssen, die $x \mid x$ invariant lassen: Dies bedeutet die Gleichung $x \mid x = x\tilde{x} = x \mid x = x\tilde{x}$. Sind nun a und b zwei *beliebige* Quaternionen mit den Koordinaten $a_0 \mid a_1 \mid a_2 \mid a_3$ und $b_0 \mid b_1 \mid b_2 \mid b_3$, so ist $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ und $bb^{-1} = b^{-1}b = 1$. Da $x\tilde{x}$ ein Skalar ist, so ist

$$x\tilde{x} = \tilde{x}x = x\tilde{x} \cdot aa^{-1} = a \cdot x\tilde{x} \cdot a^{-1} = ax \cdot \tilde{x}a^{-1} = ax \cdot b^{-1}b \cdot \tilde{x}a^{-1} = axb^{-1} \cdot b\tilde{x}a^{-1}.$$

Setzt man nun

$$x = \lambda \cdot axb^{-1}, \tag{0}$$

wo λ nach der Erfahrung in Nr. 5 der 1. Abh. sogleich eine reine Zahl sein mag, so ist

$$\tilde{x} = \frac{1}{\lambda} \cdot b\tilde{x}a^{-1}.$$

Aus (0) folgt aber

$$\tilde{x} = \lambda\overline{axb^{-1}} = \lambda\overline{b^{-1}}\tilde{x}\tilde{a}.$$

Ferner ist

$$b^{-1} = \frac{\tilde{b}}{Nb}, \quad \overline{b^{-1}} = \frac{b}{Nb}, \quad a^{-1} = \frac{\tilde{a}}{Na}, \quad \text{also } \tilde{x} = \lambda\,\frac{Na}{Nb}\,b\tilde{x}a^{-1}.$$

Daher kommt

$$\lambda^2 = \frac{Nb}{Na}. \tag{00}$$

Nun enthalten a und b insgesamt 8 wesentliche Konstanten und diese kommen in (0) wegen (00) homogen vor, sind also 7 wesentlichen Konstanten gleichwertig. Daher kann zwischen a und b noch eine Gleichung angenommen werden. Sie sei $Na = Nb$, dann wird $\lambda = \pm 1$ und man erhält als Lösung die Bewegungen des vierdimensionalen Raumes, die den Ursprung in Ruhe lassen:

$$x = axb^{-1},\ Na = Nb\ ^{10)}. \tag{12}$$

[10]) Da die Transformationen $x = -x$ im vierdimensionalen Raum wie im zweidimensionalen, d. h. in der Ebene, keine Umlegung, sondern eine Halbdrehung ist, so können wir uns auf das positive Zeichen beschränken.

Betrachtet man aber nicht $x_0 \mid x_1 \mid x_2 \mid x_3$ selbst, sondern nur ihre Verhältnisse als Koordinaten, so stellen die Gleichungen

$$x = axb^{-1},\ Na = Nb \tag{13}$$ [11])

wegen $Nx = x \mid x = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ *die Bewegungen des elliptischen (sphärischen) dreidimensionalen Raumes* für den Fall $k = +1$ dar. Die *Umlegungen* erhält man, indem man noch die Transformation $\varrho x_0 = x_0$, $\varrho x_1 = -x_1$, $\varrho x_2 = -x_2$, $\varrho x_3 = -x_3$ einschaltet, in der Form

$$\varrho x = axb^{-1},\ Na = Nb. \tag{14}$$

Ausdrücklich bemerken wir noch, daß a und b im Gegensatz zu x keine Punkte darstellen.

9. Leider ist die Verallgemeinerung auf den *hyperbolischen Raum* oder allgemeiner für *beliebiges* k nicht so einfach zu machen wie in der Ebene, nämlich durch Hinzufügung der Konstanten k in die Multiplikationstafel der Quaternionen wie oben in Nr. **3**. Denn, wie man es auch probieren mag, das assoziative Gesetz $a(bc) = (ab)c$ bleibt unerfüllt und das kann man auch beweisen[12]). Man kann aber mit William Kingdon Clifford (1845—79) den Begriff der Quaternionen erweitern zu dem der *Biquaternionen*.

Wir setzen $a = p + \eta q$, $b = p - \eta q$, wo p und q beliebige Quaternionen sind und η eine neue Einheit ist, deren Quadrat η^2 entweder $+k$ oder 0 oder $-k$ ist. Die Bedingung $Na = Nb$ liefert dann die andere

$$p_0q_0 + p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 = p_0q_0 + (pq) = 0. \tag{15}$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß auch die Biquaternionen alle Rechengesetze mit der einen Ausnahme des kommutativen Gesetzes der Multiplikation erfüllen.

Wir setzen nun weiter mit A. Buchheim[13])

$$x = x_0 + \eta(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3), \tag{16}$$

womit

$$Nx = x \mid x = x_0^2 + \eta(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \tag{17}$$

folgt. Je nachdem $\eta^2 = +k$ oder $-k$ ist, hat man die *elliptische* oder die *hyperbolische Geometrie*, für $\eta^2 = 0$ die *parabolische* oder *euklidische* (s. u. Nr. **20**). Man beachte sorgfältig: η ist eine *hyperkomplexe Einheit*, deren Quadrat entweder $+k$ oder 0 oder $-k$ ist: es ist *nicht* wertmäßig $\eta = \sqrt{\pm k}$ oder gar 0. Trotzdem werden wir der Einfachheit halber $\sqrt{k}$ statt η schreiben und zwar deshalb, weil bei k in erster Linie an $k < 0$, d. h. an die hyperbolische Geometrie gedacht ist, die wir der Kürze halber bevorzugen, und weil in diesem Fall das *Symbol* $\sqrt{k} = \sqrt{-k} \cdot i$, wo $\sqrt{-k}$ eine *reelle* Zahl (!) und i *die komplexe Einheit* $\sqrt{-1}$ ist, die Biquaternionengesetze erfüllt. Im Falle der elliptischen oder gar der euklidischen Geometrie dagegen wäre $\sqrt{k}$ mit den *reellen* Zahlen $\sqrt{k}$ oder 0 zu verwechseln, die Schreibweise $\sqrt{k}$ statt η also doppelsinnig: hier *muß* wieder η geschrieben werden. Wir werden übrigens im folgenden statt „Biquaternionen" gewöhnlich nur Quaternionen sagen, indem wir darunter solche mit komplexen Koordinaten verstehen.

Schreibt man wieder die Fußnummer 4 statt 0 und führt die Hamiltonschen Abkürzungen

$$x_0 = x_4 = Sx^{14}),\quad x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = Vx \tag{18}$$

[11]) Auf die Theorie der Cliffordschen Parallelen und Flächen, die am einfachsten mittels der Gleichungen (13), d. h. mittels Quaternionen, *nicht* mittels Biquaternionen (s. u.) zu behandeln ist, gehen wir in diesem Aufsatz nicht ein.

[12]) Siehe *L. E. Dickson*, Algebra und ihre Zahlentheorie, Zürich und Leipzig 1927, S. 43ff.

[13]) *A. Buchheim*, A memoir on biquaternions, Amer. J. of Math. **7**, 1885, p. 293—326. Vgl. dazu auch die Enzyklopädie der math. Wiss., Bd. III, AB 11, Nr. 14. *Buchheim* wählt jedoch $k = 1$ und schreibt ε statt η.

[14]) Daß wir den allgemeinen Sinus ebenfalls mit S bezeichnen, kann zu keinem Mißverständnis führen.

ein, so hat man für die *Bewegungen* bzw. *Umlegungen* des nichteuklidischen (in erster Linie also hyperbolischen) Raumes die Gleichungen für die Punkte x

$$(19) \qquad \varrho(Sx + \sqrt{k}Vx) = (p + \sqrt{kq})(Sx + \sqrt{k}Vx)(p - \sqrt{kq})^{-1}$$

bzw.

$$(20) \qquad \varrho(Sx + \sqrt{k}Vx) = (p + \sqrt{kq})(Sx - \sqrt{k}Vx)(p - \sqrt{kq})^{-1},$$

wobei (15) gilt und überdies $N(p + \sqrt{kq}) \neq 0$ ist. Bei $k < 0$ kann nämlich $x \mid x = 0$ werden, ohne daß die *reellen* Größen $x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid x_4$ selbst Null sind, d. h. die Quaternionen können dann Nullteiler besitzen; sie hat man zu vermeiden, d. h. es ist $N(p + \sqrt{kq}) \neq 0$ vorauszusetzen.

Ausdrücklich zu bemerken ist wieder, daß die Größen p und q im Gegensatz zu x keine Punkte sind. Man sollte sie daher eigentlich anders bezeichnen, tut es aber nicht.

Wir behaupten nun weiter, daß

$$(21) \qquad \varrho(VX + \sqrt{k}SX) = (p + \sqrt{kq})(VX + \sqrt{k}SX)(p - \sqrt{kq})^{-1}$$

bzw.

$$(22) \qquad \varrho(VX + \sqrt{k}SX) = (p + \sqrt{kq})(VX - \sqrt{k}SX)(p - \sqrt{kq})^{-1},$$

wo (15) gilt und $N(p + \sqrt{kq}) \neq 0$ ist, die Bewegungs- bzw. Umlegungsgleichungen für die Ebene X sind.

Beweis. Das ist richtig, wenn $\sigma(xX) = (xX)$ eine relative Invariante ist: $(xX) = 0$ ist ja die Inzidenzbezeichnung für Punkt und Ebene. Nun ist

$$(*) \qquad \sigma(Sx + \sqrt{k}\,Vx)(VX - \sqrt{k}\,SX)$$

$$= (p + \sqrt{kq})(Sx + \sqrt{k}\,Vx)(p - \sqrt{kq})^{-1} \cdot (p - \sqrt{kq})^{+1} \cdot (VX - \sqrt{k}\,SX)(p + \sqrt{kq})^{-1}$$

$$= (p + \sqrt{kq})(Sx + \sqrt{k}\,Vx)(VX - \sqrt{k}\,SX)(p + \sqrt{kq})^{-1}.$$

Weiter ist

$$(Sx + \sqrt{k}Vx)(VX - \sqrt{k}SX) = SxVx - kVxSX - \sqrt{k}(SxSX - VxVX).$$

Hier ist aber $Sx\,SX - Vx\,VX = (xX)$ ein Skalar, $Sx\,VX - kVx\,SX$ ein Vektor. Da jedoch für eine beliebige Quaternion a mit x auch axa^{-1} ein Vektor ist (vgl. Nr. 5 der ersten Abhandlung), so zerfällt (*) in zwei Teile, von denen der zweite

$$\sigma(xX) = (p + \sqrt{kq})(xX)(p + \sqrt{kq})^{-1} = (xX)$$

ist.

10. Viel wichtiger als die Punkt- und Ebenentransformationen sind für uns die *Geradentransformationen.* Wir fassen die Linienkoordinaten $\mathfrak{x}_1 \mid \mathfrak{x}_2 \mid \mathfrak{x}_3 \mid \dot{\mathfrak{x}}_1 \mid \dot{\mathfrak{x}}_2 \mid \dot{\mathfrak{x}}_3$ zu zwei Vektoren

$$(23) \qquad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1\mathfrak{e} + \mathfrak{x}_2\mathfrak{e}_2 + \mathfrak{x}_3\mathfrak{e}_3, \quad \dot{\mathfrak{x}} = \dot{\mathfrak{x}}_1\mathfrak{e}_1 + \dot{\mathfrak{x}}_2\mathfrak{e}_2 + \dot{\mathfrak{x}}_3\mathfrak{e}_3$$

zusammen und behaupten die Richtigkeit der Transformationsgleichungen

$$(24) \qquad \varrho(\mathfrak{x} + \sqrt{k}\dot{\mathfrak{x}}) = (p + \sqrt{kq})(\mathfrak{x} + \sqrt{k}\dot{\mathfrak{x}})(p + \sqrt{kq})^{-1}$$

bzw.

$$(25) \qquad \varrho(\mathfrak{x} + \sqrt{k}\dot{\mathfrak{x}}) = (p + \sqrt{kq})(-\mathfrak{x} + \sqrt{k}\dot{\mathfrak{x}})(p + \sqrt{kq})^{-1},$$

wo (15) gilt und $N(p + \sqrt{kq}) \neq 0$ ist. Die letzteren gehen aus den ersteren hervor, indem man bei $x_1 \mid x_2 \mid x_3$ und $y_1 \mid y_2 \mid y_3$ die Vorzeichen ändert.

Beweis. Es ist

$$(p \pm \sqrt{kq})(\tilde{p} \pm \sqrt{k}\tilde{q}) = p\tilde{p} + kq\tilde{q} \pm \sqrt{k}(p\tilde{q} + q\tilde{p}) = N(p \pm \sqrt{kq}).$$

Nun besteht aber die Bedingung

$$p\tilde{q} + qp = p_0 q_0 + (pq) = 0,$$

d. h. es ist

$$N(p + \sqrt{kq}) = N(p - \sqrt{kq}) = N$$

und damit

$$p \pm \sqrt{kq} = N \cdot (\tilde{p} \pm \sqrt{k\tilde{q}})^{-1}.$$

Jetzt ist

$$\varrho(Sx + \sqrt{k}\,Vx) = (p + \sqrt{kq})\,(Sx + \sqrt{k}\,Vx)\,(p - \sqrt{kq})^{-1}$$

$$\varrho(Sy - \sqrt{k}\,Vy) = (p + \sqrt{kq})\,(Sy - \sqrt{k}\,Vy)\,(p - \sqrt{kq})^{-1}$$

$$= (\tilde{p} - \sqrt{k\tilde{q}})^{-1}(Sy - \sqrt{k}\,Vy)\,(\tilde{p} + \sqrt{kq}).$$

Daraus folgt durch Multiplikation

$$\sigma(Sx\,Sy - k\,Vx\,Vy + \sqrt{k}(Vx\,Sy - Sx\,Vy)) = (p + \sqrt{kq})\,(Sx\,Sy - k\,Vx\,Vy + \sqrt{k}(Vx\,Sy - Sx\,Vy))\,(p + \sqrt{kq})^{-1},$$

da $(p - \sqrt{kq})^{-1}(p - \sqrt{k\tilde{q}})^{-1} = N^{-1}$, $N^{-1} \cdot (\tilde{p} + \sqrt{k\tilde{q}}) = (p + \sqrt{kq})^{-1}$ ist. Es ist aber

$$Sx\,Sy - k\,Vx\,Vy = x \mid y - k\{(x_2 y_3 - x_3 y_2)\,e_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3)\,e_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\,e_3\}$$
$$= x \mid y - k\dot{\mathfrak{x}}$$

und $Vx\,Sy - Sx\,Vy = -\mathfrak{x}$. Also kommt

$$\sigma(x \mid y - k\dot{\mathfrak{x}} - \sqrt{k}\mathfrak{x}) = (p + \sqrt{kq})\,(x \mid y - k\dot{\mathfrak{x}} - \sqrt{k}\mathfrak{x})\,(p + \sqrt{kq})^{-1}.$$

Aber $x \mid y$ ist ein Skalar, $-k\dot{\mathfrak{x}} - \sqrt{k}\mathfrak{x}$ ein Vektor. Also bestätigt sich die Invarianz $\sigma\bar{x} \mid \bar{y} = x \mid y$ und andererseits kommt nach Kürzen mit $-\sqrt{k}$ sofort (24).

Man erkennt, daß die Geradentransformation deswegen viel einfacher als die Punkt und Ebenentransformation ist, weil sie wieder von der Form $\varrho x = axa^{-1}$ ist, in der recht nur *eine* konstante Quaternion steht.

11. Nun ist vermutungsweise auch in der NEG die allgemeinste Bewegung eine *Schraubung*. Ihre *Achse* ist eine *Ruhegerade*. Wir fragen daher nach den *Ruhegeraden einer Bewegung*[15]). Für sie muß

$$\varrho(\mathfrak{x} + \sqrt{k}\mathfrak{x}) = (p + \sqrt{kq})\,(\mathfrak{x} + \sqrt{k}\mathfrak{x})\,(p + \sqrt{kq})^{-1} \tag{0}$$

sein. Daraus folgt

$$\varrho(\tilde{\mathfrak{x}} + \sqrt{k}\tilde{\mathfrak{x}}) = (\tilde{p} + \sqrt{k\tilde{q}})^{-1}\,(\mathfrak{x} + \sqrt{k}\tilde{\mathfrak{x}})\,(\tilde{p} + k\tilde{q})$$

und damit wie im letzten Beweis durch Multiplikation

$$\varrho^2(\mathfrak{x} + \sqrt{k}\mathfrak{x})\,(\tilde{\mathfrak{x}} + \sqrt{k}\tilde{\mathfrak{x}}) = \varrho^2 \cdot N(\mathfrak{x} + \sqrt{k}\mathfrak{x}) = \varrho^2 \cdot \mathfrak{x} \mid \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{x} \mid \mathfrak{x},$$

also entweder $\varrho = \pm 1$ oder $\mathfrak{x} \mid \mathfrak{x} = 0$. Da wir uns auf eigentliche Ruhegeraden beschränken, so ist also $\varrho = \pm 1$. Nun folgt aus (0)

$$\varrho(\mathfrak{x} + \sqrt{k}\mathfrak{x})\,(p + \sqrt{kq}) = (p + \sqrt{kq})\,(\mathfrak{x} + \sqrt{k}\mathfrak{x}),$$

---

[15]) Für das Folgende vgl. *Erich Kosiol*, Grundlagen der Kinematik im hyperbolischen Raum, Dissertation Bonn 1922, die allerdings nur die Ergebnisse, nicht ihre Herleitung enthält. In bezug auf jene gebührt jedenfalls Herrn *Kosiol* die Priorität hinsichtlich der Ergebnisse in den Nrn. **13** und **17** bis **20**.

aus $\varrho xa = ax$ aber, wo x ein Vektor ist, sofort

$$\varrho(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$$

und

$$(00) \qquad \varrho(a_4x_1 + a_2x_3 - a_3x_2) = a_4x_1 - a_2x_3 + a_3x_2 \text{ und zyklisch.}$$

Mit $\varrho = -1$ folgt $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, mit $\varrho = 1$ aber $x_1 : x_2 : x_3 = a_1 : a_2 : a_3$. Also kommt in unserem Fall $\varrho = +1$ und $\mathfrak{x} + \sqrt{k}\dot{\mathfrak{x}} = \sigma(p + \sqrt{k}q)$. Dabei kann und muß σ, wie sogleich deutlich werden wird, selbst eine Zahl von der Form $\sigma' + \sqrt{k}\sigma''$ sein, so daß $\mathfrak{x} + \sqrt{k}\dot{\mathfrak{x}} = \sigma'p + k\sigma''q + \sqrt{k}(\sigma''p + \sigma'q)$, also

$$(000) \qquad \mathfrak{x} = \sigma'p + k\sigma''q, \quad \dot{\mathfrak{x}} = \sigma''p + \sigma'q$$

ist. Der Wert des Verhältnisses $\sigma' : \sigma''$ bestimmt sich nun daraus, daß $\mathfrak{x}$ und $\dot{\mathfrak{x}}$ als Plückersche Koordinaten die Bedingung $(\mathfrak{x}\dot{\mathfrak{x}}) = 0$ (vgl. (2) in Nr. 7) erfüllen. Mittels der Abkürzung

$$(26) \qquad p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + k(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) = \langle pq \rangle$$

folgt so

$$(0000) \qquad \sigma'^2 p_4q_4 - \sigma'\sigma'' \langle pq \rangle + k\sigma''^2 p_4q_4 = 0,$$

$$\sigma' : \sigma'' = \begin{cases} (\langle pq \rangle \pm W) : 2p_4q_4 \\ 2kp_4q_4 : (\langle pq \rangle \pm W), \end{cases}$$

wo zur Abkürzung

$$(27) \qquad \langle pq \rangle^2 - 4kp_4^2q_4^2 = W^2$$

gesetzt ist. Also kommt

$$(28) \qquad \begin{aligned} \varrho\mathfrak{x} &= \tfrac{1}{2}(\langle pq \rangle \pm W)\, p + kp_4q_4q, \\ \varrho\dot{\mathfrak{x}} &= p_4q_4p + \tfrac{1}{2}(\langle pq \rangle \pm W)\, q. \end{aligned}$$

Zur Entscheidung des Vorzeichens bilden wir

$$(*) \qquad \varrho^2 \cdot \mathfrak{x} \mid \mathfrak{x} = 2\,\{\langle pq \rangle^2 - 2kp_4^2q_4^2\}\,(\langle pq \rangle \pm W).$$

Die linke Seite ist positiv (s. o. Nr. 7). Auch die erste Klammer ist es für $k < 0$, aber auch für $k > 0$, da man sie in der Form

$$(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^2 + k^2(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)^2 + 2k\,\{(p_2q_3 - p_3q_2)^2 + (p_3q_1 - p_1q_3)^2 + (p_1q_2 - p_2q_1)^2\}$$

schreiben kann. Für $k > 0$ ist auch $\langle pq \rangle < W$, und es sind beide Schraubenachsen *eigentlich*, für $k < 0$ dagegen ist die rechte Seite von (*) nur für das obere Zeichen positiv, also ist nur die eine Schraubenachse

$$(29) \qquad \begin{cases} \varrho\mathfrak{x} = \tfrac{1}{2}(\langle pq \rangle + W)\, p + kp_4q_4q \\ \varrho\dot{\mathfrak{x}} = p_4q_4 \cdot p + \tfrac{1}{2}(\langle pq \rangle + W)\, q \end{cases}$$

oder auch

$$\begin{cases} \varrho\mathfrak{x} = kp_4q_4p + \dfrac{k}{2}\,(\langle pq \rangle - W)\, q \\ \varrho\dot{\mathfrak{x}} = \tfrac{1}{2}(\langle pq \rangle) - W)\, p + kp_4q_4q \end{cases}$$

eigentlich.

12. Nun fehlen noch *Drehwinkel* φ und *Schubstrecke* σ der *Schraubung*. Hier nehmen wir zunächst einen sehr merkwürdigen Satz als gültig an, den wir in Nr. 14 beweisen werden. Die Formeln (24) stimmen für $\mathfrak{x} + \sqrt{k}\dot{\mathfrak{x}} = x$ und $p + \sqrt{k}q = a$ mit den Formeln (13) der Nr. 3 überein. Dort haben wir nun den Drehwinkel ϑ der Drehung oder (Nr. 5) die Schubstrecke χ der Schiebung aus der Formel $\cos\vartheta = C\chi = \dfrac{a_0^2 - a \mid a}{a_0^2 + a \mid a}$ berechnet. Es

besteht nun der merkwürdige und glänzende Satz — dessen Entdeckung man Friedrich Schilling verdankt und auf dem auch die komplexe Trigonometrie beruhen wird — daß in unserem Fall das Argument die Form $\varphi + \sqrt{k}\sigma$ besitzt. Der Drehwinkel φ und die Schubstrecke σ erscheinen als zu *einer* komplexen Zahl, die wir die *Schraubgröße* nennen wollen, verbunden in einer *einzigen* Gleichung

$$(30)\quad \cos(\varphi + \sqrt{k}\sigma) = \frac{(p_4 + \sqrt{k}q_4)^2 - (p_1 + \sqrt{k}q_1)^2 - (p_2 + \sqrt{k}q_2)^2 - (p_3 + \sqrt{k}q_3)^2}{(p_4 + \sqrt{k}q_4)^2 + (p_1 + \sqrt{k}q_1)^2 + (p_2 + \sqrt{k}q_2)^2 + (p_3 + \sqrt{k}q_3)^2}$$
$$= \frac{p_4^2 + kq_4^2 - \langle pq\rangle + 4\sqrt{k}p_4q_4}{p_4^2 + kq_4^2 + \langle pq\rangle} \quad \text{(mit (15)!)}.$$

Daraus folgt

$$(*)\qquad 1 + \cos(\varphi + \sqrt{k}\sigma) = 2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2} + \sqrt{k}\,\frac{\sigma}{2}\right) = 2\,\frac{(p_4 + \sqrt{k}q_4)^2}{p_4^2 + kq_4^2 + \langle pq\rangle}.$$

Der Nenner $p_4^2 + kq_4^2 + \langle pq\rangle$ ist die Norm $N(p \pm \sqrt{k}q) = N$, so daß

$$(31)\qquad p_4^2 + kq_4^2 + \langle pq\rangle = N.$$

Nun folgt

$$W^2 + 4p_4^2N = (2p_4^2 + \langle pq\rangle)^2,\quad W^2 + 4kq_4^2N = (2kq_4^2 + \langle pq\rangle)^2$$

oder

$$(0)\qquad \begin{cases} 4p_4^2N = \{2p_4^2 + \langle pq\rangle + W\}\,\{2p_4^2 + \langle pq\rangle - W\} \\ 4kq_4^2N = \{2kq_4^2 + \langle pq\rangle + W\}\,\{2kq_4^2 + \langle pq\rangle - W\}. \end{cases}$$

Andererseits folgt

$$(00)\qquad (2p_4^2 + \langle pq\rangle + W)(2kq_4^2 + \langle pq\rangle + W) = 4N\cdot\frac{\langle pq\rangle + W}{2},$$

so daß

$$(000)\qquad \frac{2p_4^2 + \langle pq\rangle - W}{2kq_4^2 + \langle pq\rangle + W} = \frac{p_4^2}{\frac{1}{2}(\langle pq\rangle + W)},\quad \frac{2kq_4 + \langle pq\rangle - W}{2p_4^2 + \langle pq\rangle + W} = \frac{kq_4^2}{\frac{1}{2}(\langle pq\rangle + W)}$$

ist. Jetzt wird (*) zu

$$(32)\qquad \cos\left(\frac{\varphi}{2} + \sqrt{k}\,\frac{\sigma}{2}\right) = \frac{p_4 + \sqrt{k}q_4}{\sqrt{N}}.$$

Nun ist aber

$$\cos\left(\frac{\varphi}{2} + \sqrt{k}\,\frac{\sigma}{2}\right) = \cos\frac{\varphi}{2}\cos\sqrt{k}\,\frac{\sigma}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\sin\left(\sqrt{k}\,\frac{\sigma}{2}\right) = \cos\frac{\varphi}{2}\,C\,\frac{\sigma}{2} - \sqrt{k}\sin\frac{\varphi}{2}\,S\,\frac{\sigma}{2}$$

Also folgt weiter $C\,\frac{\sigma}{2}\cos\frac{\varphi}{2} - \sqrt{k}\,S\,\frac{\sigma}{2}\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{p_4 + \sqrt{k}q_4}{\sqrt{N}}$, so daß

$$(33)\qquad C\,\frac{\sigma}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{p_4}{\sqrt{N}},\quad S\,\frac{\sigma}{2}\sin\frac{\varphi}{2} = -\frac{q_4}{\sqrt{N}}$$

ist. Damit kommt

$$C^2\,\frac{\sigma}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2} = \frac{p_4^2}{N},\quad kS^2\,\frac{\sigma}{2}\sin^2\frac{\varphi}{2} = \left(1 - C^2\,\frac{\sigma}{2}\right)\left(1 - \cos^2\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{kq_4^2}{N},$$
$$C^2\,\frac{\sigma}{2} + \cos^2\frac{\varphi}{2} = \frac{2p_4^2 + \langle pq\rangle}{N}.$$

$C^2\,\frac{\sigma}{2}$ und $\cos^2\frac{\varphi}{2}$ sind also Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$Nz^2 - (2p_4^2 + \langle pq\rangle)\,z + p_4^2 = 0,$$

also

$$C^2\,\frac{\sigma}{2} = \frac{2p_4^2 + \langle pq\rangle + W}{2N},\quad \cos^2\frac{\varphi}{2} = \frac{2p_4^2 + \langle pq\rangle - W}{2N},$$

da $C^2 \frac{\sigma}{2} > \cos^2 \frac{\varphi}{2}$ ist. Weiter wird

$$kS^2 \frac{\sigma}{2} = \frac{(2kq_4^2 + \langle pq \rangle + -W}{2N}, \quad \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{2kq_4^2 + \langle pq \rangle + W}{2N},$$

$$kT^2 \frac{\sigma}{2} = \frac{(2kq_4^2 + \langle pq \rangle) - W}{2p_4^2 + \langle pq \rangle + W}, \quad \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{2p_4^2 + \langle pq \rangle - W}{2kq_4^2 + \langle pq \rangle + W}$$

oder mit (000)

$$(34) \qquad T \frac{\sigma}{2} = \frac{q_4}{\sqrt{\frac{1}{2}(\langle pq \rangle + W)}}, \quad Ct \frac{\sigma}{2} = \frac{p_4}{\sqrt{\frac{1}{2k}(\langle pq \rangle - W)}},$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = \frac{-p_4}{\sqrt{\frac{1}{2}(\langle pq \rangle + W)}}, \quad \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{-q_4}{\sqrt{\frac{1}{2k}(\langle pq \rangle - W)}}.$$

Die zweite und vierte Formel erg.bt sich daraus, daß aus (33)

$$T \frac{\sigma}{2} : \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = -q_4 : p_4$$

folgt.

13. Jetzt können wir die *Bewegungen* einteilen:

1. Fall. $p_4 \neq 0, q_4 \neq 0$: *Schraubungen.*
Schraubachse, Schubstrecke und Drehwinkel aus (29) und (34).

2. Fall. $p_4 = 0, q_4 \neq 0$: *Halbschraubungen.*
Achse $p_1 : p_2 : p_3 : q_1 : q_2 : q_3$, $T \frac{\sigma}{2} = \frac{q_4}{\sqrt{\langle pq \rangle}}$, $\varphi = \pi$.

3. Fall. $p_4 \neq 0, q_4 = 0, \langle pq \rangle > 0$: *Drehungen.*
Achse $p_1 : p_2 : p_3 : q_1 : q_2 : q_3$, $\sigma = 0$, $\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = -p_4 : \sqrt{\langle pq \rangle}$.

4. Fall. $p_4 \neq 0, q_4 = 0, \langle pq \rangle < 0$: *Schiebungen.*
Achse $kq_1 : kq : kq_3 : p_1 : p_2 : p_3$, $Ct \frac{\sigma}{2} = \frac{p_4}{\sqrt{\frac{\langle pq \rangle}{k}}}$, $\varphi = 0$.

5. Fall. $p_4 \neq 0, q_4 = 0, \langle pq \rangle = 0$: *Grenzdrehungen.*
Drehwinkel und Schubstrecke sinnlos.

6. Fall. $p_4 = 0, q_4 = 0$: *Umwendungen.*
Achse $p_1 : p_2 : p_3 : q_1 : q_2 : q_3$, $\sigma = 0$, $\varphi = \pi$.

7. Fall. $p_4 \neq 0, q_4 = 0, p_1 = p_2 = p_3 = q_1 = q_2 = q_3$: *Identität.*

Sind umgekehrt die *Schraubachse* $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \mid \mathfrak{p}_2 \mid \mathfrak{p}_3 \mid \dot{\mathfrak{p}}_1 \mid \dot{\mathfrak{p}}_2 \mid \dot{\mathfrak{p}}_3$ die Schubstrecke σ und der Drehwinkel φ gegeben, so kann man die Parameter p und q angeben. Dabei sei $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} > 0$, also von der *Grenzdrehung* abgesehen. Dann muß nämlich nach Nr. 11

$$(00) \qquad p + \sqrt{k}q = \varrho(\mathfrak{p} + \sqrt{k}\dot{\mathfrak{p}}), \; p = \varrho'\mathfrak{p} + \varrho''k\dot{\mathfrak{p}}, \; q = \varrho''\mathfrak{p} + \varrho'\dot{\mathfrak{p}}$$

sein. Daraus folgt $\langle pq \rangle = (\varrho'^2 + k\varrho''^2)\, \mathfrak{p} \mid \mathfrak{p}$, $p_4 q_4 = -(pq) = -\varrho'\varrho''\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p}$, ferner $\sqrt{\langle pq \rangle^2 - 4kp_4^2 q_4^2} = (\varrho'^2 - k\varrho''^2)\, \mathfrak{p} \mid \mathfrak{p}$ mit dem $+$-Zeichen bei der Wurzel (Probe $k = 0$), also

$$\sqrt{\frac{\langle pq \rangle + W}{2}} = \varrho' \sqrt{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p}}, \quad \sqrt{\frac{\langle pq \rangle - W}{2k}} = \varrho'' \sqrt{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p}}.$$

Andererseits ist nach (34)

$$q_4 = \varrho' \sqrt{\mathfrak{p}\,|\,\mathfrak{p}}\; T\frac{\sigma}{2} = -\varrho''\sqrt{\mathfrak{p}\,|\,\mathfrak{p}}\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2},\; p_4 = \varrho''\sqrt{\mathfrak{p}\,|\,\mathfrak{p}}\; Ct\frac{\sigma}{2} = -\varrho'\sqrt{\mathfrak{p}\,|\,\mathfrak{p}}\,\mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2},$$

woraus

$$p_4 q_4 = -\varrho'^2\mathfrak{p}\,|\,\mathfrak{p}\; T\frac{\sigma}{2}\,\mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2} = -\varrho''^2\mathfrak{p}\,|\,\mathfrak{p}\; Ct\frac{\sigma}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2} = -\varrho'\varrho''\mathfrak{p}\,|\,\mathfrak{p} \quad \text{(s. o.)}$$

folgt, so daß entweder

$$(35)\qquad \left\{\begin{aligned} \varrho p_i &= \mathfrak{p}_i + kT\frac{\sigma}{2}\,\mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2}\,\dot{\mathfrak{p}}_i \\ \varrho q_i &= T\frac{\sigma}{2}\,\mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2}\,\mathfrak{p}_i + \dot{\mathfrak{p}}_i \end{aligned}\right\},\quad \left\{\begin{aligned} \varrho p_4 &= -\,\mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2}\sqrt{\mathfrak{p}\,|\,\mathfrak{p}} \\ \varrho q_4 &= T\frac{\sigma}{2}\sqrt{\mathfrak{p}\,|\,\mathfrak{p}} \end{aligned}\right\}$$

oder

$$(36)\qquad \left\{\begin{aligned} \varrho p_i &= Ct\frac{\sigma}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}\,\mathfrak{p}_i + k\dot{\mathfrak{p}}_i, \\ \varrho q_i &= \mathfrak{p}_i + Ct\frac{\sigma}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}\,\dot{\mathfrak{p}}_i \end{aligned}\right\},\quad \left\{\begin{aligned} \varrho p_4 &= -\,Ct\frac{\sigma}{2}\sqrt{\mathfrak{p}\,|\,\mathfrak{p}} \\ \varrho q_4 &= \mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}\sqrt{\mathfrak{p}\,|\,\mathfrak{p}} \end{aligned}\right\}$$

ist.

14. Es fehlt uns noch der *Beweis des Schillingschen Satzes.* Ihn erbringen wir, indem wir der Schraubenachse eine besonders einfache Lage geben. Das dürfen wir, denn wir können zunächst zeigen, daß der Ausdruck $\cos(\varphi + \sqrt{k}\sigma)$ gegenüber Bewegungen invariant ist. Es sei zur Abkürzung statt (24)

$$(0)\qquad \varrho x = axa^{-1}$$

geschrieben und es sei auf den ganzen Raum die Bewegung

$$(00)\qquad \varrho\hat{x} = bxb^{-1}$$

ausgeübt. Dann ist in (0) statt x und x gleichzeitig bxb^{-1} und bxb^{-1} zu setzen, so daß $\varrho b\bar{x}b^{-1} = abxb^{-1}a^{-1}$ oder

$$(000)\qquad \varrho x = (b^{-1}ab)\,x(b^{-1}ab)^{-1} = \breve{a}x\breve{a}^{-1}, \text{ also } \breve{a} = b^{-1}ab$$

folgt. Nun sei, in Skalare und Vektoren zerlegt $a = a_0 + \mathfrak{a}$ und $\breve{a} = \breve{a}_0 + \breve{\mathfrak{a}}$, also $\breve{a}_0 + \breve{\mathfrak{a}} = b^{-1}a_0b + b^{-1}\mathfrak{a}b$ oder, da $\breve{\mathfrak{a}} = b^{-1}\mathfrak{a}b$ ein *Vektor* ist, $\breve{a}_0 = b^{-1}a_0b = b^{-1}ba_0 = a_0$. Da aber (000) eine Bewegung ist, so ist $\breve{\mathfrak{a}}\,|\,\hat{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}\,|\,\mathfrak{a}$; also sind a_0 und $\mathfrak{a}\,|\,\mathfrak{a} = a\,|\,a$ Invarianten und damit ist auch $\cos(\varphi + \sqrt{k}\sigma)$ eine solche.

Nun lassen wir die Drehachse mit der x_3-Achse zusammenfallen, nehmen also $\mathfrak{p}_1 = 0$, $\mathfrak{p}_2 = 0$, $\dot{\mathfrak{p}}_1 = 0$, $\dot{\mathfrak{p}}_2 = 0$, $\dot{\mathfrak{p}}_3 = 0$, und da es auf einen Proportionalitätsfaktor nicht ankommt, $\mathfrak{p}_3 = 1$ an. Da wir noch nicht wissen, ob die Gleichungen (34) gelten, setzen wir $T\frac{\sigma}{2} = \lambda$ und $\mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2} = \mu$, und betrachten λ und μ als Unbekannte. Aus (35) ergeben sich für die p_i und q_i die Werte $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $p_3 = 1$, $p_4 = -\mu$; $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, $q_3 = \lambda\mu$, $q_4 = \lambda$. Jetzt lauten die Gleichungen (19) für die Punkttransformation, wenn man rechts $(p - \sqrt{k}q)^{-1}$ durch $\tilde{p} - \sqrt{k}\tilde{q}$ ersetzt:

$$\begin{aligned} &\varrho\,\{\bar{x}_4 + \sqrt{k}(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3)\} \\ &= [-(\mu + \lambda\sqrt{k}) + (1 - \sqrt{k}\lambda\mu)\,e_3]\,\{x_4 + \sqrt{k}(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3)\} \\ &\quad \cdot [-(\mu - \lambda\sqrt{k}) - (1 + \sqrt{k}\lambda\mu)\,e_3] \end{aligned}$$

und daraus ergeben sich die Koordinatengleichungen

$$\varrho x_1 = (1 + k\lambda^2)\,[(\mu^2 - 1)\,x_1 + 2\mu x_2], \qquad \varrho x_3 = (1 + \mu^2)\,[(1 - k\lambda^2)\,x_3 + 2\lambda x_4],$$
$$\varrho x_2 = (1 + k\lambda^2)\,[-2\mu x_1 + (\mu^2 - 1)\,x_2], \quad \varrho x_4 = (1 + \mu^2)\,[-2k\lambda x_3 + (1 - k\lambda)\,x_4].$$

Nun lauten die Gleichungen der Ebenen durch x bzw. x und die x_3-Achse

$$x_2 z_1 - x_1 z_2 = 0 \text{ und } [-2\mu x_1 + (\mu^2 - 1)\,x_2]\,z_1 - [\mu^2 - 1)\,x_1 + 2\mu x_2]\,z_2 = 0,$$

so daß ihre Koordinaten $X_1 = x_2$, $X_2 = -x_1$, $X_3 = 0$, $X_4 = 0$; $\bar{X}_1 = -2\mu x_1 + (\mu^2 - 1)\,x_2$, $X_2 = (\mu^2 - 1)\,x_1 + 2\mu x_2$, $X_3 = 0$, $X_4 = 0$ sind. Ihr Winkel ergibt sich aus

$$\operatorname{ctg} \varphi' = \frac{X \mid \bar{X}}{\sqrt{X \mid X}\,\sqrt{\bar{X} \mid \bar{X}}} = \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1},$$

woraus sofort $\mu = \operatorname{ctg} \frac{\varphi'}{2}$, $\varphi' = \varphi$ folgen.

Die Ebenen durch x und x senkrecht zur x_3-Achse treffen diese in den Punkten

$$0 \mid 0 \mid x_3 \mid x_4 \text{ und } 0 \mid 0 \mid (1 - k\lambda^2)\,x_3 + 2\lambda x_4 \mid -2k\lambda x_3 + (1 - k\lambda^2)\,x_4.$$

Ihr Abstand ergibt sich aus

$$C\sigma' = \frac{x \mid x}{\sqrt{x \mid x}\,\sqrt{x \mid x}} = \frac{1 - k\lambda^2}{1 + k\lambda^2},$$

woraus sofort $\lambda = T\frac{\sigma'}{2}$, $\sigma' = \sigma$ folgen, q. e. d.

15. Wir kommen jetzt zu den *Umlegungen* mit den Gleichungen

$$\varrho(Sx + \sqrt{k}\,Vx) = (p + \sqrt{k}q)\,(Sx - \sqrt{k}\,Vx)\,(p - \sqrt{k}q)^{-1}, \tag{20}$$

$$\varrho(V\bar{X} + \sqrt{k}S\bar{X}) = (p + \sqrt{k}q)\,(VX - \sqrt{k}SX)\,(p - \sqrt{k}q)^{-1}, \tag{22}$$

$$\varrho(\mathfrak{x} + \sqrt{k}\dot{\mathfrak{x}}) = (p + \sqrt{k}q)\,(-\mathfrak{x} + \sqrt{k}\dot{\mathfrak{x}})\,(p + \sqrt{k}q)^{-1}. \tag{25}$$

Wir werden sehen, daß die Umlegungen nicht nur *Ruhegeraden*, sondern auch *Ruhepunkte* und *Ruheebenen* besitzen. Daß für die eigentlichen unter ihnen, auf die wir uns beschränken, $\varrho^2 = 1$ ist, beweist man wie in Nr. **11**. Es wird sich nun herausstellen, daß sich mit merkwürdiger Vertauschung der vierten Koordinaten einerseits $q_1 \mid q_2 \mid q_3 \mid p_4$ wie ein Punkt, andererseits $p_1 \mid p_2 \mid p_3 \mid q_4$ wie eine Ebene verhält. Zur Vereinfachung der Schreibweise ist es jetzt schon zweckmäßig, dafür $m_1 \mid m_2 \mid m_3 \mid m_4$ bzw. $M_1 \mid M_2 \mid M_3 \mid M_4$ und überdies $m_1 e_1 + m_2 e_2 + m_3 e_3 = \mathfrak{m}$[16]), $M_1 e_1 + M_2 e_2 + M_3 e_3 = \mathfrak{M}$ zu setzen. Dann ist wegen (15) in der Form $(pq) + p_4 q_4 = 0$ einfach

$$(mM) = 0, \tag{37}$$

d. h. der Punkt m liegt auf der Ebene M.

Nun wird $p + \sqrt{k}q = m_4 + \mathfrak{M} + \sqrt{k}(M_4 + m)$, und für die Ruhegeraden kommt

$$\varrho(\mathfrak{x} + \sqrt{k}\dot{\mathfrak{x}})\,\{m_4 + \mathfrak{M} + \sqrt{k}(M_4 + \mathfrak{m})\} = \{m_4 + \mathfrak{M} + \sqrt{k}(M_4 + m)\}\,(-\mathfrak{x} + \sqrt{k}\dot{\mathfrak{x}})$$

mit $\varrho = \pm 1$, also

$$(*) \quad \begin{cases} \varrho\mathfrak{x}(m_4 + \mathfrak{M}) + (m_4 + \mathfrak{M})\,\mathfrak{x} + k\,\{\varrho\dot{\mathfrak{x}}(M_4 + \mathfrak{m}) - (M_4 + \mathfrak{m})\,\dot{\mathfrak{x}}\} = 0, \\ \varrho\dot{\mathfrak{x}}(m_4 + \mathfrak{M}) - (m_4 + \mathfrak{M})\,\dot{\mathfrak{x}} + \quad \varrho\mathfrak{x}(M_4 + \mathfrak{m}) + (M_4 + \mathfrak{m})\,\mathfrak{x} = 0, \end{cases}$$

[16]) Eine Verwechslung mit Linienkoordinaten ist wohl nicht zu befürchten.

Wir setzen zuerst $\varrho = -1$ und erhalten

$$(**)\qquad \begin{cases} \mathfrak{x}\mathfrak{M} - \mathfrak{M}\mathfrak{x} + k(2M_4\dot{\mathfrak{x}} + \mathfrak{x}\mathfrak{m} + \mathfrak{m}\dot{\mathfrak{x}}) = 0, \\ 2m_4\dot{\mathfrak{x}} + \dot{\mathfrak{x}}\mathfrak{M} + \mathfrak{M}\dot{\mathfrak{x}} + \mathfrak{x}\mathfrak{m} - \mathfrak{m}\mathfrak{x} = 0. \end{cases}$$

Für zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ist aber

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = -\mathfrak{a} \mid \mathfrak{b} + [\mathfrak{a}\mathfrak{b}], \quad \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{b}\mathfrak{a} = -2\mathfrak{a} \mid \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{a}\mathfrak{b} - \mathfrak{b}\mathfrak{a} = 2[\mathfrak{a}\mathfrak{b}].$$

Also kommt

$$\begin{cases} -[\mathfrak{M}\mathfrak{x}] + kM_4\dot{\mathfrak{x}} - k\mathfrak{m} \mid \dot{\mathfrak{x}} = 0 \\ \quad m_4\dot{\mathfrak{x}} - \mathfrak{M} \mid \dot{\mathfrak{x}} - [\mathfrak{m}\mathfrak{x}] = 0 \end{cases}$$

oder, nach Trennung in Skalaren und Vektoren

$$\mathfrak{m} \mid \dot{\mathfrak{x}} = 0, \quad \mathfrak{M} \mid \dot{\mathfrak{x}} = 0; \quad kM_4\dot{\mathfrak{x}} = [\mathfrak{M}\mathfrak{x}], \quad m_4\dot{\mathfrak{x}} = [\mathfrak{m}\mathfrak{x}].$$

Daraus folgt weiter $\dot{\mathfrak{x}} = \sigma\widehat{\mathfrak{m}\mathfrak{M}}$, also z. B.

$$\begin{matrix} \sigma k M_4(m_3M_1 - m_1M_3) = M_3\mathfrak{x}_1 - M_1\mathfrak{x}_3 & - m_1 \\ \sigma m_4 \quad (m_3M_1 - m_1M_3) = m_3\mathfrak{x}_1 - m_1\mathfrak{x}_3 & + M_1 \end{matrix} \text{ und hieraus } \mathfrak{x}_1 = \sigma(m_4M_1 - m_1M_4).$$

Also hat die *erste Ruhegerade*, die sog. *Umlegungsgerade* $\mathfrak{u}$ die Koordinaten

$$(38)\qquad \left\{\begin{matrix} \varrho\mathfrak{u}_1 = m_4M_1 - km_1M_4, & \varrho\dot{\mathfrak{u}}_1 = m^2M_3 - m_3M_2 \\ \varrho\mathfrak{u}_2 = m_4M_2 - km_2M_4, & \varrho\dot{\mathfrak{u}}_2 = m_3M_1 - m_1M_3 \\ \varrho\mathfrak{u}_3 = m_4M_3 - km_3M_4, & \varrho\dot{\mathfrak{u}}_3 = m_1M_2 - m_2M_1 \end{matrix}\right\} \text{ mit } (mM) = 0.$$

Daraus folgt noch

$$(39)\qquad \varrho^2\mathfrak{u} \mid \mathfrak{u} = m \mid m \cdot M \mid M.$$

Mit $\varrho = +1$ dagegen folgt aus (*)

$$(***)\qquad \begin{cases} 2m_4\mathfrak{x} + \mathfrak{x}\mathfrak{M} + \mathfrak{M}\mathfrak{x} + k(\dot{\mathfrak{x}}m - m\dot{\mathfrak{x}}) = 0, \\ \dot{\mathfrak{x}}\mathfrak{M} - \mathfrak{M}\dot{\mathfrak{x}} + 2M_4\mathfrak{x} + \mathfrak{x}m + m\mathfrak{x} = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen gehen aus (**) durch Vertauschen von $\mathfrak{x}$ und $k\dot{\mathfrak{x}}$, $\dot{\mathfrak{x}}$ und $\mathfrak{x}$ hervor. Also hat die *zweite Ruhegerade*, die sog. *Nebenachse* $\mathfrak{v}$ die Koordinaten

$$(40)\qquad \left\{\begin{matrix} \varrho\mathfrak{v}_1 = k(m_2M_3 - m_3M_2), & \varrho\dot{\mathfrak{v}}_1 = m_4M_1 - km_1M_4 \\ \varrho\mathfrak{v}_2 = k(m_3M_1 - m_1M_3), & \varrho\dot{\mathfrak{v}}_2 = m_4M_2 - km_2M_4 \\ \varrho\mathfrak{v}_3 = k(m_1M_2 - m_2M_1), & \varrho\dot{\mathfrak{v}}_3 = m_4M_3 - km_3M_4 \end{matrix}\right\} \text{ mit } (mM) = 0.$$

Daraus folgt noch

$$(41)\qquad \varrho^2\mathfrak{v} \mid \mathfrak{v} = km \mid m \cdot M \mid M.$$

In der *hyperbolischen Geometrie* ist also die eine der Ruhegeraden *eigentlich*, die andere *uneigentlich*. Wir entscheiden erst, nachdem wir die Ruhepunkte und Ruheebenen bestimmt haben.

16. Berechnet man nach demselben Verfahren die *Ruhepunkte*, so erhält man als *ersten Ruhepunkt* oder sog. *Mittelpunkt der Umlegung* den Punkt m und als *zweiten Ruhepunkt* den sog. *Neben(mittel)punkt* M^* mit den Koordinaten $M_1 \mid M_2 \mid M_3 \mid kM_4$, der, wie sich alsbald zeigen wird, der absolute Pol der ersten Ruheachse ist. Es ist

$$(42)\qquad M^* \mid M^* = kM \mid M.$$

Berechnet man die Ruheebenen, so erhält man als *erste Ruheebene* oder sog. *Mittelebene der Umlegung* die Ebene M, als *zweite Ruheebene* die *Neben(mittel)ebene* m^* mit den Koordinaten $km_1 \mid km_2 \mid km_3 \mid m_4$, die absolute Polarebene des Nebenmittelpunktes. Es ist

$$(43)\qquad m^* \mid m^* = km \mid m.$$

Die beiden Ruheebenen stehen senkrecht aufeinander, da

$$M_1 \cdot km_1 + M_2 \cdot km_2 + M_3 \cdot km_3 + kM_4 \cdot m_4 = 0$$

ist.

Ihre Schnittlinie lautet in laufenden Punktkoordinaten $(Mx) = 0$, $(m^* x) = 0$. Für einen Punkt y von ihr ist ebenso $(My) = 0$, $(m^* y) = 0$. Daraus ergibt sich mit (1) und (2) sofort

$$M_2\dot{\mathfrak{x}}_3 - M_2\dot{\mathfrak{x}}_3 = M_4\dot{\mathfrak{x}}_1 \text{ und } k(m_2\dot{\mathfrak{x}}_3 - m_3\dot{\mathfrak{x}}_2) = m_4\dot{\mathfrak{x}}_1 \text{ und zyklisch}$$

und daraus (40), d. h. die *zweite Ruhegerade* $\mathfrak{v}$ durch Auflösen nach $\mathfrak{x}$ und $\dot{\mathfrak{x}}$. Die Verbindungsgerade der beiden Ruhepunkte m und M^* hat aber die Koordinaten (38), d. h. sie ist die *erste Ruhegerade* $\mathfrak{u}$. So ergibt sich die Fig. 1 der Ruheelemente, bei der wir auch die wichtigen Normen angeschrieben haben. Übrigens wird sich später noch zeigen, daß die erste Ruhegerade auf beiden Ruheebenen senkrecht steht.

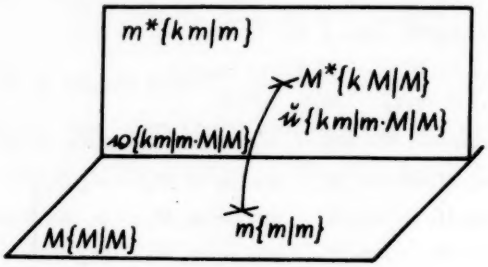


Fig. 1.

17. Nun fehlt aber noch die Hauptsache, der geometrische Zusammenhang zwischen der *Umlegung* und ihren Ruheelementen. Wir betrachten zunächst die *hyperbolische Geometrie* $(k < 0)$. Wie steht es mit dem Eigentlich- oder Uneigentlichsein der Ruheelemente? Wir haben folgende Möglichkeiten:

I. Hauptfall. Umlegungsachse $\mathfrak{u}$ *eigentlich*, d. h. $m \mid m \cdot M \mid M > 0$. Dann ist die *Nebenachse* $\mathfrak{v}$ *uneigentlich*, da $km \mid m \cdot M \mid M < 0$ ist.

1. Fall. Mittelpunkt und *Mittelebene eigentlich*, d. h. $m \mid m > 0$, $M \mid M > 0$. Dann sind *Nebenpunkt* und *Nebenebene* uneigentlich, da $k \cdot m \mid m < 0$, $k \cdot M \mid M < 0$ sind.

2. Fall. Mittelpunkt und *Mittelebene uneigentlich*, d. h. $m \mid m < 0$, $M \mid M < 0$. Dann sind *Nebenpunkt* und *Nebenebene* eigentlich, da $k \cdot m \mid m > 0$, $k \cdot M \mid M > 0$ sind.

II. Hauptfall. Umlegungsachse $\mathfrak{u}$ *uneigentlich*, d. h. $m \mid m \cdot M \mid M < 0$. Dann ist die *Nebenachse* $\mathfrak{v}$ *eigentlich*, da $k \cdot m \mid m \cdot M \mid M > 0$ ist.

Da die beiden Ruhepunkte auf der Umlegungsachse liegen, so müssen sie *beide uneigentlich*, d. h. es muß $m \mid m < 0$, $kM \mid M < 0$ sein. Dann sind *Nebenebene* und *Mittelebene eigentlich*, da $km \mid m > 0$, $M \mid M > 0$ ist.

III. Hauptfall. Umlegungsachse absolut, d. h. $m \mid m \cdot M \mid M = 0$. Die Nebenachse schneidet die Umlegungsachse, da $(\mathfrak{u}\mathfrak{v}) = m \mid m \cdot M \mid M = 0$ ist. Dieser Schnittpunkt muß einer der Ruhepunkte sein.

1. Fall. $m \mid m = 0$. Dann ist m der absolute Punkt der Umlegungsachse. Die durch ihn gehende *Mittelebene* M *ist eigentlich.*

2. Fall. $M \mid M = 0$. Dann ist M^* der absolute Punkt der Umlegungsachse. Die durch ihn gehende *Nebenachse* m^* *ist eigentlich.*

Da $N(p + kq) = m \mid m + M \mid M$ nicht verschwinden darf, so kann der Fall, daß $m \mid m$ und $M \mid M$ beide verschwinden, nicht eintreten.

IV. Hauptfall. Umlegungsachse unbestimmt.

1. Fall. Mittelebene unbestimmt. $M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = 0$. *Spiegelung am Mittelpunkt m* oder *an der Nebenachse m^*.*

2. Fall. Mittelpunkt unbestimmt. $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 0$. *Spiegelung an der Mittelebene M* oder *am Nebenpunkt M^*.*

18. Wir behandeln zunächst diesen IV. Hauptfall.

1. Fall. Dann lauten die Gleichungen (20) mit $p = m_4$, $q = \mathfrak{m}$

$$\varrho(Sx + \sqrt{k}Vx) = (m_4 + \sqrt{k}\mathfrak{m})\,(Sx - \sqrt{k}Vx)\,(m_4 - \sqrt{k}\mathfrak{m})^{-1}. \tag{44}$$

Die Koordinatengleichungen werden einfach

$$\varrho x = -m \mid m \cdot x + 2m \mid x \cdot m. \tag{45}$$

Die Punkte x, x, m liegen in *einer* Geraden und es wird $\varrho m \mid x = m \mid m \cdot m \mid x$, $\varrho^2 x \mid x = (m \mid m)^2 x \mid x$, also

$$\frac{m \mid x}{\sqrt{x \mid x}\sqrt{m \mid m}} = \frac{m \mid x}{\sqrt{x \mid x}\sqrt{m \mid m}}.$$

x und x haben also dieselbe Entfernung von m, die Transformation ist also die *Punktspiegelung an m.*

Die Nebenachse ist $km_1 \mid km_2 \mid km_3 \mid km_4$. Der Abstand des Punktes x von ihr ist

$$\frac{m \mid x}{\sqrt{x \mid x}\sqrt{km \mid m}} = \frac{m \mid x}{\sqrt{x \mid x}\sqrt{km \mid m}}.$$

Die Transformation ist also auch eine *Spiegelung an der Nebenebene.* Je nachdem der *Mittelpunkt m* oder die *Nebenebene m^** eigentlich sind, hat man eine *Punkt-* oder eine *Ebenenspiegelung.*

2. Fall. Die Koordinatendarstellung der *Ebenenspiegelung an der Ebene M* lautet

$$\varrho x = -M \mid M \cdot x + 2(Mx)\,M^*. \tag{46}$$

Es liegt eine *Ebenenspiegelung an der Mittelebene* oder eine *Punktspiegelung an dem Nebenpunkt M^** vor, je nachdem jene oder dieser *eigentlich* ist.

19. Wir wenden uns nun dem I. Hauptfall zu, und zwar zuerst dem

1. Fall. Wir setzen die allgemeine Umlegung mit der Spiegelung am Mittelpunkt m zusammen. (25) lautet mit $p + \sqrt{k}q = m_4 + \mathfrak{M} + \sqrt{k}(M_4 + \mathfrak{m})$ und $-\sqrt{k}$ statt $\sqrt{k}$

$$\varrho(-\mathfrak{x} + \sqrt{k}\dot{\mathfrak{x}}) = (m_4 + \mathfrak{M} - \sqrt{k}(M_4 + \mathfrak{m}))\,(\mathfrak{x} + \sqrt{k}\dot{\mathfrak{x}})\,(m_4 + \mathfrak{M} - \sqrt{k}(M_4 + \mathfrak{m})^{-1}.$$

Die Spiegelung an m lautet

$$\varrho(\mathfrak{x} + \sqrt{k}\dot{\mathfrak{x}}) = (m_4 + \sqrt{k}\mathfrak{m})\,(-\mathfrak{x} + \sqrt{k}\dot{\mathfrak{x}})\,(m_4 + \sqrt{k}\mathfrak{m})^{-1}. \tag{0}$$

Die Zusammensetzung ist die *Bewegung* (!)

$$\varrho(\mathfrak{x} + \sqrt{k}\dot{\mathfrak{x}}) = (u + \sqrt{k}v)\,(\mathfrak{x} + \sqrt{k}\dot{\mathfrak{x}})\,(u + \sqrt{k}v)^{-1}$$

mit der bestimmenden Quaternion

$$u + \sqrt{k}v = (m_4 + \sqrt{k}\mathfrak{m})\,(m_4 + \mathfrak{M} - \sqrt{k}(M_4 + \mathfrak{m})),$$

woraus

$$u = m_4^2 + m_4\mathfrak{M} - k(M_4\mathfrak{m} + \mathfrak{m}\mathfrak{m}), \quad v = m_4\mathfrak{m} + \mathfrak{m}\mathfrak{M} - m_4 M_4 - m_4\mathfrak{m}$$

folgt. Nun ist

$$\mathfrak{m}\mathfrak{m} = -(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2), \quad \mathfrak{m}\mathfrak{M} = -(m_1 M_1 + m_2 M_2 + m_3 M_3) + [\mathfrak{m}\mathfrak{M}],$$

also

$$\mathfrak{m}\mathfrak{M} - m_4 M_4 = -(\mathfrak{m}M) + [\mathfrak{m}\mathfrak{M}] = [\mathfrak{m}\mathfrak{M}],$$

d. h.

$$u = m \mid m + m_4 \mathfrak{M} - k M_4 \mathfrak{m}, \quad v = [\mathfrak{m}\mathfrak{M}], \quad u_1 = m_4 M_1 - k m_1 M_4 \text{ und zyklisch,}$$

$$u_4 = m \mid m, \quad v_1 = m_2 M_3 - m_3 M_2 \text{ und zyklisch, } v_4 = 0.$$

$u_1 \mid u_2 \mid u_3 \mid v_1 \mid v_2 \mid v_3 = \mathfrak{u}$ ist also die *Umlegungsachse*. Es ist $v_4 = 0$, $\langle uv \rangle = \mathfrak{u} \mid \mathfrak{u} = m \mid m \cdot M \mid M > 0$; nach Nr. **13** ist die Zusammensetzung also eine *Drehung um die Umlegungsachse* durch den $\sphericalangle\, \varphi$, wo

$$\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = -m \mid m : \sqrt{m \mid m \cdot M \mid M} = -\sqrt{\frac{m \mid m}{M \mid M}}$$

ist. Da die allgemeine Umlegung und die Punktspiegelung an m vertauschbar sind, so ist umgekehrt jene die Zusammensetzung der eben gefundenen Drehung um die Umlegungsachse mit der Punktspiegelung oder auch umgekehrt. Wir nennen sie wie in der euklidischen Geometrie *Drehspiegelung*, genauer *Dreh-Punktspiegelung*.

2. Fall. Nun bedeutet (0) die Spiegelung an der Nebenachse. Die allgemeine Umlegung ist also die Zusammensetzung einer Drehung um die Umlegungsachse mit einer Ebenenspiegelung oder umgekehrt. Wir nennen sie wieder *Drehspiegelung*, genauer *Dreh-Ebenenspiegelung*.

20. Wir kommen zum II. Hauptfall. Wir setzen die allgemeine Umlegung mit der Spiegelung an der Mittelebene M zusammen. Diese lautet

$$\varrho(\mathfrak{x} + \sqrt{k}\dot{\mathfrak{x}}) = (\mathfrak{M} + \sqrt{k} M_4)(-\mathfrak{x} + \sqrt{k}\dot{\mathfrak{x}})(\mathfrak{M} + \sqrt{k} M_4)^{-1}.$$

Die Zusammensetzung beider ist die *Bewegung* (!)

$$\varrho(\mathfrak{x} + \sqrt{k}\dot{\mathfrak{x}}) = (u + \sqrt{k} v)(\mathfrak{x} + \sqrt{k}\dot{\mathfrak{x}})(u + \sqrt{k} v)^{-1}$$

mit der bestimmenden Quaternion

$$u + \sqrt{k} v = (\mathfrak{M} + \sqrt{k} M_4)(m_4 + \mathfrak{M} - k(M_4 + \mathfrak{m})),$$

woraus

$$u = m_4 \mathfrak{M} + \mathfrak{M}\mathfrak{M} - k(M_4^2 + M_4 \mathfrak{m}), \quad v = m_4 M_4 - \mathfrak{m}\mathfrak{M}$$

folgt. Nun ist

$$\mathfrak{M}\mathfrak{M} = -(M_1^2 + M_2^2 + M_3^2), \quad \mathfrak{m}\mathfrak{M} = -(m_1 M_1 + m_2 M_2 + m_3 M_3) + [\mathfrak{m}\mathfrak{M}],$$

also

$$u = -M \mid M + m_4 \mathfrak{M} - k M_4 \mathfrak{m}, \quad v = -[\mathfrak{m}\mathfrak{M}],$$

d. h.

$$u_1 = m_4 M_1 - k m_1 M_4 \text{ und zyklisch, } u_4 = -M \mid M, \quad v_1 = -m_2 M_3 + m_3 M_2, \quad v_4 = 0.$$

$u_1 \mid u_2 \mid u_3 \mid v_1 \mid v_2 \mid v_3 = \mathfrak{u}$ ist wieder die *Umlegungsachse*. Es ist $v_4 = 0$, $\langle uv \rangle = m \mid m \cdot M \mid M < 0$; nach Nr. **13** ist die Zusammensetzung also eine *Schiebung* längs der *Nebenachse* $k v_1 \mid k v_2 \mid k v_3 \mid u_1 \mid u_2 \mid u_3$ um die Strecke σ mit

$$Ct \frac{\sigma}{2} = -M \mid M : \sqrt{\frac{m \mid m \cdot M \mid M}{k}} = -\sqrt{M \mid M : \frac{m \mid m}{k}}.$$

Da die allgemeine Umlegung und die Ebenenspiegelung vertauschbar sind, so ist umgekehrt jene die Zusammensetzung der eben gefundenen Schiebung mit der Ebenenspiegelung an der Mittelebene oder auch umgekehrt. Wir nennen sie eine *Schubspiegelung*.

Die Behandlung des III. Hauptfalles, der *Grenzumlegung*, die sich übrigens aus einer *Grenzdrehung* und einer *Ebenenspiegelung* zusammensetzen läßt, übergehen wir.

Viel einfacher als der Fall $k < 0$ ist ferner der Fall $k > 0$ der *elliptischen* (*sphärischen*) *Geometrie*, den wir samt dem Grenzübergang $\lim k \to 0$, d. h. $\eta^2 = 0$, ebenfalls dem Leser überlassen, ebenso die Behandlung der Zusammensetzung zweier Bewegungen oder Umlegungen, die von den Biquaternionen aufs einfachste besorgt werden; hervorzuheben wäre dabei der Fall der Zusammensetzung zweier Umwendungen.

Ganz absehen müssen wir von der konstruktiven Behandlung des Gegenstandes, da sie tiefere Kenntnisse aus der nichteuklidischen Geometrie voraussetzt, besonders im Falle $k < 0$, während im Falle $k > 0$ an den entsprechenden Konstruktionen der euklidischen Geometrie (s. die 1. Abh.) wenig Änderungen anzubringen sind.

§ 4. Die allgemeinste Trigonometrie des nichteuklidischen Raumes.

21. Als schönste Frucht ergibt sich aus der Theorie der Bewegungen die von Friedrich Schilling geschaffene allgemeinste (komplexe) Trigonometrie des nichteuklidischen Raumes. Die Bewegungen lauteten in Linienkoordinaten

$$\varrho(\mathfrak{x} + \sqrt{k}\dot{\mathfrak{x}}) = (p + \sqrt{k}q)\,(\mathfrak{x} + \sqrt{k}\dot{\mathfrak{x}})\,(p + \sqrt{k}q)^{-1}. \tag{24}$$

Hier führen wir nun die Werte der p_i und q_i aus (35) ein, indem wir vorübergehend zur Abkürzung

$$T\frac{\sigma}{2} = \lambda, \quad \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} = \mu \tag{0}$$

setzen. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\varrho(p + \sqrt{k}q) &= \mathfrak{p} + k\lambda\mu\dot{\mathfrak{p}} - \mu\sqrt{\mathfrak{p}\,|\,\mathfrak{p}} + \sqrt{k}(\lambda\mu\dot{\mathfrak{p}} + \dot{\mathfrak{p}} + \lambda\sqrt{\mathfrak{p}\,|\,\mathfrak{p}})\\ &= (1 + \sqrt{k}\lambda\mu)\,(\mathfrak{p} + \sqrt{k}\dot{\mathfrak{p}}) - (\mu - \sqrt{k}\lambda)\sqrt{\mathfrak{p}\,|\,\mathfrak{p}}\end{aligned}$$

oder mit Änderung des Proportionalitätsfaktors

$$\varrho(p + \sqrt{k}q) = \mathfrak{p} + \sqrt{k}\dot{\mathfrak{p}} - \frac{\mu - \sqrt{k}\lambda}{1 + \lambda\mu\sqrt{k}}\sqrt{\mathfrak{p}\,|\,\mathfrak{p}}.$$

Nun folgt aus (0) sofort:

$$\frac{\mu - \sqrt{k}\lambda}{1 + \sqrt{k}\lambda\mu} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\varphi}{2} + \sqrt{k}\,\frac{\sigma}{2}\right).$$

Also kommt

$$\varrho(p + \sqrt{k}q) = \mathfrak{p} + \sqrt{k}\dot{\mathfrak{p}} - \operatorname{ctg}\left(\frac{\varphi}{2} + \sqrt{k}\,\frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{\mathfrak{p}\,|\,\mathfrak{p}}. \tag{47}$$

Es ist nun für das Folgende sehr zweckmäßig, die Linienkoordinaten zu *normieren*, d. h. für jede Gerade $\mathfrak{x}$ die Gleichung

$$\mathfrak{x}\,|\,\mathfrak{x} = 1 \tag{48}$$

vorzuschreiben. Weiter setzen wir $\mathfrak{p} + \sqrt{k}\dot{\mathfrak{p}} = \mathfrak{P}$ und $\operatorname{ctg}\left(\frac{\varphi}{2} + \sqrt{k}\,\frac{\sigma}{2}\right) = \pi$. Dann wird (47) zu

$$\varrho(p + \sqrt{k}q) = \mathfrak{P} - \pi, \tag{49}$$

so daß (24) jetzt mit $\mathfrak{x} + \sqrt{k}\dot{\mathfrak{x}} = \mathfrak{X}$ ohne Proportionalitätsfaktor einfach

$$\bar{\mathfrak{X}} = (\mathfrak{P} - \pi)\,\mathfrak{X}\,(\mathfrak{P} - \pi)^{-1} \tag{50}$$

lautet, da $N\bar{\mathfrak{X}} = N\mathfrak{X} = 1$ ist.

22. Wir konstruieren nun ein *sechsrechtwinkliges Sechseck* aus drei beliebigen Geraden und den Geraden ihrer kürzesten Abstände und bezeichnen die Paare von Gegenseiten

(Fig. 2) mit $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}'$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$. Jede der Seiten kann man als Schraubenachse für die Nachbarseiten ansehen, z. B. $\mathfrak{P}$ als Schraubenachse von $\mathfrak{Q}'$, $\mathfrak{R}'$ für die Schubstrecke $\overline{UV} = \sigma$ und den Drehwinkel φ, der im positiven Schraubensinn $\mathfrak{Q}'$ mit $\mathfrak{P}'$ zur Deckung bringt.

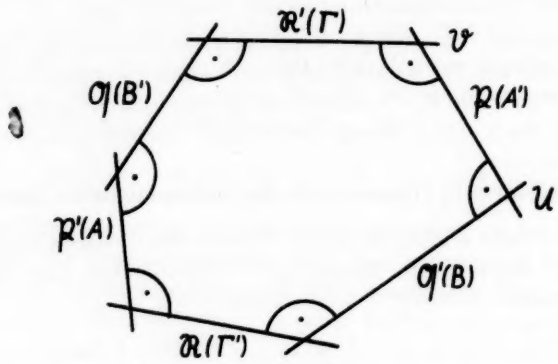


Fig. 2.

Aus σ und φ bilden wir die *komplexe Schraubgröße* $\varphi + \sqrt{k}\sigma$ und von ihr die Funktion $\operatorname{ctg}\left(\frac{\varphi}{2} + \sqrt{k}\,\frac{\sigma}{2}\right) = \pi$. Dann gehören zu den Seitenpaaren $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$; $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}'$; $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$ die ebenfalls komplexen Größen π, π'; $\varkappa, \varkappa'$; ϱ, ϱ'. Aus (50) ergeben sich nun sofort die Biquaternionenformeln

$$(51)\quad \begin{cases} \mathfrak{Q}'(\mathfrak{P} - \pi) = (\mathfrak{P} - \pi)\,\mathfrak{R}' \\ \mathfrak{R}'(\mathfrak{Q} - \varkappa) = (\mathfrak{Q} - \varkappa)\,\mathfrak{P}' \\ \mathfrak{P}'(\mathfrak{R} - \varrho) = (\mathfrak{R} - \varrho)\,\mathfrak{Q}' \end{cases} \quad \text{und} \quad (52)\quad \begin{cases} \mathfrak{Q}(\mathfrak{P}' - \pi) = (\mathfrak{P}' - \pi')\,\mathfrak{R} \\ \mathfrak{R}(\mathfrak{Q}' - \varkappa') = (\mathfrak{Q}' - \varkappa')\,\mathfrak{P}, \\ \mathfrak{P}(\mathfrak{R}' - \varrho') = (\mathfrak{R}' - \varrho')\,\mathfrak{Q}. \end{cases}$$

Nun soll aber $\mathfrak{Q}'$ nicht *irgendeine* Gerade sein, die mit $\mathfrak{R}'$ zur Deckung kommt, sondern $\mathfrak{Q}'$ und $\mathfrak{R}'$ sollen $\mathfrak{P}$ *senkrecht schneiden* und ebenso je zwei Nachbarseiten einer Seite diese. Dann müssen z. B. für $\mathfrak{P} = \mathfrak{p} + \sqrt{k}\dot{\mathfrak{p}}$ und $\mathfrak{Q}' = \mathfrak{q}' + \sqrt{k}\dot{\mathfrak{q}}'$ die beiden Gleichungen

$$(0)\qquad \mathfrak{p} \mid \mathfrak{q}' = 0 \text{ und } (\mathfrak{p}\mathfrak{q}') = 0$$

erfüllt sein. Nun ist aber

$$(\mathfrak{p}_1 + \sqrt{k}\dot{\mathfrak{p}}_1)(\mathfrak{q}_1' + \sqrt{k}\dot{\mathfrak{q}}_1) + (\mathfrak{p}_2 + \sqrt{k}\dot{\mathfrak{p}}_2)(\mathfrak{q}_2' + \sqrt{k}\dot{\mathfrak{q}}_2') + (\mathfrak{p}_3 + \sqrt{k}\dot{\mathfrak{p}}_3)(\mathfrak{q}_3' + \sqrt{k}\dot{\mathfrak{q}}_3')$$
$$= \mathfrak{p} \mid \mathfrak{q}' + \sqrt{k}(\mathfrak{p}\mathfrak{q}'),$$

also vereinigen sich die beiden Gleichungen (0) zu einer Gleichung

$$\mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}_1' + \mathfrak{P}_2\mathfrak{Q}_2' + \mathfrak{P}_3\mathfrak{Q}_3' = 0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{P} \mid \mathfrak{Q}' = 0,$$

wenn wir $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$; $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}'$; $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$ als komplexe Vektoren ansehen. Umgekehrt folgen aus $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{Q}' = 0$ sofort wieder die Gleichungen (0). Zu den Gleichungen (51) und (52) kommen also noch hinzu die Gleichungen

$$(53)\qquad \begin{cases} \mathfrak{P} \mid \mathfrak{Q}' = 0,\ \mathfrak{Q} \mid \mathfrak{R}' = 0,\ \mathfrak{R} \mid \mathfrak{P}' = 0, \\ \mathfrak{P} \mid \mathfrak{R}' = 0,\ \mathfrak{Q} \mid \mathfrak{P}' = 0,\ \mathfrak{R} \mid \mathfrak{Q}' = 0. \end{cases}$$

23. Aus (51) ergeben sich nun mit (53) die Vektorengleichungen[17])

$$(54)\quad \begin{cases} \widehat{\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}' + \mathfrak{R}'} + \pi(\mathfrak{Q}' - \mathfrak{R}') = 0, \\ \widehat{\mathfrak{Q}, \mathfrak{R}' + \mathfrak{P}'} + \varkappa(\mathfrak{R}' - \mathfrak{P}') = 0, \\ \widehat{\mathfrak{R}, \mathfrak{P}' + \mathfrak{Q}'} + \varrho(\mathfrak{P}' - \mathfrak{Q}') = 0 \end{cases} \text{ und } (55) \begin{cases} \widehat{\mathfrak{P}', \mathfrak{Q} + \mathfrak{R}} + \pi'(\mathfrak{Q} - \mathfrak{R}) = 0, \\ \widehat{\mathfrak{Q}', \mathfrak{R} + \mathfrak{P}} + \varkappa'(\mathfrak{R} - \mathfrak{P}) = 0, \\ \widehat{\mathfrak{R}', \mathfrak{P} + \mathfrak{Q}} + \varrho'(\mathfrak{P} - \mathfrak{Q}) = 0. \end{cases}$$

Die sechs Gleichungen (53) sind nun erfüllt durch

$$(56)\qquad \mathfrak{P}' = \zeta\widehat{\mathfrak{Q}\mathfrak{R}},\ \mathfrak{Q}' = \eta\widehat{\mathfrak{R}\mathfrak{P}},\ \mathfrak{R}' = \vartheta\widehat{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}}.$$

Nun gelten die leicht zu bestätigenden Vektorformeln

$$(57)\quad \widehat{\widehat{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}, \mathfrak{A}} = \mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} - \mathfrak{A} \mid \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A} \quad (59)\quad \widehat{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} \mid \widehat{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} = \mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} \mid \mathfrak{B} - (\mathfrak{A} \mid \mathfrak{B})^2$$

$$(58)\quad \widehat{\mathfrak{B}\mathfrak{A}, \mathfrak{A}\mathfrak{C}} = (\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C})\,\mathfrak{A} \qquad (60)\quad \widehat{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} \mid \widehat{\mathfrak{A}\mathfrak{C}} = \mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} \mid \mathfrak{C} - \mathfrak{A} \mid \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A} \mid \mathfrak{C}.$$

Mit (56) kommt nun aus (55) wegen der Unabhängigkeit von $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ und wegen (57) und

$$(61)\qquad \mathfrak{P} \mid \mathfrak{P} = \mathfrak{Q} \mid \mathfrak{Q} = \mathfrak{R} \mid \mathfrak{R} = 1$$

sofort

$$(62)\qquad \pi' = \zeta(1 + \mathfrak{Q} \mid \mathfrak{R}),\ \varkappa' = \eta(1 + \mathfrak{R} \mid \mathfrak{P}),\ \varrho' = \vartheta(1 + \mathfrak{P} \mid \mathfrak{Q}).$$

Da aber auch

$$(63)\qquad \mathfrak{P}' \mid \mathfrak{P}' = \mathfrak{Q}' \mid \mathfrak{Q}' = \mathfrak{R}' \mid \mathfrak{R}' = 1$$

ist, so ergibt sich aus (56) mit (59)

$$(64)\qquad \zeta^2(1 - (\mathfrak{Q} \mid \mathfrak{R})^2) = \eta^2(1 - (\mathfrak{R} \mid \mathfrak{P})^2) = \vartheta^2(1 - (\mathfrak{P} \mid \mathfrak{Q})^2) = 1.$$

Daraus folgen ζ, η, ϑ und damit aus (62)

$$(65)\qquad \pi'^2 = \frac{1 + \mathfrak{Q} \mid \mathfrak{R}}{1 - \mathfrak{Q} \mid \mathfrak{R}},\ \varkappa'^2 = \frac{1 + \mathfrak{R} \mid \mathfrak{P}}{1 - \mathfrak{R} \mid \mathfrak{P}},\ \varrho'^2 = \frac{1 + \mathfrak{P} \mid \mathfrak{Q}}{1 - \mathfrak{P} \mid \mathfrak{Q}}.$$

Die sechs Gleichungen (53) sind aber andererseits auch erfüllt durch

$$(66)\qquad \mathfrak{P} = \zeta'\widehat{\mathfrak{Q}'\mathfrak{R}'},\ \mathfrak{Q} = \eta'\widehat{\mathfrak{R}'\mathfrak{P}'},\ \mathfrak{R} = \vartheta'\widehat{\mathfrak{P}'\mathfrak{Q}'},$$

und auf dieselbe Weise wie vorhin erhält man

$$(67)\qquad \zeta'^2(1 - (\mathfrak{Q}' \mid \mathfrak{R}')^2) = \eta'^2((1 - (\mathfrak{R}' \mid \mathfrak{P}')^2) = \vartheta'^2(1 - (\mathfrak{P}' \mid \mathfrak{Q}')^2),$$

$$(68)\qquad \pi^2 = \frac{1 + \mathfrak{Q}' \mid \mathfrak{R}'}{1 - \mathfrak{Q}' \mid \mathfrak{R}'},\ \varkappa^2 = \frac{1 + \mathfrak{R}' \mid \mathfrak{P}'}{1 - \mathfrak{R}' \mid \mathfrak{P}'},\ \varrho^2 = \frac{1 + \mathfrak{P}' \mid \mathfrak{Q}'}{1 - \mathfrak{P}' \mid \mathfrak{Q}'}.$$

Nennen wir nun die den Schraubenachsen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$; $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}'$; $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$ zugehörigen komplexen Schubgrößen $\varphi + \sqrt{k}\sigma$ mit absichtlicher Vertauschung der gestrichenen und ungestrichenen Größen

$$(69)\quad \dot{\alpha}' + \sqrt{k}\alpha' = \mathsf{A}',\ \dot{\alpha} + \sqrt{\varkappa}\alpha = \mathsf{A};\ \dot{\beta}' + \sqrt{\varkappa}\beta' = \mathsf{B}',\ \dot{\beta} + \sqrt{\varkappa}\beta = \mathsf{B};$$
$$\dot{\gamma}' + \sqrt{\varkappa}\gamma' = \Gamma',\ \dot{\gamma} + \sqrt{\varkappa}\gamma = \Gamma,$$

$$(70)\quad \pi = \operatorname{ctg}\frac{\mathsf{A}'}{2},\ \varkappa = \operatorname{ctg}\frac{\mathsf{B}'}{2},\ \varrho = \operatorname{ctg}\frac{\Gamma'}{2};\ \pi' = \operatorname{ctg}\frac{\mathsf{A}}{2},\ \varkappa' = \operatorname{ctg}\frac{\mathsf{B}}{2},\ \varrho' = \operatorname{ctg}\frac{\Gamma}{2},$$

so kommen damit aus (65) und (67) die Gleichungen

$$(71)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{Q} \mid \mathfrak{R} &= \cos\mathsf{A}, & \mathfrak{R} \mid \mathfrak{P} &= \cos\mathsf{B}, & \mathfrak{P} \mid \mathfrak{Q} &= \cos\Gamma, \\ \mathfrak{Q}' \mid \mathfrak{R}' &= \cos\mathsf{A}', & \mathfrak{R}' \mid \mathfrak{P}' &= \cos\mathsf{B}', & \mathfrak{P}' \mid \mathfrak{Q}' &= \cos\Gamma'. \end{aligned}$$

---

[17]) Hier und im folgenden ist das äußere Produkt zweier Vektoren mit Bögen statt mit eckigen Klammern bezeichnet.

Jetzt ist es ein Leichtes, auf Grund der aus (56), (66), (64) und (67) folgenden Gleichungen

$$(72)\quad \begin{cases} \mathfrak{P}' = \dfrac{\widehat{\mathfrak{Q}\mathfrak{R}}}{\sqrt{1-(\mathfrak{Q}\mid\mathfrak{P})^2}}, \quad \mathfrak{Q}' = \dfrac{\widehat{\mathfrak{R}\mathfrak{P}}}{\sqrt{1-(\mathfrak{R}\mid\mathfrak{P})^2}}, \quad \mathfrak{R}' = \dfrac{\widehat{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}}}{\sqrt{1-(\mathfrak{P}\mid\mathfrak{Q})^2}} \\ \mathfrak{P} = \dfrac{\widehat{\mathfrak{Q}'\mathfrak{R}'}}{\sqrt{1-(\mathfrak{Q}'\mid\mathfrak{R}')^2}}, \quad \mathfrak{Q} = \dfrac{\widehat{\mathfrak{R}'\mathfrak{P}'}}{\sqrt{1-(\mathfrak{R}'\mid\mathfrak{P}')^2}}, \quad \mathfrak{R} = \dfrac{\widehat{\mathfrak{P}'\mathfrak{Q}'}}{\sqrt{1-(\mathfrak{P}'\mid\mathfrak{Q}')^2}} \end{cases}$$

die *Kosinussätze* und den *Sinussatz* auszuschreiben.

Aus (72) folgt mittels (60) sofort

$$\mathfrak{Q}'\mid\mathfrak{R}' = \frac{-\mathfrak{Q}\mid\mathfrak{R} + \mathfrak{R}\mid\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{P}\mid\mathfrak{Q}}{\sqrt{1-(\mathfrak{R}\mid\mathfrak{P})^2}\cdot\sqrt{1-(\mathfrak{P}\mid\mathfrak{Q})^2}}$$

oder

$$(73)\qquad \mathfrak{Q}\mid\mathfrak{R} = \mathfrak{R}\mid\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{P}\mid\mathfrak{Q} - \mathfrak{Q}'\mid\mathfrak{R}'\sqrt{1-(\mathfrak{R}\mid\mathfrak{P})^2}\sqrt{1-(\mathfrak{P}\mid\mathfrak{Q})^2},$$

d. h.

$$(74)\qquad \cos\mathsf{A} = \cos\mathsf{B}\cos\Gamma - \sin\mathsf{B}\sin\Gamma\cos\mathsf{A}'$$

und ähnlich

$$(75)\qquad \cos\mathsf{A}' = \cos\mathsf{B}'\cos\Gamma' - \sin\mathsf{B}'\sin\Gamma'\cos\mathsf{A}.$$

Aus (66) folgt mit (56) noch

$$(58)\qquad 1 = \zeta'\eta\vartheta(\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{R}) = \eta'\vartheta\zeta(\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{R}) = \vartheta'\zeta\eta(\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{R})$$

und damit wegen der Werte von $\zeta, \eta, \vartheta; \zeta', \eta', \vartheta'$

$$(76)\qquad \sin\mathsf{A} : \sin\mathsf{B} : \sin\Gamma = \sin\mathsf{A}' : \sin\mathsf{B}' : \sin\Gamma'.$$

Die komplexen Größen $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma; \mathsf{A}', \mathsf{B}'\,\Gamma'$ haben dabei die Werte (69).

24. In den Gleichungen (74), (75) und (76) steckt nun die gesamte Trigonometrie, z. B. die *sphärische* und die *ebene*. Bei der sphärischen schneiden sich alle Achsen in *einem* Punkt, $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ bilden ein Dreikant, $\mathfrak{P}', \mathfrak{Q}', \mathfrak{R}'$ das Polardreikant, oder umgekehrt.

Alle Schubstrecken $\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'$ verschwinden, die Winkel $\dot\alpha, \dot\beta, \dot\gamma; \dot\alpha', \dot\beta', \dot\gamma'$ bleiben. Setzt man $\dot\alpha = a, \dot\beta = b, \dot\gamma = c, \dot\alpha' = A, \dot\beta' = B, \dot\gamma' = C$, so sind a, b, c die Seiten, A, B, C die (Außen-!)Winkel eines sphärischen Dreiecks, und es ergeben sich die *Formeln der sphärischen Trigonometrie*, die also im beliebigen nichteuklidischen oder euklidischen Raum gelten.

Liegen alle sechs Achsen in einer Ebene, was nur in der hyperbolischen Geometrie möglich ist, da nur in ihr die Winkelsumme im Sechseck $6R$ sein kann, so sind die Drehwinkel alle gleich π. Ferner sind $\alpha, \alpha; \beta, \beta'; \gamma, \gamma'$ die Gegenseitenpaare des sechsrechtwinkligen Sechsecks. $k = -1$ liefert wegen $\cos\mathsf{A} = -\operatorname{ch}\alpha$, $\sin\mathsf{A} = -i\operatorname{sh}\alpha$ die Formeln

$$\operatorname{ch}\alpha = -\operatorname{ch}\beta\operatorname{ch}\gamma + \operatorname{sh}\beta\operatorname{sh}\gamma\operatorname{ch}\alpha', \quad \operatorname{ch}\alpha' = -\operatorname{ch}\beta'\operatorname{ch}\gamma + \operatorname{sh}\beta'\operatorname{sh}\gamma'\operatorname{ch}\alpha,$$
$$\operatorname{sh}\alpha : \operatorname{sh}\beta : \operatorname{sh}\gamma = \operatorname{sh}\alpha' : \operatorname{sh}\beta' : \operatorname{sh}\gamma',$$

Nimmt man drei der Achsen in einer Ebene an, die drei anderen senkrecht dazu, so erhält man die Formeln für das allgemeine *ebene* Dreieck mit den Seiten a, b, c und den Außenwinkeln A, B, C:

$$Ca = Cb\,Cc - k\,Sb\,Sc\cos A, \quad \cos A = \cos B\cos C - \sin B\sin C\,Ca,$$
$$Sa : Sb : Sc = \sin A : \sin B : \sin C.$$

Die Formeln für das hyperbolische vierrechtwinklige Fünfeck und das zweirechtwinklige Viereck sind leicht anzuschreiben.

Eingegangen 6. Juni 1951.

Über transzendente $\mathfrak{p}$-adische Zahlen. I.[1]

Ein Satz über algebraische Abhängigkeit $\mathfrak{p}$-adischer Funktionen als Prinzip für Transzendenzbeweise $\mathfrak{p}$-adischer Zahlen.

Von *Alfred Günther* in Göttingen.

§ 1. Ergebnisse.

Zu jeder natürlichen Primzahl p wird die *p-adische Bewertung* des Körpers $\mathfrak{R}$ der rationalen Zahlen definiert durch

$$|a|_p = \begin{cases} 0 & \text{für } a = 0 \\ p^{\mu} & \text{für } a \neq 0 \end{cases} \qquad (a \in \mathfrak{R}),$$

wobei μ diejenige ganzrationale Zahl ist, für die der gekürzte Bruch $p^{\mu} a$ zu p teilerfremden Zähler und Nenner hat.

Die perfekte Hülle des Körpers $\mathfrak{R}$ bezüglich der p-adischen Bewertung[2]) ist der Körper $\mathfrak{R}_p$ der *p-adischen Zahlen* von Hensel. Die p-adischen Zahlen mit

$$|a|_p \leqq 1 \qquad (a \in \mathfrak{R}_p)$$

bilden den Integritätsbereich der *ganzen* p-adischen Zahlen.

Betrachtet man nun einen algebraischen Zahlkörper $\mathfrak{K}$ vom Grade $g \geqq 1$ über $\mathfrak{R}$ und ist

$$p = \prod_{i=1}^{r} \mathfrak{p}_i^{e_i}$$

die Primidealzerlegung der natürlichen Primzahl p in $\mathfrak{K}$, so wird die $\mathfrak{p}_i$*-adische Bewertung* des Körpers $\mathfrak{K}$ definiert durch

$$|\alpha|_{\mathfrak{p}_i} = \begin{cases} 0 & \text{für } \alpha = 0, \\ p^{\mu_i} & \text{für } \alpha \neq 0, \end{cases} \qquad (\alpha \in \mathfrak{K}),$$

wobei μ_i diejenige ganzrationale Zahl ist, für die das Ideal $\mathfrak{p}_i^{\mu_i}\alpha$ zu $\mathfrak{p}_i$ teilerfremden Zähler und Nenner hat[3]).

Ist nun $\mathfrak{p}$ eines der Primideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_r$, so erhält man als perfekte Hülle von $\mathfrak{K}$ bezüglich der $\mathfrak{p}$-adischen Bewertung des Körpers $\mathfrak{K}$ einen Körper $\mathfrak{K}_{\mathfrak{p}}$. Elemente aus $\mathfrak{K}_{\mathfrak{p}}$ werden als $\mathfrak{p}$*-adische Zahlen* bezeichnet. Diejenigen Elemente α aus $\mathfrak{K}_{\mathfrak{p}}$, die der Ungleichung

$$|\alpha|_{\mathfrak{p}} \leqq 1$$

genügen, bilden einen Integritätsbereich $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}}$, dessen Quotientenkörper $\mathfrak{K}_{\mathfrak{p}}$ ist. Die Elemente aus $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}}$ heißen *ganze* $\mathfrak{p}$-adische Zahlen.

---

[1]) Die beiden Teile dieser Arbeit sind eine unwesentlich geänderte Fassung meiner Dissertation, die der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Göttingen vorgelegt wurde. Herrn Prof. Dr. Th. Schneider möchte ich für die Anregung zu dieser Arbeit meinen herzlichsten Dank aussprechen.

[2]) Näheres über bewertete Körper und deren Analysis findet man etwa in *H. Hasse*, Zahlentheorie (Berlin 1949).

[3]) Definition des gebrochenen Ideals nach *E. Hecke*, Theorie der algebraischen Zahlen (Leipzig 1923), S. 113-115.

K. Mahler bewies im Jahre 1932 den folgenden Satz[4]) über Transzendenzeigenschaften der p-adischen Exponentialfunktion:

Ist α eine p-adische Zahl mit

$$0 < |\alpha|_p < \tfrac{1}{2} \text{ für } p = 2,$$
$$0 < |\alpha|_p < 1 \text{ für } p \geqq 3,$$

so sind die Zahlen α und e^α nicht beide algebraisch.

In einer weiteren Arbeit[5]) zeigte K. Mahler:

Sind α und β zwei algebraische p-adische Zahlen mit

$$0 < |\alpha - 1|_p \leqq p^{-1}, \quad 0 < |\beta - 1|_p \leqq p^{-1},$$

so ist der Quotient ihrer Logarithmen entweder eine rationale oder eine transzendente p-adische Zahl.

Mit einer anderen Methode bewies G. R. Veldkamp den Satz[6]):

Ist $\omega \neq 0, 1$ eine algebraische p-adische Zahl, die der Ungleichung

$$|\omega - 1|_p \leqq p^{-1}$$

genügt, und ist ϑ eine algebraische irrationale ganze p-adische Zahl, so ist ω^ϑ transzendent.

Man kann die Beweise dieser Sätze so abändern, daß man ganz analoge Transzendenzsätze für $\mathfrak{p}$-adische Zahlen erhält. In dem ersten Teil der vorliegenden Arbeit soll jedoch ein $\mathfrak{p}$-adisches Analogon eines Satzes von Th. Schneider[7]) bewiesen werden, aus dem diese Sätze durch Spezialisierung gefolgert werden können.

Zunächst seien zwei Definitionen vorausgeschickt.

Definition 1. *Eine $\mathfrak{p}$-adische Potenzreihe*

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \frac{x^\nu}{\nu!}$$

mit ganzen $\mathfrak{p}$-adischen Koeffizienten a_ν, also

$$|a_\nu|_\mathfrak{p} \leqq 1 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

werde H-ganzzahlig genannt. Die durch eine H-ganzzahlige Potenzreihe dargestellte $\mathfrak{p}$-adische Funktion heiße eine H-Funktion.

Definition 2. *Ist K ein fest gewählter algebraischer Zahlkörper vom Grade $s \geqq 1$ und $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$ eine ebenfalls fest gewählte Ganzheitsbasis aus K, so ordne man jeder ganzalgebraischen Zahl*

$$\alpha = \sum_{\sigma=1}^{s} a_\sigma \omega_\sigma \qquad (a_\sigma \text{ ganzrational})$$

aus K als Norm die ganzrationale Zahl

$$\|\alpha\| = \operatorname*{Max}_{1 \leqq \sigma \leqq s} \{|a_\sigma|\}$$

zu.

Nun lautet der angekündigte Satz:

Satz 1. *Gegeben seien n H-Funktionen $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$. Sei $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m, \ldots$ eine unendliche Folge ganzer $\mathfrak{p}$-adischer Zahlen mit*

$$(1) \qquad |\xi_m|_\mathfrak{p} \leqq p^{-3} \qquad (m = 1, 2, \ldots),$$

---

[4]) *K. Mahler*, Ein Beweis der Transzendenz der P-adischen Exponentialfunktion. J. reine angew. Math. **169** (1932), S. 61–66.

[5]) *K. Mahler*, Über transzendente P-adische Zahlen. Compositio math. **2** (1935), S. 259–275.

[6]) *G. R. Veldkamp*, Ein Transzendenz-Satz für P-adische Zahlen. J. London Math. Soc. **15** (1940), S. 183–192.

[7]) *Th. Schneider*, Ein Satz über ganzwertige Funktionen als Prinzip für Transzendenzbeweise. Math. Ann. **121** (1949), S. 131–140.

und sei

$$\lim_{m\to\infty} |\xi_m|_{\mathfrak{p}} = 0. \tag{2}$$

Die voneinander verschiedenen unter den Zahlen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ seien mit $x_0^{(m)} = x_0$, $x_1^{(m)} = x_1, \ldots, x_k^{(m)} = x_k$ bezeichnet, und die Vielfachheit von $x_\varkappa$ in $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ sei $l_\varkappa^{(m)} + 1 = l_\varkappa + 1$. Ferner werde

$$\operatorname*{Max}_{0\leq\varkappa\leq k} l_\varkappa = l$$

gesetzt, und es sei

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\log l}{\log m} < 1. \tag{3}$$

Für jedes m seien die Ausdrücke

$$f_\nu^{(\lambda)}(x_\varkappa) \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 0, 1, \ldots, l_\varkappa \\ \varkappa = 0, 1, \ldots, k \\ \nu = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix} \tag{4}$$

algebraische Zahlen aus einem Körper K vom Grade s, und $H_\nu(x_\varkappa)$ ($\varkappa = 0, 1, \ldots, k$; $\nu = 1, 2, \ldots, n$) seien positive ganzrationale Zahlen derart, daß die Produkte

$$H_\nu(x_\varkappa)\, f_\nu^{(\lambda)}(x_\varkappa) \tag{5}$$

ganzalgebraische Zahlen in K sind. Ist dann, falls

$$\operatorname*{Max}_{\substack{0\leq\lambda\leq l_\varkappa \\ 0\leq\varkappa\leq k}} \{\| f_\nu^{(\lambda)}(x_\varkappa) \|, H_\nu(x_\varkappa)\} = M_\nu(l_\varkappa, k) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

gesetzt wird,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\log\log M_\nu(l_\varkappa, k)}{\log m} \leqq \eta_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{6}$$

und

$$\eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_n < n - 1, \tag{7}$$

so sind die Funktionen $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ voneinander algebraisch abhängig.

Aus diesem Satz ergeben sich durch Spezialisierung die folgenden Transzendenzsätze:

Satz 2. *Ist α eine $\mathfrak{p}$-adische Zahl mit*

$$0 < |\alpha|_{\mathfrak{p}} < p^{-\frac{1}{p-1}},$$

so ist mindestens eine der beiden Zahlen α und e^α transzendent.

Satz 3. *Ist α eine von 0 und 1 verschiedene $\mathfrak{p}$-adische Zahl, die der Ungleichung*

$$|\alpha - 1|_{\mathfrak{p}} < p^{-\frac{1}{p-1}}$$

genügt, und β eine irrationale ganze $\mathfrak{p}$-adische Zahl, so ist mindestens eine der drei Zahlen α, β und α^β transzendent.

In diesen beiden Sätzen sind insbesondere die Transzendenzergebnisse von Mahler und Veldkamp enthalten. Ferner ergibt sich

Satz 4. *Ist α eine $\mathfrak{p}$-adische Zahl mit*

$$0 < |\alpha|_{\mathfrak{p}} < p^{-\frac{1}{p-1}}.$$

so ist mindestens eine der beiden Zahlen α und $\sin\alpha$, sowie mindestens eine der beiden Zahlen α und $\cos\alpha$ transzendent.

Der § 2 enthält die Hilfsssätze, die nötig sind, um in § 3 den Satz 1 zu beweisen. Die Beweise der Sätze 2 bis 4 findet man in § 4.

§ 2. Hilfssätze.

Aus der Definition 2 folgt unmittelbar:

Sind α und β ganzalgebraische Zahlen aus K, so ist

$$\| \alpha + \beta \| \leqq \| \alpha \| + \| \beta \|$$

und

$$\| \alpha\beta \| \leqq \gamma \| \alpha \| \; \| \beta \|$$

mit einer nur von der Basis des Körpers K abhängigen positiven ganzrationalen Zahl γ.

Hilfssatz 1. *Die $\mathfrak{p}$-adische Zahl $\alpha \neq 0$ sei eine ganzalgebraische Zahl aus einem algebraischen Zahlkörper K vom Grade s. Dann gibt es eine nur vom Körper K abhängige positive ganzrationale Zahl γ derart, daß*

$$| \alpha |_{\mathfrak{p}} \geqq \{\gamma \| \alpha \|^s\}^{-1}$$

ist.

Beweis. Da die Zahl α ganzalgebraisch ist, so ist ihre Norm $N(\alpha)$ eine ganzrationale Zahl, und es gilt

$$(8) \qquad | \alpha |_{\mathfrak{p}} \geqq | \alpha |_{\mathfrak{p}} \, | \alpha^{(2)} \cdots \alpha^{(s)} |_{\mathfrak{p}} = | N(\alpha) |_{\mathfrak{p}} \geqq | N(\alpha) |^{-1}.$$

Andererseits erhält man für den Absolutbetrag der Norm von α die Abschätzung

$$(9) \qquad | N(\alpha) | \leqq \gamma \| \alpha \|^s$$

mit einer nur von K, nicht also von der speziellen Wahl von α, abhängigen positiven ganzrationalen Zahl γ. Aus (8) und (9) folgt dann die Behauptung.

Hilfssatz 2. *Es sei*

$$\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{\mu\nu} x_\nu = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

ein System von m homogenen linearen Gleichungen in n Unbekannten. Die Koeffizienten $\alpha_{\mu\nu}$ seien ganzalgebraische Zahlen aus einem festen Körper K vom Grade s, und es sei

$$\| \alpha_{\mu\nu} \| \leqq a \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, \ldots, m \\ \nu = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}.$$

Ist ferner $n \geqq 2m$, so besitzt das Gleichungssystem eine nichttriviale Lösung in ganzalgebraischen Zahlen x_ν aus K, für die die Ungleichungen

$$\| x_\nu \| < \gamma n a \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

gelten.

Der Beweis dieses Satzes verläuft ganz analog dem Beweis eines Hilfssatzes von Th. Schneider[8]).

Hilfssatz 3. *Eine H-ganzzahlige $\mathfrak{p}$-adische Potenzreihe*

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \frac{x^\nu}{\nu!} \qquad (| a_\nu |_{\mathfrak{p}} \leqq 1 \;\; \text{für} \;\; \nu = 0, 1, \ldots)$$

konvergiert für jede $\mathfrak{p}$-adische Zahl x, die der Ungleichung

$$| x |_{\mathfrak{p}} < p^{-\frac{1}{p-1}}$$

genügt. Für diese $\mathfrak{p}$-adischen Zahlen x ist also die H-Funktion $f(x)$ definiert. Sie besitzt folgende Eigenschaften:

(a) *Ist x_0 eine $\mathfrak{p}$-adische Zahl mit*

$$| x_0 |_{\mathfrak{p}} < p^{-\left(\frac{1}{p-1}+1\right)},$$

[8]) *Th. Schneider*, Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen I. Transzendenz von Potenzen. J. reine angew. Math. **172** (1934), S. 66—69. Hilfssatz 1.

so ist die H-Funktion $f(x)$ in die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu \frac{(x - x_0)^\nu}{\nu!}$$

entwickelbar, in der wieder alle Koeffizienten b_ν ganze $\mathfrak{p}$-adische Zahlen sind.

(b) *Summe, Differenz und Produkt zweier H-Funktionen sind wieder H-Funktionen.*

(c) *Die Ableitung einer H-Funktion ist wieder eine H-Funktion.*

(d) *Die H-Funktion $f(x)$ und deren Ableitungen nehmen für $|x|_\mathfrak{p} < p^{-\frac{1}{p-1}}$ nur ganze $\mathfrak{p}$-adische Zahlen als Werte an, also*

$$|f^{(\lambda)}(x)|_\mathfrak{p} \leqq 1 \quad \textit{für } |x|_\mathfrak{p} < p^{-\frac{1}{p-1}} \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots).$$

Beweis. Ist

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \frac{x^\nu}{\nu!} \quad \text{mit } |a_\nu|_\mathfrak{p} \leqq 1 \qquad (\nu = 0, 1, \ldots),$$

so ist der Konvergenzradius dieser Reihe

$$r = \varliminf_{\nu \to \infty} \sqrt[\nu]{\left|\frac{\nu!}{a_\nu}\right|_\mathfrak{p}} \geqq \varliminf_{\nu \to \infty} \sqrt[\nu]{|\nu!|_\mathfrak{p}}.$$

Nun ist aber

$$|\nu!|_\mathfrak{p} = \left|p^{\sum_{\mu=1}^{\infty}\left[\frac{\nu}{p^\mu}\right]}\right|_\mathfrak{p} \geqq \left|p^{\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{\nu}{p^\mu}}\right|_\mathfrak{p} = p^{-\frac{\nu}{p-1}}.$$

Also konvergiert die Reihe für jedes x mit

$$|x|_\mathfrak{p} < p^{-\frac{1}{p-1}}.$$

Sind

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \frac{x^\nu}{\nu!} \quad \text{und} \quad g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu \frac{x^\nu}{\nu!}$$

zwei H-Funktionen, so sind auch

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu \pm b_\nu) \frac{x^\nu}{\nu!}$$

und

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu+\mu=n} \binom{n}{\nu} a_\nu b_\mu \right) \frac{x^n}{n!}$$

und ferner auch

$$f^{(\lambda)}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu+\lambda} \frac{x^\nu}{\nu!}$$

H-Funktionen.

Aus

$$f^{(\lambda)}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu+\lambda} \frac{x^\nu}{\nu!} \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots)$$

folgt

$$|f^{(\lambda)}(x)|_\mathfrak{p} \leqq \operatorname*{Max}_{\nu=0}^{\infty} \left\{ |a_{\nu+\lambda}|_\mathfrak{p} \left|\frac{x^\nu}{\nu!}\right|_\mathfrak{p} \right\}.$$

Für $|x|_\mathfrak{p} < p^{-\frac{1}{p-1}}$ ist aber

$$\left|\frac{x^\nu}{\nu!}\right|_\mathfrak{p} \leqq |x|_\mathfrak{p}^\nu \, p^{-\frac{\nu}{p-1}} < 1,$$

also

$$|f^{(\lambda)}(x)|_\mathfrak{p} \leqq 1 \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots).$$

Damit sind die Eigenschaften (b) bis (d) bewiesen. Der Beweis der Eigenschaft (a) ergibt sich aus der Bemerkung, daß die Koeffizienten $b_\nu = f^{(\nu)}(x_0)$ nach Eigenschaft (d) ganze $\mathfrak{p}$-adische Zahlen sind.

Hilfssatz 4. *Es bedeute Q ein Polynom seiner Argumente mit ganzen $\mathfrak{p}$-adischen Zahlen als Koeffizienten. Dann besitzt die Differentialgleichung*

$$y^{(r)} = Q(y, y', \ldots, y^{(r-1)})$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y(0) = a_0,\ y'(0) = a_1, \ldots, y^{(r-1)}(0) = a_{r-1},$$

in denen $a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}$ ganze $\mathfrak{p}$-adische Zahlen sind, eine und nur eine Lösung $y = f(x)$, die in einer Umgebung von $x = 0$ in eine konvergente $\mathfrak{p}$-adische Potenzreihe entwickelbar ist. Diese Lösung ist eine H-Funktion.

Beweis. Die Potenzreihe

$$f(x) = y(0) + y'(0)\frac{x}{1!} + y''(0)\frac{x^2}{2!} + \cdots$$

genügt formal der Differentialgleichung. Die Koeffizienten $y(0), y'(0), \ldots, y^{(r-1)}(0)$ sind durch die Anfangsbedingungen als ganze $\mathfrak{p}$-adische Zahlen gegeben. Die übrigen Koeffizienten lassen sich auf folgende Weise eindeutig bestimmen: Aus der Differentialgleichung erhält man durch fortgesetztes Differenzieren die höheren Ableitungen von y als Polynome mit ganzen $\mathfrak{p}$-adischen Koeffizienten in $y, y', \ldots, y^{(r-1)}$. Folglich sind die Zahlen $y^{(\varrho)}(0)$ für $\varrho \geqq r$ Polynome mit ganzen $\mathfrak{p}$-adischen Koeffizienten in den ganzen $\mathfrak{p}$-adischen Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}$, also ebenfalls ganze $\mathfrak{p}$-adische Zahlen. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

§ 3. Beweis des Satzes 1.

Es sei m^* ein fester, im Laufe des Beweises geeignet groß zu wählender Wert von m. Von m, l, m^* und l^* unabhängige natürliche Zahlen sollen ohne Unterscheidung mit γ, positive Zahlen, die für $m \to \infty$ oder $m^* \to \infty$ nach Null streben, mit ε bezeichnet werden.

Es werde ein Polynom

$$\Phi(x) = \sum_{\tau_1=0}^{t_1} \cdots \sum_{\tau_n=0}^{t_n} C_{(\tau)} f_1^{\tau_1}(x) \cdots f_n^{\tau_n}(x)$$

mit unbestimmten Koeffizienten $C_{(\tau)} = C_{\tau_1, \ldots, \tau_n}$ angesetzt. Die Koeffizienten $C_{(\tau)}$ sollen ganzalgebraische Zahlen aus K sein und so bestimmt werden, daß $\Phi(x)$ an den Stellen $x_\varkappa^{(m^*)} = x_\varkappa$ $(\varkappa = 0, 1, \ldots, k^{(m^*)} = k^*)$ von den Ordnungen $l_\varkappa^{(m^*)} + 1 = l_\varkappa^* + 1$ verschwindet:

$$\Phi^{(\lambda)}(x_\varkappa) = 0 \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 0, 1, \ldots, l_\varkappa^* \\ \varkappa = 0, 1, \ldots, k^* \end{pmatrix}.$$

Diese Forderung bedingt das Bestehen eines Systems von m^* homogenen linearen Gleichungen

$$0 = \Phi^{(\lambda)}(x_\varkappa) = \sum_{(\tau)} C_{(\tau)} \left.\frac{d^\lambda(f_1^{\tau_1}(x) \cdots f_n^{\tau_n}(x))}{dx^\lambda}\right|_{x=x_\varkappa} \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 0, 1, \ldots, l_\varkappa^* \\ \varkappa = 0, 1, \ldots, k^* \end{pmatrix}$$

oder

$$\sum_{(\tau)} \alpha_{(\tau)\mu} C_{(\tau)} = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m^*)$$

für die $(t_1+1)(t_2+1)\cdots(t_n+1)$ Unbestimmten $C_{(\tau)}$. Die Koeffizienten $\alpha_{(\tau)\mu}$ sind algebraische Zahlen aus K. Durch Multiplikation einer jeden Gleichung mit $\prod_{\nu=1}^{n} H_\nu^{t_\nu}(x_\varkappa)$ geht dieses Gleichungssystem in das System

$$(10)\qquad \sum_{(\tau)} A_{(\tau)\mu} C_{(\tau)} = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m^*)$$

mit ganzalgebraischen Koeffizienten $A_{(\tau)\mu}$ über.

Setzt man nun

$$t_\nu = \left[(2m^{*1+\eta_2+\cdots+\eta_\mu-n\eta_\nu})^{\frac{1}{n}}\right] \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

so ist

$$(t_1+1)(t_2+1)\cdots(t_n+1) \geqq 2m^*,$$

und nach Hilfssatz 2 besitzt das Gleichungssystem (10) eine nichttriviale Lösung in ganzalgebraischen Zahlen $C_{(\tau)}$. Nun ist $\dfrac{d^\lambda(f_1^{\tau_1}(x)\cdots f_n^{\tau_n}(x))}{dx^\lambda}$ eine Summe von Potenzprodukten in $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ und deren Ableitungen bis höchstens zur Ordnung λ. Die Dimension in $f_\nu(x)$ und deren Ableitungen ist genau τ_ν, und es treten genau $\left(\sum_{\nu=1}^{n} \tau_\nu\right)^\lambda$ solche Potenzprodukte — jedes seiner Vielfachheit entsprechend gezählt — auf. Aus (6) folgt

$$H_\nu(x_\varkappa) < e^{m^{*\eta_\nu+\varepsilon}} \quad \text{und} \quad \| f_\nu^{(\lambda)}(x_\varkappa) \| < e^{m^{*\eta_\nu+\varepsilon}} \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 0, 1, \ldots, l_\varkappa^* \\ \varkappa = 0, 1, \ldots, k^* \\ \nu = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$(11)\qquad \| A_{(\tau)\mu} \| < \left(\sum_{\nu=1}^{n} t_\nu\right)^{l^*} \gamma^{\sum_{\nu=1}^{n} t_\nu} \prod_{\nu=1}^{n} e^{2t_\nu m^{*\eta_\nu+\varepsilon}} < \gamma^{l^*} m^{*l^*} \gamma^{m^{*\frac{1}{n}(1+\eta_1+\cdots+\eta_n)+\varepsilon}}.$$

Nach (7) ist

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{\log l}{\log m} < 1$$

und nach (3)

$$\frac{1}{n}(1+\eta_1+\cdots+\eta_n) < 1.$$

Man setze

$$\delta = \operatorname{Min}\left\{\frac{1}{3}\left(1 - \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{\log l}{\log m}\right),\ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}(1+\eta_1+\cdots+\eta_n)\right)\right\}.$$

Dann ist

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{\log l}{\log m} \leqq 1 - 3\delta,$$

also

$$l^* \leqq m^{*(1-3\delta)+\varepsilon} < m^{*(1-2\delta)}$$

und

$$m^{*l^*} < \gamma^{m^{*(1-\delta)}}.$$

Ferner ist

$$\frac{1}{n}(1+\eta_1+\cdots+\eta_n) \leqq 1 - 2\delta$$

und

$$\frac{1}{n}(1+\eta_1+\cdots+\eta_n) + \varepsilon < 1 - \delta.$$

Damit ergibt sich aus (11)

$$\| A_{(\tau)\mu} \| < \gamma^{m^*(1-\delta)}.$$

Nach Hilfssatz 2 ist also

$$\| C_{(\tau)} \| < \gamma^{m^*(1-\delta)}. \tag{12}$$

Damit ist $\Phi(x)$ bestimmt.

$\Phi(x)$ besitzt m^* Nullstellen. Nun werde durch vollständige Induktion gezeigt, daß $\Phi(x)$ an allen Stellen der Folge $\xi_1, \xi_2, \ldots$ verschwindet, wenn nur m^* genügend groß gewählt wird: Besitzt $\Phi(x)$ mindestens m Nullstellen

$$\Phi^{(\lambda)}(x_\varkappa) = 0 \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 0, 1, \ldots, l_\varkappa \\ \varkappa = 0, 1, \ldots, k \end{pmatrix}$$

mit $m \geqq m^*$, so verschwindet $\Phi(x)$ auch an der Stelle x_ϱ von der Ordnung $\Lambda + 1$ mit

$$\Lambda = \begin{cases} 0 & \text{für } \varrho = k+1, \\ l_\varkappa + 1 & \text{für } 0 \leqq \varrho \leqq k. \end{cases}$$

Es werde angenommen, es sei

$$\Phi^{(\Lambda)}(x_\varrho) \neq 0.$$

Dann ist

$$\prod_{\nu=1}^{n} H_\nu^{l_\nu}(x_\varrho)\, \Phi^{(\Lambda)}(x_\varrho)$$

eine von Null verschiedene ganzalgebraische Zahl aus K, und man erhält unter Berücksichtigung von (12)

$$\left| \prod_{\nu=1}^{n} H_\nu^{l_\nu}(x_\varrho)\, \Phi^{(\Lambda)}(x_\varrho) \right| < (t_1+1)(t_2+1)\cdots(t_n+1)\, \gamma^{m^*(1-\delta)} \gamma^{m(1-\delta)} < \gamma^{m(1-\delta)}.$$

Nach Hilfssatz 1 gilt also die Abschätzung

$$|\Phi^{(\Lambda)}(x_\varrho)|_\mathfrak{p} \geqq \left| \prod_{\nu=1}^{n} H_\nu^{l_\nu}(x_\varrho)\, \Phi^{(\Lambda)}(x_\varrho) \right|_\mathfrak{p} > \gamma^{-m(1-\delta)}. \tag{13}$$

Andererseits ist $\Phi(x)$ eine H-Funktion, die nach Induktionsvoraussetzung an den Stellen $x_\varkappa$ $(\varkappa = 0, 1, \ldots, k)$ mit $|x_\varkappa|_\mathfrak{p} \leqq p^{-3}$ von den Ordnungen $l_\varkappa + 1$ $(\varkappa = 0, 1, \ldots, k)$ verschwindet. $\Phi(x)$ besitze die Potenzreihe

$$\Phi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \frac{x^\nu}{\nu!} \quad \text{mit } |c_\nu|_\mathfrak{p} \leqq 1.$$

Dann hat die Potenzreihe

$$\Phi(x) = \Phi(pz) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \frac{p^\nu}{\nu!} z^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu = F(z)$$

wegen

$$\left| \frac{p^\nu}{\nu!} \right|_\mathfrak{p} \leqq 1$$

lauter ganze $\mathfrak{p}$-adische Koeffizienten. $F(z)$ verschwindet an den Stellen $z_\varkappa = p^{-1} x_\varkappa$ $(\varkappa = 0, 1, \ldots, k)$ mit $|z_\varkappa|_\mathfrak{p} \leqq p^{-2}$ von den Ordnungen $l_\varkappa + 1$. Ist $z_\varkappa$ $(0 \leqq \varkappa \leqq k)$ eine dieser Nullstellen, so besitzt $F(z)$ in der Umgebung von $z = z_\varkappa$ die Taylorentwicklung

$$F(z) = \sum_{\nu=l_\varkappa+1}^{\infty} \frac{F^{(\nu)}(z_\varkappa)}{\nu!} (z - z_\varkappa)^\nu.$$

Die Koeffizienten dieser Entwicklung sind wegen

$$\frac{F^{(\nu)}(z_\varkappa)}{\nu!} = \sum_{\mu=\nu}^{\infty} \binom{\mu}{\nu} a_\mu z_\varkappa^{\mu-\nu}$$

wieder ganze $\mathfrak{p}$-adische Zahlen. Also besitzt die Funktion $\dfrac{F(z)}{(z-z_\varkappa)^{l_\varkappa+1}}$ ebenfalls eine Potenzreihe mit ganzen $\mathfrak{p}$-adischen Koeffizienten. Indem man diesen Schluß auch auf die übrigen Nullstellen von $F(z)$ anwendet, sieht man, daß die Funktion

$$\frac{F(z)}{\prod\limits_{\varkappa=0}^{k} (z-z_\varkappa)^{l_\varkappa+1}}$$

eine Potenzreihe mit ganzen $\mathfrak{p}$-adischen Koeffizienten besitzt. Also ist

$$\frac{d^\lambda}{dz^\lambda}\left(\frac{F(z)}{\prod\limits_{\varkappa=0}^{k} (z-z_\varkappa)^{l_\varkappa+1}}\right)_{\mathfrak{p}} \leqq 1 \quad \text{für} \quad |z|_{\mathfrak{p}} \leqq p^{-1} \text{ und } \lambda = 0, 1, \ldots .$$

Da $F(z)$ bei $z = z_\varrho$ bis zur Ordnung Λ verschwindet, ist

$$\frac{d^\Lambda}{dz^\Lambda}\left(\frac{F(z)}{\prod\limits_{\substack{\varkappa=0\\ \varkappa\neq\varrho}}^{k} (z-z_\varkappa)^{l_\varkappa+1}}\right)_{z=z_\varrho} = \frac{F^\Lambda(z_\varrho)}{\prod\limits_{\substack{\varkappa=0\\ \varkappa\neq\varrho}}^{k} (z_\varrho-z_\varkappa)^{l_\varkappa+1}},$$

also

$$|F^{(\Lambda)}(z_\varrho)|_{\mathfrak{p}} \leqq \Big|\prod_{\substack{\varkappa=0\\ \varkappa\neq\varrho}}^{k} (z_\varrho-z_\varkappa)^{l_\varkappa+1}\Big|_{\mathfrak{p}} \leqq p^{-(2m-2(l_\varrho+1))}.$$

Nun ist aber

$$\frac{d^\lambda}{dz^\lambda} F(z) = p^\lambda \frac{d^\lambda}{dx^\lambda} \Phi(x)$$

und daher

$$|\Phi^{(\Lambda)}(x_\varrho)|_{\mathfrak{p}} \leqq p^{-(2m-2(l_\varrho+1)-\Lambda)}.$$

Dabei ist $\Lambda \leqq l+1 < m^{1-2\delta}$ und $l_\varrho + 1 \leqq l+1 < m^{1-2\delta}$. Also gilt

$$|\Phi^{(\Lambda)}(x_\varrho)|_{\mathfrak{p}} \leqq p^{-(2m-3(l+1))} < p^{-m}. \tag{14}$$

Ist nun m^* hinreichend groß gewählt, so stehen die Ungleichungen (13) und (14) miteinander im Widerspruch. Also muß doch $\Phi^{(\Lambda)}(x_\varrho) = 0$ sein.

Die Funktion $\Phi(x)$ verschwindet also tatsächlich an allen Stellen der Folge $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m, \ldots$. Wegen (2) ist daher nach dem Identitätssatz für $\mathfrak{p}$-adische Potenzreihen $\Phi(x)$ identisch Null. Also sind die Funktionen $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_x(x)$ voneinander algebraisch abhängig, was zu beweisen war.

§ 4. Anwendung des Satzes 1.

Nennt man eine Lösung einer Differentialgleichung, die in einer Umgebung von $x = 0$ eine konvergente $\mathfrak{p}$-adische Potenzreihe besitzt, analytisch, so werde die $\mathfrak{p}$-adische Exponentialfunktion e^x definiert als analytische Lösung der Differentialgleichung

$$y' = y$$

mit der Anfangsbedingung

$$y(0) = 1.$$

Nach Hilfssatz 4 ist diese Lösung eindeutig bestimmt und besitzt die Reihenentwicklung

$$e^x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!},$$

die für alle $\mathfrak{p}$-adischen Zahlen x mit

$$|x|_{\mathfrak{p}} < p^{-\frac{1}{p-1}}$$

konvergiert. Ferner erhält man das Additionstheorem

$$e^{u+v} = e^u \cdot e^v.$$

Wählt man nun in Satz 1 die unendliche Zahlenfolge

$$\xi_1 = p^2\alpha,\ \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 2p^2\alpha, \ldots, \xi_{\mu^2+1} = \xi_{\mu^2+2} = \cdots = \xi_{(\mu+1)^2} = (\mu+1)\,p^2\alpha$$

mit $\alpha \neq 0$ aus dem Konvergenzgebiet der Exponentialreihe, also

$$0 < |\alpha|_{\mathfrak{p}} < p^{-\frac{1}{p-1}},$$

so ist

$$|\xi_m|_{\mathfrak{p}} \leqq p^{-3} \qquad (m = 1, 2, \ldots),$$

$$\lim_{m\to\infty} |\xi_m|_{\mathfrak{p}} = 0$$

und

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{\log l}{\log m} = \frac{1}{2}.$$

Es werde weiter $n = 2$ und $f_1(x) = x$, $f_2(x) = e^x$ gesetzt.

Nun werde angenommen, α und e^α seien beide algebraisch aus einem algebraischen Zahlkörper K vom Grade s. Dann sind für jedes m auch alle Ausdrücke

$$f_\nu^{(\lambda)}(x_\varkappa) \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 0, 1, \ldots, l_\varkappa \\ \varkappa = 0, 1, \ldots, k \\ \nu = 1, 2 \end{pmatrix}$$

algebraische Zahlen aus K, und es gibt eine positive ganzrationale Zahl γ_1 so, daß die Produkte

$$\gamma_1 f_1^{(\lambda)}(x_\varkappa) \text{ und } \gamma_1^\varkappa f_2^{(\lambda)}(x_\varkappa) \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 0, 1, \ldots, l_\varkappa \\ \varkappa = 0, 1, \ldots, k \end{pmatrix}$$

ganzalgebraische Zahlen aus K sind. Ferner gibt es eine positive ganzrationale Zahl γ_2 so, daß

$$\| \gamma_1 f_1(x_0) \| < \gamma_2 \text{ und } \| \gamma_1^\varkappa f_2(x_0) \| < \gamma_2,$$

also, unter Berücksichtigung des Additionstheorems der Exponentialfunktion,

$$\| \gamma_1 f_1^{(\lambda)}(x_\varkappa) \| < \varkappa\gamma_2 \text{ und } \| \gamma_1^\varkappa f_2^{(\lambda)}(x_\varkappa) \| < \gamma_2^\varkappa \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 0, 1, \ldots, l_\varkappa \\ \varkappa = 0, 1, \ldots, k \end{pmatrix}$$

ist. Dann ist

$$\eta_1 = 0,\ \eta_2 = \tfrac{1}{2}$$

und

$$\eta_1 + \eta_2 = \tfrac{1}{2} < 1.$$

Aus Satz 1 folgt also, daß e^x eine algebraische Funktion sei. Dieser Widerspruch löst sich nur, wenn man die Annahme, α und e^α seien beide algebraisch, fallen läßt. Damit ergibt sich der Satz 2.

Definiert man die Funktion $\log(1+x)$ als analytische Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{1}{x}$$

mit der Anfangsbedingung

$$y(0) = 0,$$

so ergibt sich

$$\log(1+x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{x^\nu}{\nu} \quad \text{für } |x|_\mathfrak{p} < 1.$$

Aus der Potenzreihe

$$\log \alpha = \log(1 + (\alpha - 1)) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{(\alpha-1)^\nu}{\nu}$$

erhält man

$$|\log \alpha|_\mathfrak{p} < p^{-\frac{1}{p-1}}$$

für

$$|\alpha - 1|_\mathfrak{p} < p^{-\frac{1}{p-1}}.$$

Ist nun β eine ganze $\mathfrak{p}$-adische Zahl, also

$$|\beta|_\mathfrak{p} \leqq 1,$$

und ist

$$|\alpha - 1|_\mathfrak{p} < p^{-\frac{1}{p-1}},$$

so ist die Zahl

$$\alpha^\beta = e^{\beta \log \alpha} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\beta \log \alpha)^\nu}{\nu!}$$

definiert, da die rechts stehende Potenzreihe konvergiert. Ferner ist

$$\alpha^x = e^{x \log \alpha} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(x \log \alpha)^\nu}{\nu!}$$

unter der Voraussetzung

$$|\alpha - 1|_\mathfrak{p} < p^{-\frac{1}{p-1}}$$

eine H-Funktion.

Nun setze man zum Beweise des Satzes 3 noch voraus, daß $\alpha \neq 0, 1$ und daß β irrational ist, und wähle in Satz 1

$$n = 2,\ f_1(x) = x,\ f_2(x) = \alpha^x$$

und

$$\xi_m = p^3(u + v\beta)$$

mit positiven ganzrationalen Zahlen u und v, die so gewählt seien, daß jedes Paar u, v in der Folge ξ_m genau einmal auftritt. Dabei seien die ξ_m in der Reihenfolge wachsender Werte von $u + v$, sonst beliebig geordnet. Wegen der Irrationalität von β sind dann alle ξ_m voneinander verschieden. Ferner ist

$$|\xi_m|_\mathfrak{p} \leqq p^{-3} \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

und

$$\lim_{m \to \infty} |\xi_m|_\mathfrak{p} = 0.$$

Unter der Annahme, α, β und α^β seien alle drei algebraische Zahlen aus einem algebraischen Zahlkörper K, folgt, daß dann auch

$$f_\nu(\xi_m) \qquad (m = 1, 2, \ldots;\ \nu = 1, 2)$$

Zahlen aus K sind. Es ergibt sich

$$\eta_1 = 0,\ \eta_2 = \tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad \eta_1 + \eta_2 = \tfrac{1}{2} < 1.$$

Nach Satz 1 folgt dann, daß die Funktionen $f_1(x) = x$ und $f_2(x) = \alpha^x$ voneinander algebraisch abhängig seien. Dieser Widerspruch löst sich nur, wenn man die Annahme, α, β und α^β seien algebraisch, fallen läßt. Damit erhält man den Satz 3.

Die $\mathfrak{p}$-adische Funktion $\sin x$ werde als analytische Lösung der Differentialgleichung

$$y'' = -y$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y(0) = 0,\quad y'(0) = 1$$

definiert. Nach Hilfssatz 4 ist die Funktion $\sin x$ dadurch eindeutig bestimmt und besitzt die Potenzreihe

$$\sin x = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!},$$

die für alle $\mathfrak{p}$-adischen Zahlen x mit

$$|x|_\mathfrak{p} < p^{-\frac{1}{p-1}}$$

konvergiert. Ferner definiere man

$$\cos x = \frac{d}{dx} \sin x.$$

Die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ besitzen die Additionstheoreme

$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$$

und

$$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v,$$

und es gilt

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Nun kann man den Satz 4 aus Satz 1 folgern, indem man etwa für $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m, \ldots$ die gleichen Stellen wählt wie zum Beweise des Satzes 2. Enthält jedoch der Körper $\mathfrak{K}_\mathfrak{p}$ die Zahl $i = \sqrt{-1}$, so folgt Satz 4 auch unmittelbar aus Satz 2 und der Bemerkung, daß dann

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

ist.

Eingegangen 10. März 1952.

Direkte Faktoren endlicher Gruppen.

Von *Reinhold Baer* in Urbana, Illinois.

Die Aufgabe, mit deren Lösung sich die folgenden Zeilen befassen, besteht darin, die direkten Faktoren unter den Normalteilern zu charakterisieren. Die von uns gefundenen Bedingungen bestehen in merkwürdigen Beziehungen zwischen iterierten Φ-Untergruppen und Kommutatorgruppen. Folglich werden wir unsere Betrachtungen mit einem Studium dieser iterierten Φ-Untergruppen beginnen. Das Hauptgewicht unserer Untersuchung wird dann auf die Gewinnung von Kriterien dafür gelegt, daß ein abelscher Normalteiler direkter Faktor ist. Dies ist nur natürlich, wenn wir die folgende einfache Bemerkung machen: Ist C der Zentralisator des Normalteilers N der Gruppe G, so ist N dann und nur dann direkter Faktor von G, wenn $G = NC$ und das Zentrum von N direkter Faktor von C ist.

Im folgenden werden wir stets annehmen, daß *alle betrachteten Gruppen endlich* sind.

1.

Wir beginnen mit einer allgemeinen Diskussion der charakteristischen Untergruppen, die wir im folgenden benötigen werden. Zunächst sind da das *Zentrum* $Z(G)$ und die *Kommutatorgruppe* G' der Gruppe G zu erwähnen. Folgende einfache und wohlbekannte Beziehung wird häufig gebraucht werden:

Hilfssatz 1. *Ist N ein $N \cap G' = 1$ erfüllender Normalteiler der Gruppe G, so ist $N \subset Z(G)$.*

Denn jeder Kommutator $x^{-1}g^{-1}xg$ eines Elementes x in N und eines Elementes g in G gehört zu $N \cap G' = 1$.

Weiter benötigen wir die, eine ganz fundamentale Rolle spielende, von Frattini eingeführte Untergruppe $\Phi(G)$; diese ist gleich dem Durchschnitt aller maximalen Untergruppen von G. Es ist wohlbekannt, daß $\Phi(G)$ stets nilpotent ist; siehe etwa Zassenhaus [3; p. 115].

Lemma 1. *Aus $N \subseteq Z(G)$ folgen $\Phi(N) \subseteq \Phi(G)$ und $\Phi(G/N) = N\Phi(G)/N$.*

Beweis. Ist U eine maximale Untergruppe von G, die N nicht enthält, so ist $U \subset UN$ und also $G = UN$. Da N ein Teil des Zentrums von G ist, so ist jedes Element aus N mit jedem Element aus U vertauschbar. Daraus folgt, daß U ein Normalteiler von G ist. Da aber U eine maximale Untergruppe von G ist, so folgt weiter, daß G/U zyklisch von Primzahlordnung und also insbesondere $G' \subseteq U$ ist. Wir haben also folgendes gezeigt:

(+) *Maximale Untergruppen, die N nicht enthalten, enthalten G'.*

Sei nun H der Durchschnitt aller N enthaltenden maximalen Untergruppen von G und K der Durchschnitt aller G' enthaltenden maximalen Untergruppen von G. Da N

und G' Normalteiler von G sind, so sind auch H und K Normalteiler von G. Weiter folgt aus $(+)$, daß

$$\Phi(G) = H \cap K$$

ist; und wir erschließen aus der Definition von K, daß

$$\Phi(G/G') = K/G'$$

ist.

Ist nun U eine maximale Untergruppe von G, die N nicht enthält, so ist $G = UN$ und U wegen $(+)$ ein Normalteiler von Primzahlindex in G. Folglich wird $G/U = UN/U \cong N/(U \cap N)$, so daß also $U \cap N$ ebenfalls eine maximale Untergruppe von N ist. Mithin haben wir $\Phi(N) \leq U \cap N$. Folglich enthält jede maximale Untergruppe von G entweder N selbst oder wenigstens $\Phi(N)$; damit haben wir $\Phi(N) \leq \Phi(G)$, die erste Behauptung von Lemma 1, nachgewiesen.

Da H der Durchschnitt aller N enthaltenden maximalen Untergruppen von G ist, so folgt aus der Definition von Φ sofort, daß

$$\Phi(G/N) = H/N \tag{1}$$

ist. Aus $N \leq H$ und dem Dedekindschen Modulsatz folgern wir weiter:

$$N\Phi(G) = N(H \cap K) = H \cap NK. \tag{2}$$

Da K der Durchschnitt aller G' enthaltenden maximalen Untergruppen von G ist, und da G' enthaltende maximale Untergruppen stets Normalteiler von Primzahlindex sind, so ist G/K eine abelsche Gruppe, deren sämtliche Elemente quadratfreie Ordnung haben. Daraus folgt insbesondere, daß jede Untergruppe von G/K direkter Faktor von G/K und direktes Produkt zyklischer Gruppen von Primzahlordnung ist. Es folgt insbesondere, daß die Untergruppe NK/K von G/K Durchschnitt der sie enthaltenden maximalen Untergruppen von G/K ist. Jede dieser maximalen Untergruppen enthält H, da diese N enthalten und H Durchschnitt aller maximalen, N enthaltenden Untergruppen ist. Wir haben also gezeigt, daß

$$H \leq NK \tag{3}$$

ist. Kombination von (1), (2) und (3) ergibt schließlich:

$$\Phi(G/N) = H/N = (H \cap NK)/N = N\Phi(G)/N,$$

womit Lemma 1 vollständig bewiesen ist.

Bemerkung. Es läßt sich zeigen, daß Lemma 1 auch noch gilt, wenn N ein im Hyperzentrum enthaltener Normalteiler von G ist, da dann $(+)$ gilt. Machen wir jedoch über den Normalteiler keine weiteren Annahmen, so werden die Beziehungen zwischen $\Phi(G)$, $\Phi(N)$ und $\Phi(G/N)$ recht kompliziert, wie einfache Beispiele zeigen.

Wir definieren nun *die iterierten Φ-Untergruppen* induktiv durch die folgenden Regeln:

$$\Phi_0(G) = G, \quad \Phi_{i+1}(G) = \Phi[\Phi_i(G)].$$

Es ist klar, daß $\Phi(G) = \Phi_1(G)$ ist, und daß die $\Phi_i(G)$ eine absteigende Folge charakteristischer Untergruppen von G bilden. Da aus $G \neq 1$ stets $\Phi(G) < G$ folgt, so muß die Reihe der Φ_i nach endlich vielen Schritten mit 1 enden.

Folgerung. *Aus $N \leq Z(G)$ folgt $\Phi_i(N) \leq \Phi_i(G)$ für alle i.*

Beweis. Unsere Behauptung stimmt natürlich für $i = 0$. Gilt $\Phi_i(N) \leq \Phi_i(G)$ für irgendein i, so folgt aus $\Phi_i(N) \leq N \leq Z(G)$, daß $\Phi_i(N) \leq Z[\Phi_i(G)]$ ist und wir also Lemma 1 anwenden können. Folglich wird

$$\Phi_{i+1}(N) = \Phi[\Phi_i(N)] \leq \Phi[\Phi_i(G)] = \Phi_{i+1}(G);$$

und nun folgt unsere Behauptung durch vollständige Induktion.

Lemma 2. *Wenn ein Normalteiler N von G in $\Phi(G)$ enthalten ist, so gilt*

$$\Phi_i(G/N) = N\Phi_i(G)/N$$

für jedes i.

Beweis. 1. Wir behandeln zunächst den folgenden Spezialfall, auf den wir den allgemeinen Fall zurückführen werden.

Spezialfall: N ist ein minimaler Normalteiler von G.

Da $\Phi(G)$ nilpotent ist, so ist $Z[\Phi(G)] \cap N \neq 1$. Da aber $Z[\Phi(G)]$ als charakteristische Untergruppe einer charakteristischen Untergruppe selbst eine charakteristische Untergruppe ist, so ist $Z[\Phi(G)] \cap N$ ein Normalteiler von G. Da N ein minimaler Normalteiler ist, so folgt schließlich $N = Z[\Phi(G)] \cap N$ oder

$$N \leq Z[\Phi(G)].$$

Wir wollen nun die Gleichung $\Phi_i(G/N) = N\Phi_i(G)/N$ durch vollständige Induktion bezüglich i beweisen. Unsere Gleichung ist trivial für $i = 0$. Weiter ist $\Phi(G/N) = H/N$, wo H der Durchschnitt aller N enthaltenden maximalen Untergruppen von G ist. Da aber $N < \Phi(G)$ ist, so ist N Teil einer jeden maximalen Untergruppe von G. Folglich ist $\Phi(G/N) = \Phi(G)/N$, und wir haben unsere Behauptung auch für $i = 1$ bewiesen. Wir machen jetzt für $1 < i$ die Induktionsannahme, daß

$$\Phi_j(G/N) = N\Phi_j(G)/N \quad \text{für } j < i$$

gilt. Wir unterscheiden drei Fälle.

Fall 1: $N < \Phi_i(G)$. Wegen der Induktionsannahme gilt

$$\Phi_{i-1}(G/N) = N\Phi_{i-1}(G)/N = \Phi_{i-1}(G)/N,$$

da ja $N < \Phi_i(G) \leq \Phi_{i-1}(G)$ ist. Wir setzen $\Phi_i(G/N) = H/N$; und es folgt sofort, daß H der Durchschnitt aller N enthaltenden maximalen Untergruppen von $\Phi_{i-1}(G)$ ist. Aus $N < \Phi_i(G) = \Phi[\Phi_{i-1}(G)]$ folgt aber, daß N in jeder maximalen Untergruppe von $\Phi_{i-1}(G)$ enthalten ist. Also ist $H = \Phi[\Phi_{i-1}(G)] = \Phi_i(G)$, und wir haben die Gültigkeit von $\Phi_i(G/N) = \Phi_i(G)/N$ erwiesen.

Fall 2: $N \not< \Phi_i(G)$, aber $N < \Phi_{i-1}(G)$. Wegen der Induktionsannahme gilt wieder

$$\Phi_{i-1}(G/N) = N\Phi_{i-1}(G)/N = \Phi_{i-1}(G)/N.$$

Aus der Minimalität des Normalteilers N von G folgt weiter wegen $N \cap \Phi_i(G) < N$, daß

$$N \cap \Phi_i(G) = 1$$

ist. Aus $1 < i$ folgt $1 \leq i - 1$. Also ist $\Phi_{i-1}(G)$ in der nilpotenten Gruppe $\Phi(G)$ enthalten. Da $\Phi_{i-1}(G)$ mithin selbst nilpotent ist, so ist jede maximale Untergruppe von $\Phi_{i-1}(G)$ ein Normalteiler von Primzahlindex; siehe etwa Zassenhaus [3; p. 107, Satz 12]. Folglich ist $\Phi_{i-1}(G)/\Phi_i(G)$ eine abelsche Gruppe, deren sämtliche Elemente quadratfreie Ordnung haben. Daraus folgt aber leicht, daß $N\Phi_i(G)$ Durchschnitt aller $N\Phi_i(G)$ enthaltenden maximalen Untergruppen von $\Phi_{i-1}(G)$ ist. Bedenken wir noch, daß jede maximale Untergruppe von $\Phi_{i-1}(G)$ automatisch $\Phi_i(G)$ enthält, so sehen wir, daß $N\Phi_i(G)$ Durchschnitt aller N enthaltenden maximalen Untergruppen von $\Phi_{i-1}(G)$ ist. Diese letzte Aussage ist aber offenbar mit der Gleichung

$$\Phi_i(G/N) = \Phi[\Phi_{i-1}(G/N)] = \Phi[\Phi_{i-1}(G)/N] = N\Phi_i(G)/N$$

äquivalent.

Fall 3: $N \not< \Phi_{i-1}(G)$. Zunächst folgt, wie geläufig, aus der Minimalität von N, daß

$$N \cap \Phi_{i-1}(G) = 1$$

ist; und aus der Induktionsannahme folgern wir wieder:

$$\Phi_{i-1}(G/N) = N\Phi_{i-1}(G)/N \cong \Phi_{i-1}(G)/[\Phi_{i-1}(G) \cap N] = \Phi_{i-1}(G).$$

Da also $\Phi_{i-1}(G/N)$ und $\Phi_{i-1}(G)$ im wesentlichen identisch sind, so sind natürlich auch $\Phi_i(G/N)$ und $\Phi_i(G)$ im wesentlichen identisch; und diese letzte Identität ist mit der behaupteten Gleichung

$$\Phi_i(G/N) = N\Phi_i(G)/N$$

äquivalent.

Damit ist der Induktionsbeweis vollständig erbracht, und wir haben unsere Behauptung im Spezialfall erwiesen.

2. *Zurückführung des allgemeinen Falles auf den Spezialfall.* Sei M ein in N enthaltener Normalteiler von G, für den unser Satz gilt. Dann ist also

$$\Phi_i(G/M) = M\Phi_i(G)/M \quad \text{für jedes } i.$$

Ist insbesondere $M = N$, so sind wir fertig. Andernfalls gibt es einen Normalteiler U von G derart, daß $M < U \leq N$ und $U^* = U/M$ ein minimaler Normalteiler von $G^* = G/M$ ist. Aus $\Phi(G^*) = \Phi(G)/M$ und $N \leq \Phi(G)$ folgt $U^* \leq \Phi(G^*)$. Anwendung des Spezialfalles und der obigen Induktionsannahme ergibt nun, daß

$$\begin{aligned}\Phi_i(G^*/U^*) &= U^*\Phi_i(G^*)/U^* \\ &= [U/M]\,[M\Phi_i(G)/M]/[U/M] \\ &= [U\Phi_i(G)/M]/[U/M]\end{aligned}$$

für jedes i gilt. Da aber G/U und $G^*/U^* = [G/M]/[U/M]$ im wesentlichen identisch sind, so folgt schließlich, daß

$$\Phi_i(G/U) = U\Phi_i(G)/U \quad \text{für jedes } i$$

gilt. Jetzt ist es klar, wie der Beweis zu beenden ist.

Bemerkung. Ohne die Voraussetzung $N \leq \Phi(G)$ gilt unser Satz nicht. Denn es ist leicht, Gruppen G zu konstruieren, die $\Phi(G) = 1$ erfüllen, obgleich sie $\Phi(H) \neq 1$ erfüllende homomorphe Bilder H besitzen.

2.

Die Gruppe G ist *das direkte Produkt* ihrer Untergruppen A und B, in Zeichen: $G = A \otimes B$, wenn A und B Normalteiler von G sind und $G = AB$, $1 = A \cap B$ ist. Die erste dieser Bedingungen kann auch durch die Bedingung ersetzt werden, daß jedes Element in A mit jedem Element in B vertauschbar ist, eine Bedingung, die z. B. erfüllt ist, wenn $A \leq Z(G)$ ist. Es folgt noch, daß abelsche direkte Faktoren notwendig im Zentrum liegen.

Lemma 3. $\Phi_i(A \otimes B) = \Phi_i(A) \otimes \Phi_i(B)$.

Beweis. Es genügt offenbar, die Gleichung

$$\Phi(A \otimes B) = \Phi(A) \otimes \Phi(B)$$

zu beweisen. Um dies zu tun, bemerken wir zunächst, daß $\Phi(A)$ als charakteristische Untergruppe des Normalteilers A von $G = A \otimes B$ selbst ein Normalteiler von G ist. Ebenso sind $\Phi(B)$ und $\Phi(A)\Phi(B)$ Normalteiler von G; und es ist klar, daß das Produkt von $\Phi(A)$ und $\Phi(B)$ direkt ist.

Ist U eine maximale Untergruppe von A, so ist UB offenbar eine maximale Untergruppe von G. Also ist $\Phi(G) \leq \Phi(A)B$; und $\Phi(G) < A\Phi(B)$ sieht man ebenso ein. Da aber $G = A \otimes B$ ist, so folgt leicht, daß

$$\Phi(A \otimes B) < \Phi(A) \otimes \Phi(B)$$

gilt.

Sei weiter V eine maximale Untergruppe von G. Dann unterscheiden wir zwei Fälle.

Fall 1: V enthält A oder B. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß $A < V$ ist. Dann folgt aus Dedekinds Modulsatz, daß $V = A \otimes (B \cap V)$ ist; und es ist leicht einzusehen, daß $B \cap V$ eine maximale Untergruppe von B ist. Folglich wird

$$\Phi(A) \otimes \Phi(B) \leq A \otimes (V \cap B) = V.$$

Fall 2: V enthält weder A noch B. Wir erinnern zunächst daran, daß jedes Element g in G sich auf eine und nur eine Weise in der Form $g = ab$ mit a in A und b in B darstellen läßt. $a = A(g)$ ist die A-Komponente des Elementes g und $b = B(g)$ seine B-Komponente. Die Abbildung von g auf $A(g)$ stellt bekanntlich den zu der Zerlegung $G = A \otimes B$ gehörigen idempotenten Zerlegungsendomorphismus von G auf A dar. Dann gilt:

(1) $$A = A(V) \text{ und } B = B(V).$$

Es ist nämlich zunächst klar, daß $V < A(V)\, B$ ist. Da aber B nicht in V enthalten ist, so ist $V < A(V)\, B$; und nun folgt aus der Maximalität der Untergruppe V von G, daß $G = A(V)\, B$ ist. Da aber G das direkte Produkt von A und B ist, und da $A(V) < A$ ist, so wird $A = A(V)$; und $B = B(V)$ sieht man ebenso ein.

(2) $$A \cap V \text{ und } B \cap V \text{ sind Normalteiler von } G.$$

Um dies einzusehen, genügt es natürlich zu zeigen, daß $A \cap V$ ein Normalteiler von A ist, da ja jedes Element in $A \cap V$ mit jedem Element in B vertauschbar ist. Sei also a ein Element in A und v ein Element in $A \cap V$. Da a und v beide zu A gehören, so gehört auch $a^{-1}va$ zu A. Es folgt aus (1), daß a in $A(V)$ liegt. Also existiert ein Element b in B derart, daß ab zu V gehört. Dann wird aber

$$a^{-1}va = (ab)^{-1}v(ab),$$

da ja Elemente in B mit Elementen in A vertauschbar sind. Da v und ab beide zu V gehören, so liegt also auch $a^{-1}va$ in V. Daraus folgt, daß $a^{-1}va$ zu $A \cap V$ gehört. Also ist $a^{-1}(A \cap V)\, a < A \cap V$, und mithin ist $A \cap V$ ein Normalteiler von A und daher von G.

(3) $A \cap V$ ist ein maximaler Normalteiler von A und $B \cap V$ ist ein maximaler Normalteiler von B.

Aus $A \leq V$ folgt $A \cap V < A$. Sei weiter N ein Normalteiler von A und $A \cap V < N$. Als Normalteiler eines direkten Faktors ist N natürlich auch ein Normalteiler von G. Es ist weiter klar, daß N nicht in V enthalten ist; und wir können also $G = NV$ aus der Maximalität von V folgern. Ist a ein Element in A, so existieren daher Elemente u und v in N resp. V, so daß $a = uv$ ist. Da $N < A$ ist, so gehört auch u zu A. Folglich ist $v = u^{-1}a$ ein Element in $A \cap V < N$. Also liegen u und v in N, so daß $a = uv$ auch zu N gehört. Folglich ist $N = A$; und damit haben wir gezeigt, daß $A \cap V$ ein maximaler Normalteiler von A ist.

Wir bilden jetzt den Durchschnitt J aller maximalen Untergruppen von A, die $A \cap V$ enthalten. Natürlich ist $A \cap V \leq J$. Da $A \cap V$ wegen (3) ein echter Normalteiler von A ist, so ist auch J ein Normalteiler von A. Aus $A \cap V < A$ folgt aber auch $J < A$; und nun können wir $A \cap V = J$ aus (3) erschließen. Also ist $A \cap V$ Durchschnitt maximaler Untergruppen von A; und hieraus folgt sofort, daß $\Phi(A) < A \cap V < V$ ist. Ebenso sieht man ein, daß $\Phi(B)$ in V enthalten ist. Folglich ist

$$\Phi(A) \otimes \Phi(B) < V.$$

Damit haben wir aber gezeigt, daß $\Phi(A) \otimes \Phi(B)$ in jeder maximalen Untergruppe von G enthalten ist. Also ist

$$\Phi(A) \otimes \Phi(B) < \Phi(A \otimes B).$$

Damit ist der Beweis der Gleichung

$$\Phi(A) \otimes \Phi(B) = \Phi(A \otimes B)$$

völlig erbracht, aus der durch eine triviale Induktion sofort unser Lemma 3 folgt[1]).

3.

Ist S eine Teilmenge der Gruppe G, so bezeichnen wir mit $Z(S < G)$ den *Zentralisator* von S in G, d. h. die Gesamtheit der mit allen Elementen aus S vertauschbaren Elemente in G. Wir bemerken, daß Zentralisatoren stets Untergruppen sind, und daß jeder Zentralisator eines Normalteilers selbst ein Normalteiler ist.

Satz 1. *Die folgenden Eigenschaften eines Normalteilers N von G sind untereinander äquivalent:*

(a) $\Phi(N) \cap Z(N) = 1$ *und* N *ist direkter Faktor von* G.

(b) $\Phi(G) \cap Z(N) = 1$ *und* $G = NZ(N < G)$.

(c) *Elemente von Primzahlordnung in* $Z(N)$ *erzeugen direkte Faktoren von* G *und* $G = NZ(N < G)$.

Beweis. Ist zunächst $\Phi(N) \cap Z(N) = 1$ und $G = N \otimes H$, so folgt aus Lemma 3, daß

$$\Phi(G) \cap Z(N) = [\Phi(N) \otimes \Phi(H)] \cap Z(N) = \Phi(N) \cap Z(N) = 1$$

ist. Da weiter $H \leq Z(N < G)$ ist, so gilt auch $G = NZ(N < G)$. Mithin ist (b) eine Folge von (a).

Weiter sei (b) erfüllt und T eine zyklische Gruppe von Primzahlordnung, die in $Z(N)$ enthalten ist. Aus $T \leq Z(N) \leq N$ folgt $G = NZ(N < G) < Z(T < G)$. Also ist $Z(T < G) = G$ und

$$T < Z(G).$$

Weiter wird

$$T \cap \Phi(G) = T \cap Z(N) \cap \Phi(G) = 1,$$

da ja $T < Z(N)$ ist. Folglich existiert eine maximale Untergruppe U von G, die T nicht enthält. Aus $T < Z(G)$ ergibt sich sofort, daß $G = UT$ und U ein Normalteiler von G ist; und da T keine echten Untergruppen besitzt, so ist auch $T \cap U = 1$. Also wird $G = T \otimes U$; und wir haben gezeigt, daß (c) aus (b) folgt.

Wir nehmen schließlich die Gültigkeit von (c) an und zeigen zunächst, daß $Z(N)$ ein direkter Faktor von G ist. Um dies einzusehen, bemerken wir, daß $Z(N)$ als charakteristische Untergruppe eines Normalteilers von G selbst Normalteiler von G ist. Weiter existiert sicher ein größter in $Z(N)$ enthaltener direkter Faktor D von G. Dann ist $G = D \otimes E$ für geeignetes E; und aus $D \leq Z(N)$ und dem Dedekindschen Modulsatz folgt $Z(N) = D \otimes [Z(N) \cap E]$. Wäre D von $Z(N)$ verschieden, so wäre $Z(N) \cap E \neq 1$. Also würde $Z(N) \cap E$ eine zyklische Untergruppe T von Primzahlordnung enthalten, die wegen (c) direkter Faktor von G wäre. Es existiert dann ein Normalteiler K derart, daß $G = T \otimes K$ ist. Aus $T < E$ und dem Dedekindschen Modulsatz erschließen wir weiter $E = T \otimes [E \cap K]$. Also wird

$$G = D \otimes E = D \otimes T \otimes [E \cap K].$$

---

[1]) *Zusatz bei der Korrektur:* Einen einfacheren Beweis hat soeben W. Gaschütz veröffentlicht [2; S. 163, Satz 6].

Dann ist aber DT ein direkter Faktor von G, der in $Z(N)$ enthalten und größer als D ist, was der Wahl von D widersprechen würde. Also ist $D = Z(N)$ selbst direkter Faktor von G. Daraus folgt die Existenz eines Normalteilers A von G derart, daß $G = Z(N) \otimes A$ ist. Aus $Z(N) \leqq Z(N < G)$ und dem Dedekindschen Modulsatz folgt $Z(N < G) = Z(N) \otimes [A \cap Z(N < G)]$. Wir setzen $B = Z(N < G) \cap A$; es ist klar, daß B ein Normalteiler von G ist. Weiter ist

$$NB = NZ(N)\, B = NZ(N < G) = G$$

wegen (c); und wir haben

$$N \cap B = N \cap Z(N < G) \cap A = Z(N) \cap A = 1,$$

da $G = Z(N) \otimes A$ ist. Also ist $G = N \otimes B$; und wir haben gezeigt, daß N ein direkter Faktor von G ist.

Wäre schließlich $\Phi(N) \cap Z(N) \neq 1$, so würde $\Phi(N) \cap Z(N)$ eine zyklische Gruppe T von Primzahlordnung enthalten. Es folgt aus (c), daß T ein direkter Faktor von G ist. Also ist $G = T \otimes L$, und es folgt aus $T \leqq N$, daß $N = T \otimes (N \cap L)$ ist. Wegen $T < \Phi(N)$ ergibt sich nun aus Lemma 3 folgendermaßen ein Widerspruch:

$$T = T \cap \Phi(N) = T \cap [\Phi(T) \otimes \Phi(N \cap L)] = \Phi(T) < T.$$

Also ist $\Phi(N) \cap Z(N) = 1$, und mithin folgt (a) aus (c).

Zusatz. *Ist der Normalteiler N von G im Hyperzentrum von G enthalten und ist $N \cap \Phi(G) = 1$, so ist N ein abelscher direkter Faktor von G, dessen Elemente sämtlich quadratfreie Ordnung haben.*

Beweis. Wir werden die Eigenschaft, daß N im Hyperzentrum enthalten ist, nicht voll ausnutzen, da wir nur von der folgenden schwächeren Eigenschaft Gebrauch machen werden:

(+) Ist M ein Normalteiler von G und $1 < M < N$, so ist $M \cap Z(G) \neq 1$.

Sei $U = N \cap Z(G)$. Dann ist U ein Normalteiler von G, $\Phi(G) \cap U = 1$ und $UZ(U < G) = G$. Also können wir Satz 1 anwenden, und es existiert ein Normalteiler V von G derart, daß $G = U \otimes V$ ist. Aus $U \leqq N$ und dem Dedekindschen Modulsatz folgt wieder $N = U \otimes (N \cap V)$. Da aber $U = N \cap Z(G)$ ist, so ist $N \cap V \cap Z(G) = 1$; und es folgt aus (+), daß $N \cap V = 1$ ist. Folglich wird

$$N = U = N \cap Z(G) \quad \text{oder also} \quad N < Z(G).$$

Damit haben wir gezeigt, daß N ein abelscher direkter Faktor von G ist. Aus Lemma 3 folgt dann $\Phi(N) = N \cap \Phi(G) = 1$; und daraus folgt, daß die Ordnungen der Elemente in N quadratfrei sind.

Bemerkung. Ist N ein Normalteiler von G, so ist $N \cap \Phi(G)$ ein in $\Phi(G)$ enthaltener Normalteiler von G. Wir setzen $G^* = G/[N \cap \Phi(G)]$ und $N^* = N/[N \cap \Phi(G)]$. Dann ist N^* ein Normalteiler von G^*, und es folgt aus Lemma 2, daß

$$N^* \cap \Phi(G^*) = N^* \cap \Phi(G)/[N \cap \Phi(G)] = 1$$

ist, so daß also Satz 1 und der Zusatz anwendbar werden, wenn geeignete Zusatzbedingungen erfüllt sind. Daß man auf diese Weise aber nicht Beweise konstruieren kann, die zeigen, daß N ein direkter Faktor von G ist, zeigt folgendes einfache Beispiel. Es sei G direktes Produkt einer zyklischen Gruppe $N = \{a\}$ der Ordnung p^2 und einer zyklischen Gruppe $\{b\}$ der Ordnung p. Dann ist $\Phi(G) = N^p$; und Anwendung der vorstehenden Betrachtungen zeigt, daß $G/[N \cap \Phi(G)] = G/N^p$ direktes Produkt von N/N^p und einer

Gruppe der Form $\{a^i b\}/N^p$ ist, wo i und p teilerfremd sind. Aber dieser zweite Faktor enthält keinen direkten Faktor von G, der N komplementiert.

Umgekehrt ist es erwähnenswert, daß es nicht möglich zu sein scheint, Satz 1 und seinen Zusatz durch Spezialisierung aus Satz 5 zu gewinnen [2]).

4.

Wir wenden uns jetzt der Charakterisierung abelscher direkter Faktoren zu. Die Basis unserer Betrachtungen bildet folgende Aussage:

Hilfssatz 2. *Eine Untergruppe U einer abelschen Gruppe A ist dann und nur dann ein direkter Faktor von A, wenn $\Phi_i(U) = U \cap \Phi_i(A)$ für jedes i gilt.*

Beweis. Ist G eine abelsche Gruppe, n eine quadratfreie Zahl, die durch alle Primteiler der Ordnung von G teilbar ist, so zeigt man ohne Mühe, daß $\Phi(G) = G^n$ ist. Daraus folgt dann natürlich auch

$$\Phi_i(G) = G^{n^i} \text{ für jedes } i.$$

Ist nun die quadratfreie Zahl n das Produkt aller Primteiler der Ordnung von A, so folgt insbesondere $\Phi_i(A) = A^{n^i}$ und $\Phi_i(U) = U^{n^i}$. Die Bedingung unseres Hilfssatzes ist also dann und nur dann erfüllt, wenn

$$U^{n^i} = U \cap A^{n^i} \text{ für jedes } i$$

gilt. Es ist aber bekannt, daß diese letzte Bedingung dann und nur dann gilt, wenn U direkter Faktor von A ist; siehe Baer [1; p. 466, Corollary 2]. Damit ist unser Hilfssatz vollständig bewiesen.

Satz 2. *Dann und nur dann ist N ein abelscher direkter Faktor von G, wenn*

(a) *N ein Normalteiler von G ist,*

(b) *$N \cap G' = 1$ ist, und*

(c) *$\Phi_i(G'N/G') = [G'N/G'] \cap \Phi_i(G/G')$ für jedes i gilt.*

Die einfache Herleitung von Satz 2 aus Hilfssatz 2 übergehen wir.

Satz 3. *Ein Normalteiler N einer nilpotenten Gruppe G ist dann und nur dann ein abelscher direkter Faktor von G, wenn*

$$\Phi_i(N) = N \cap G'\Phi_i(G) \text{ für jedes positive } i$$

gilt.

Beweis. Ist zunächst N ein abelscher direkter Faktor von G, so ist $G = N \otimes H$ für einen geeigneten Normalteiler H. Aus $N \simeq G/H$ folgt die Kommutativität von G/H, so daß also

$$G' \leq H$$

ist. Aus Lemma 3 folgern wir nun, daß

$$N \cap G'\Phi_i(G) = N \cap G'\Phi_i(H)\Phi_i(N) = \Phi_i(N)\,[N \cap G'\Phi_i(H)] = \Phi_i(N)$$

ist, da ja $G'\Phi_i(H) \leq H$ und $H \cap N = 1$ ist. Damit ist die Notwendigkeit unserer Bedingung gezeigt.

Gilt umgekehrt unsere Bedingung, so gibt es eine positive ganze Zahl k derart, daß $\Phi_k(G) = 1 = \Phi_k(N)$ ist. Es folgt also aus unserer Bedingung, daß

$$1 = \Phi_k(N) = N \cap G'\Phi_k(G) = N \cap G'$$

---

[2]) *Zusatz bei der Korrektur:* Ein schärferes Resultat hat W. Gaschütz erhalten [2; S. 162, Satz 7].

ist, woraus wegen Hilfssatz 1

$$N \subset Z(G)$$

folgt. Da weiter G nilpotent ist, so ist bekanntlich

$$G' \subseteq \Phi(G);$$

siehe etwa Zassenhaus [3; p. 107, Satz 12]. Aus Lemma 2 folgern wir jetzt:

$$\Phi_i(G/G') = G'\Phi_i(G)/G' \text{ für jedes } i.$$

Aus $N \cap G' = 1$ ergibt sich, daß N und $G'N/G'$ im wesentlichen identisch sind, so daß also

$$\Phi_i(G'N/G') = G'\Phi_i(N)/G' \text{ für jedes } i$$

gilt. Anwendung unserer Bedingung ergibt weiter:

$$\begin{aligned}\Phi_i(G'N/G') &= G'\Phi_i(N)/G' = G'[N \cap G'\Phi_i(G)]/G' \\ &= [G'N \cap G'\Phi_i(G)]/G' = [G'N/G'] \cap \Phi_i(G/G')\end{aligned}$$

für alle i. Da aber G/G' abelsch ist, so können wir Hilfssatz 2 anwenden. $G'N/G'$ ist also ein direkter Faktor von G/G', und es existiert folglich ein G' enthaltender Normalteiler U von G derart, daß

$$G/G' = [G'N/G'] \otimes U/G'$$

oder also

$$G = G'NU = NU \text{ und } G' = G'N \cap U$$

ist. Dann ist aber auch

$$N \cap U = N \cap G'N \cap U = N \cap G' = 1;$$

folglich ist $G = N \otimes U$. Daß N abelsch ist, haben wir schon früher erwiesen.

Satz 4. *Ein Normalteiler N einer Gruppe G ist dann und nur dann ein abelscher direkter Faktor von G, wenn jede N enthaltende Untergruppe U von G die folgende Eigenschaft hat:*

$$\Phi_i(N) = N \cap G'\Phi_i(U) \textit{ für jedes positive } i.$$

Beweis. Ist zunächst N ein abelscher direkter Faktor von G, so ist $G = N \otimes R$ und $G' \subseteq R$, da G/R und N isomorphe abelsche Gruppen sind. Ist weiter U eine N enthaltende Untergruppe von G, so folgt aus dem Dedekindschen Modulsatz, daß

$$U = N \otimes (R \cap U)$$

ist. Weiter folgern wir aus $G' \subseteq R$, dem Dedekindschen Modulsatz und Lemma 3:

$$\begin{aligned}N \cap G'\Phi_i(U) &= N \cap G'\Phi_i(N)\Phi_i(R \cap U) \\ &= \Phi_i(N)\,[N \cap G'\Phi_i(R \cap U)] \\ &= \Phi_i(N),\end{aligned}$$

da ja $G'\Phi_i(R \cap U) \subseteq R$ und $R \cap N = 1$ ist. Damit ist die Notwendigkeit unserer Bedingung erwiesen.

Wir nehmen nun umgekehrt die Gültigkeit unserer Bedingung an. Es gibt eine positive Zahl k derart, daß $\Phi_k(N) = 1$ ist; und Anwendung unserer Bedingung auf $U = N$ ergibt

$$1 = \Phi_k(N) = N \cap G'\Phi_k(N) = N \cap G'.$$

Hieraus und aus Hilfssatz 1 folgt wieder

$$N \subset Z(G),$$

so daß N insbesondere abelsch ist. Um unsern Satz induktiv beweisen zu können, beweisen wir folgende ein wenig schärfere Tatsache:

(+) *Jede N enthaltende Untergruppe U von G ist direktes Produkt von N und einer $U \cap G'$ enthaltenden Untergruppe.*

Da (+) wegen $N \cap G' = 1$ sicher für $U = N$ gilt, so können wir annehmen, daß $N < U$ und daß aus $N \leq V < U$ stets die Existenz einer Untergruppe V_0 folgt, die folgende Eigenschaften hat:

$$V = N \otimes V_0 \text{ und } V \cap G' \leq V_0.$$

Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle.

Fall 1: $U \cap G' \leq \Phi(U)$. Wir verfahren ähnlich wie beim Beweise von Satz 3. Es ist $M = U \cap G'$ ein Normalteiler von U, der in $\Phi(U)$ enthalten ist; und aus $N \cap G' = 1$ folgt $N \cap M = 1$. Also sind N und MN/M im wesentlichen identisch, so daß insbesondere

$$\Phi_i(MN/M) = M\Phi_i(N)/M \text{ für jedes } i$$

gilt. Aus $M < \Phi(U)$ und Lemma 2 folgern wir

$$\Phi_i(U/M) = M\Phi_i(U)/M \text{ für jedes } i.$$

Anwendung der Bedingung des Satzes ergibt schließlich wegen $N < U$ und Dedekinds Modulsatz, daß

$$\begin{aligned} M\Phi_i(N) &= M[N \cap G'\Phi_i(U)] = M[N \cap U \cap G'\Phi_i(U)] \\ &= M[N \cap \Phi_i(U)(U \cap G')] = M[N \cap M\Phi_i(U)] \\ &= MN \cap M\Phi_i(U) \end{aligned}$$

ist. Hieraus folgt weiter:

$$\begin{aligned} \Phi_i(MN/M) &= M\Phi_i(N)/M = [MN \cap M\Phi_i(U)]/M = [MN/M] \cap [M\Phi_i(U)/M] \\ &= [MN/M] \cap \Phi_i(U/M) \end{aligned}$$

für jedes i. Aus $U' \leq U \cap G' = M$ erschließen wir die Kommutativität von U/M. Also ist wieder Hilfssatz 2 anwendbar. Folglich existiert ein M enthaltender Normalteiler U_0 von U derart, daß

$$U/M = (MN/M) \otimes (U_0/M)$$

ist. Dann wird aber

$$U = MNU_0 = NU_0 \text{ und } M = MN \cap U_0 = M(N \cap U_0),$$

so daß insbesondere $N \cap U_0 \leq M$ ist. Es ist aber $M \cap N = 1$, und folglich wird auch $N \cap U_0 = 1$. Also ist $U = N \otimes U_0$ und $U \cap G' = M \leq U_0$.

Fall 2: $U \cap G' \leq \Phi(U)$. Aus $N \leq Z(G)$ folgt $N \leq Z(U)$; und aus Lemma 1 folgt also $\Phi(N) \leq \Phi(U)$. Aus unserer Bedingung erschließen wir weiter

$$\Phi(N) \leq N \cap \Phi(U) \leq N \cap G'\Phi(U) = \Phi(N) \text{ oder also } \Phi(N) = N \cap \Phi(U).$$

Ist x irgendein Element aus $G' \cap N\Phi(U)$, so existieren Elemente n und u in N resp. $\Phi(U)$ so, daß $x = nu$ ist; wir beachten, daß x zu G' gehört. Dann ist $n = xu^{-1}$ ein Element in

$$N \cap G'\Phi(U) = \Phi(N) = N \cap \Phi(U).$$

Folglich gehört $x = nu$ zu $\Phi(U)$. Also ist

$$G' \cap N\Phi(U) \leq \Phi(U) \text{ oder } G' \cap N\Phi(U) = G' \cap \Phi(U).$$

Da $U \cap G'$ nicht in $\Phi(U)$ enthalten ist, so gilt also auch

$$U \cap G' \leq N\Phi(U).$$

Aus $N \leq Z(U)$ und Lemma 1 folgern wir weiter $\Phi(U/N) = N\Phi(U)/N$. Also gilt $N(U \cap G')/N \leq \Phi(U/N)$. Daraus ergibt sich die Existenz einer maximalen Untergruppe V von U, die N enthält, aber $U \cap G'$ nicht enthält. Auf V können wir die Induktionsannahme anwenden. Folglich gibt es einen Normalteiler V_0 von V derart, daß

$$V = V_0 \otimes N \text{ und } V \cap G' \leq V_0$$

gelten. Da $U \cap G'$ ein Normalteiler von U ist, so können wir schließlich

$$U_0 = (U \cap G')\, V_0$$

setzen. Es ist klar, daß $U \cap G' \leq U_0$ ist. Da die maximale Untergruppe V von U nicht den Normalteiler $U \cap G'$ von U enthält, so wird

$$U = (U \cap G')V = (U \cap G')V_0 N = U_0 N.$$

Aus $N \leq Z(U)$ folgt weiter, daß U_0 ein Normalteiler von $U_0 N = U$ ist. Ist schließlich y ein Element in $U_0 \cap N$, so gibt es Elemente r in $U \cap G'$ und s in V_0 derart, daß $y = rs$ ist; wir beachten, daß y zu N gehört. Dann ist aber $r = ys^{-1}$ ein Element in

$$U \cap G' \cap NV_0 = U \cap G' \cap V = G' \cap V \leq V_0;$$

und y gehört zu $N \cap V_0 = 1$. Folglich ist

$$U_0 \cap N = 1,$$

so daß $U = N \otimes U_0$ gilt.

Damit ist der Induktionsbeweis von (+) vollständig erbracht; und aus (+) folgt insbesondere, daß N ein abelscher direkter Faktor von G ist.

5.

Wir wollen schließlich die Sätze 3 und 4 auf nicht-abelsche direkte Faktoren ausdehnen.

Satz 5. *Die folgenden Eigenschaften einer Untergruppe N von G sind äquivalent:*

(a) *N ist direkter Faktor von G.*

(b) *Jede N enthaltende Untergruppe U von G genügt folgenden Bedingungen:*

(b. 1) $N'\Phi_i(N) = N \cap G'\Phi_i(U)$;

(b. 2) $\Phi_i(U) = \Phi_i(N)\,\Phi_i[Z(N < U)]$;

(b. 3) $G'\Phi_i(U)/N'\Phi_i(N) \cong Z(N < G)'\Phi_i[Z(N < U)]/\Phi_i[Z(N)]$.

(c) *Jede N enthaltende Untergruppe U von G genügt folgenden Bedingungen:*

(c. 1) $NG'\Phi_i(U)/N \cong Z(N < G)'\Phi_i[Z(N < U)]/\Phi_i[Z(N)]$;

(c. 2) $\Phi_i(U) = \Phi_i(N)\,\Phi_i[Z(N < U)]$.

(d) *$G = NZ(N < G)$ und jede $Z(N)$ enthaltende Untergruppe V von $Z(N < G)$ genügt folgenden Bedingungen:*

$$\Phi_i[Z(N)] = Z(N) \cap Z(N < G)'\Phi_i(V).$$

Beweis. Ist zunächst N direkter Faktor von G, so gibt es eine Untergruppe D von G derart, daß $G = N \otimes D$ ist. Dann ist klar, daß

$$Z(N) = N \cap Z(N < G) \leq Z(G) \tag{1}$$

ist. Aus $D \leq Z(N < G)$ und dem Dedekindschen Modulsatz folgern wir nun

$$Z(N < G) = D \otimes [N \cap Z(N < G)] = D \otimes Z(N), \tag{2}$$

woraus sich weiter

$$G' = N' \otimes D' \text{ und } Z(N < G)' = D' \tag{3}$$

ergeben.

Ist U irgendeine N enthaltende Untergruppe von G, so ergibt sich aus dem Dedekindschen Modulsatz, daß

$$U = N \otimes (D \cap U) \tag{4}$$

ist. Da wieder $D \cap U \leq Z(N < U)$ ist, so folgt weiter

$$Z(N < U) = (D \cap U) \otimes [N \cap Z(N < U)] = Z(N) \otimes (D \cap U). \tag{5}$$

Aus der Folgerung aus Lemma 1 erschließen wir endlich

$$\Phi_i[Z(N)] \leq \Phi_i(N). \tag{6}$$

Jetzt wenden wir Lemma 3 auf (4) und (5) an und finden, daß

$$\Phi_i(U) = \Phi_i(N) \otimes \Phi_i(D \cap U), \tag{4'}$$

$$\Phi_i[Z(N < U)] = \Phi_i[Z(N)] \otimes \Phi_i(D \cap U) \tag{5'}$$

ist. Aus (5'), (4') und (6) ergibt sich ohne weiteres (b. 2).

Weiter folgt aus (3), (4') und Dedekinds Modulsatz, daß

$$\begin{aligned} N \cap G' \Phi_i(U) &= N \cap N' D' \Phi_i(N)\, \Phi_i(D \cap U) \\ &= N' \Phi_i(N)\, [N \cap D' \Phi_i(D \cap U)] = N' \Phi_i(N) \end{aligned}$$

ist, da ja $N \cap D = 1$ ist. Damit haben wir (b. 1) bewiesen.

Anwendung von (3), (4'), (5'), $N \cap D = 1$, dem Dedekindschen Modulsatz und dem Isomorphiesatz ergibt endlich, daß

$$\begin{aligned} G' \Phi_i(U)/N' \Phi_i(N) &= N' \Phi_i(N)\, D' \Phi_i(D \cap U)/N' \Phi_i(N) \\ &\cong D' \Phi_i(D \cap U)/[D' \Phi_i(D \cap U) \cap N' \Phi_i(N)] = D' \Phi_i(D \cap U) \\ &= D' \Phi_i(D \cap U)/[D' \Phi_i(D \cap U) \cap \Phi_i[Z(N)]] \\ &\cong D' \Phi_i(D \cap U)\, \Phi_i[Z(N)]/\Phi_i[Z(N)] \\ &= Z(N < G)' \Phi_i[Z(N < U)]/\Phi_i[Z(N)] \end{aligned}$$

ist, womit wir auch (b. 3) bewiesen haben. Also folgt (b) aus (a).

Nehmen wir jetzt die Gültigkeit von (b) an, so ist (c. 2) natürlich mit (b. 2) identisch. Setzen wir in (c. 2) insbesondere $U = G$ und $i = 0$, so ergibt sich $G = NZ(N < G)$, woraus folgt, daß N ein Normalteiler von G ist. Nun folgt aus (b. 1) und (b. 3) leicht:

$$\begin{aligned} NG' \Phi_i(U)/N &\cong G' \Phi_i(U)/[N \cap G' \Phi_i(U)] = G' \Phi_i(U)/N' \Phi_i(N) \\ &\cong Z(N < G)' \Phi_i[Z(N < U)]/\Phi_i[Z(N)]. \end{aligned}$$

Also ist (c) eine Folge aus (b).

Sind die Bedingungen (c) für N erfüllt, so schließen wir wie vorher aus (c. 2), daß N ein Normalteiler von $G = NZ(N < G)$ ist. Ist V eine $Z(N)$ enthaltende Untergruppe von $Z(N < G)$, so setzen wir

$$U = NV,$$

und es folgt aus dem Dedekindschen Modulsatz, daß

$$Z(N < U) = U \cap Z(N < G) = V[N \cap Z(N < G)] = VZ(N) = V$$

ist. Da $G = NZ(N < G)$ ein Spezialfall von (c. 2) ist, so ist auch $G' = N' Z(N < G)'$, und wir folgern aus (c. 1) und (c. 2), daß

$$\begin{aligned} Z(N < G)' \Phi_i(V)/\Phi_i[Z(N)] &\cong NG' \Phi_i(U)/N \\ &\cong NN' Z(N < G)' \Phi_i(N)\, \Phi_i(V)/N = NZ(N < G)' \Phi_i(V)/N \\ &\cong Z(N < G)' \Phi_i(V)/[N \cap Z(N < G)' \Phi_i(V)] \end{aligned}$$

ist. Da $Z(N) \leq Z[Z(N < U)] = Z(V)$ ist, so wird

$$\Phi_i[Z(N)] \leq Z(N) \cap Z(N < G)' \Phi_i(V) \leq N \cap Z(N < G)' \Phi_i(V),$$

wie sich aus der Folgerung aus Lemma 1 ergibt. Die obige Isomorphie zusammen mit der letzten Ungleichung ergibt schließlich

$$\Phi_i[Z(N)] = Z(N) \cap Z(N < G)' \Phi_i(V) = N \cap Z(N < G)' \Phi_i(V),$$

so daß also (d) eine Folge aus (c) ist.

Gilt schließlich (d), so folgt aus Satz 4, daß $Z(N)$ ein abelscher direkter Faktor von $Z(N < G)$ ist. Da aber außerdem $G = NZ(N < G)$ ist, so erschließt man hieraus ohne weiteres, daß N ein direkter Faktor von G ist, also (a) gilt. Damit ist unser Satz vollständig bewiesen.

Satz 6. *Wenn N ein Normalteiler mit nilpotenter Faktorgruppe von G ist, so sind die folgenden Eigenschaften von N äquivalent:*

(a) *N ist direkter Faktor von G.*

(b) $N'\Phi_i(N) = N \cap G'\Phi_i(G)$, $\Phi_i(G) = \Phi_i(N)\,\Phi_i[Z(N<G)]$,
$G'\Phi_i(G)/N'\Phi_i(N) \cong Z(N<G)'\Phi_i[Z(N<G)]/\Phi_i[Z(N)]$.

(c) $NG'\Phi_i(G)/N \cong Z(N<G)'\Phi_i[Z(N<G)]/\Phi_i[Z(N)]$,
$\Phi_i(G) = \Phi_i(N)\,\Phi_i[Z(N<G)]$.

(d) $G = NZ(N<G)$, $\Phi_i[Z(N)] = Z(N) \cap Z(N<G)'\Phi_i[Z(N<G)]$.

Aus Satz 5 folgt nämlich sofort, daß (b) eine Folge von (a) ist. Eine leichte Modifikation der im Beweise von Satz 5 benutzten Argumente zeigt, daß (c) aus (b) sowie (d) aus (c) folgt. Daß schließlich (a) aus (d) folgt, ergibt sich aus Satz 3, da ja G/N und $Z(N<G)/Z(N)$ isomorphe nilpotente Gruppen sind, woraus sich die Nilpotenz von $Z(N<G)$ ergibt.

Bemerkung. Man sieht leicht, daß die erste Bedingung (c) durch eine der folgenden beiden äquivalenten Bedingungen ersetzt werden kann:

$$NZ(N<G)'\Phi_i(G) = NZ(N<G)'\Phi_i[Z(N<G)]$$

oder

$$\Phi_i(G) \cap NZ(N<G)' = \Phi_i[Z(N<G)] \cap NZ(N<G)'.$$

Eine entsprechende Bemerkung läßt sich auch im Anschluß an Satz 5 machen.

Literaturverzeichnis.

[1] *Reinhold Baer*, Extension types of abelian groups. Amer. Journal of Math. **71** (1949), pp. 461–490.
[2] *W. Gaschütz*, Über die Φ-Untergruppe endlicher Gruppen. Math. Zeitschr. **58** (1953), pp. 160–170.
[3] *H. Zassenhaus*, Lehrbuch der Gruppentheorie I. Leipzig-Berlin 1937.

Eingegangen 14. Juni 1952.

Über quadratfreie Zahlen mit genau r Primfaktoren in einer arithmetischen Progression.

Von *Hans-Egon Richert* in Göttingen.

1. Die Verteilung quadratfreier Zahlen, welche aus genau r ($\geqq 1$) Primfaktoren bestehen, ist von Landau [1]) und S. Selberg [2]) untersucht worden. Hier betrachten wir die Verteilung dieser Zahlen in einer arithmetischen Progression, also $\pi_r(x; k, l)$, wobei wir von der O-Abschätzung des auftretenden Fehlergliedes verlangen, daß sie gleichmäßig in k gelten soll. Für $r = 1$ erhalten wir den Primzahlsatz von Page-Siegel-Walfisz [3]), für $r \geqq 2$ scheint das Ergebnis neu zu sein.

Auf dieses Problem wird man in der additiven Zahlentheorie folgendermaßen geführt. Der Vinogradovsche Beweis des Goldbach-Vinogradovschen Satzes gelingt auf den minor arcs mit Hilfe der von Vinogradov dort durchgeführten Abschätzungen, während das wesentliche Approximationshilfsmittel auf den major arcs der oben genannte Primzahlsatz darstellt [4]). Es liegt nun die Frage nahe, ob sich dieser Satz und ähnliche Resultate aus der additiven Primzahltheorie ebenso beweisen lassen, wenn man für die Summanden statt Primzahlen quadratfreie Zahlen mit vorgeschriebener Faktorenzahl r wählt. Da auf den minor arcs die zum Falle $r = 1$ analogen Abschätzungen bekannt sind [5]), läuft unsere Frage darauf hinaus, ob sich mit Hilfe der oben angekündigten Verteilungssätze die Approximationen auf den major arcs mit der notwendigen Genauigkeit durchführen und damit die genannten additiven Probleme lösen lassen.

Es zeigt sich, daß diese Frage zu bejahen ist, und wir werden als das in gewissem Sinne einfachste Anwendungsbeispiel die asymptotische Lösungsanzahl von $p_1 + p_2 + p_3\, p_4 = n$ aus dem Satz von Estermann [6]) angeben.

2. Es sei

(1) x eine hinreichend große reelle Veränderliche, die wir vorläufig als halbzahlig voraussetzen:

$$x = [x] + \tfrac{1}{2}, \tag{2}$$

r, k und l seien natürliche Zahlen, $(k, l) = 1$.

---

[1]) *E. Landau*, Über die Verteilung der Zahlen, welche aus ν Primfaktoren zusammengesetzt sind, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl. (1911), 361–381.

[2]) *S. Selberg*, An asymptotic formula for the distribution of the two-factorial integers, 10. Skand. Mat. Kongr., København (1946), 59–64; vgl. auch [15]).

[3]) *A. Walfisz*, Zur additiven Zahlentheorie II, Math. Zeitschr. **40** (1936), 592–607, Hilfssatz 3.

[4]) *I. M. Vinogradov*, Some theorems concerning the theory of primes, Mat. Sbornik **44**, n. Ser. **2** (1937), 179–195.

[5]) *I. M. Vinogradov*, Some general property of distribution of products of prime numbers, Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **30** (1941), 681–682.

[6]) *T. Estermann*, A new result in the additive prime-number theory, Quart. J. Math., Oxford II. Ser. **8** (1937), 32–38.

Mit χ, χ_0, χ_1 werden die $\varphi(k)$ zum Modul k gehörigen Charaktere bezeichnet, mit χ_0 der Hauptcharakter, mit χ_1 ein später (Hilfssatz 5) noch näher zu erklärender Ausnahmecharakter. $c, c', c_1, \ldots, c_9$ sind positive absolute Konstanten, $p, p_1, p_2, \ldots$ bezeichnen stets Primzahlen. $s = \sigma + it$ sei eine komplexe Veränderliche, und es seien weiter

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}, \quad \sigma > 1, \tag{3}$$

die zu den genannten Charakteren gehörigen Dirichletschen L-Reihen, für $\sigma \leqq 1$ durch analytische Fortsetzung erklärt,

$$E(\chi) = \begin{cases} 1 & \text{für } \chi = \chi_0, \\ 0 & \text{für } \chi \neq \chi_0, \end{cases}$$

$$Z(s, \chi) = \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s}, \quad \sigma > 1, \tag{4}$$

und

$$\pi_r(x; k, l) = \sum_{\substack{p_1 \cdots p_r \leqq x,\ p_1 < \cdots < p_r \\ p_1 \cdots p_r \equiv l \,(\mathrm{mod}\, k)}} 1.$$

Unter $\log s$ werde immer der Hauptzweig dieser Funktion verstanden. Die auftretenden O-Konstanten hängen höchstens von r ab, und eine leere Summe, wie $\sum_{a \leqq n \leqq b}$ für $a > b$ oder $\sum_{p \mid k}$ für $k = 1$, ist mit 0 zu interpretieren.

3. Hilfssatz 1. *Für $\sigma > 0$ ist*[7])

$$L(s, \chi) - \frac{E(\chi)\,\varphi(k)}{k} \frac{1}{s-1}$$

regulär.

Hilfssatz 2. *Es gibt ein $c_1 (\geqq 1)$, so daß $L(s, \chi)$ in*[8])

$$\sigma \geqq 1 - \frac{1}{c_1 \log k\, |t|}, \quad |t| \geqq 3,$$

keine Nullstellen besitzt.

Hilfssatz 3. *Es gibt ein $c_2 (\geqq c_1)$, so daß*[9])

$$\frac{L'}{L}(s, \chi) = O(\log k\, |t|) \quad \text{in} \quad 1 - \frac{1}{c_2 \log k\, |t|} \leqq \sigma \leqq 2, \quad |t| \geqq 4.$$

Hilfssatz 4. *Im Gebiet*

$$G_1: \qquad 1 - \frac{1}{c_2 \log k\, |t|} \leqq \sigma \leqq 2, \quad |t| \geqq 4,$$

ist $\log L(s, \chi)$ *regulär, und es gilt dort*

$$\log L(s, \chi) = O(\log k\, |t|).$$

Beweis. Die Regularität von $\log L(s, \chi)$ in G_1 folgt wegen $c_2 \geqq c_1$ aus Hilfssatz 1 und Hilfssatz 2. Wir fixieren ein t mit $|t| \geqq 4$ und setzen $s_0 = 2 + it$. Da $\log L(s_0, \chi)$ gleichmäßig in k und t beschränkt ist, folgt aus Hilfssatz 3 bei geradliniger Integration

$$\log L(s, \chi) = \log L(s_0, \chi) + \int_{s_0}^{s} \frac{L'}{L}(s, \chi)\, ds = O(1) + O(\log k\, |t|).$$

---

[7]) *E. Landau*, Vorlesungen über Zahlentheorie I (1927), Satz 234.

[8]) *E. C. Titchmarsh*, A divisor problem, Rend. di Palermo **54** (1930), 414—429, Lemma 3.

[9]) A. a. O. [8]), Lemma 4.

Hilfssatz 5. *Es gibt ein $c_3 (\geqq c_2)$, so daß alle Funktionen $L(s, \chi)$ modulo k bis auf höchstens eine (falls diese existiert, werden wir sie mit $L(s, \chi_1)$ bezeichnen) in*[10])

$$\sigma \geqq 1 - \frac{1}{c_3(\log k + 1)}, \quad |t| \leqq 5,$$

keine Nullstellen besitzen. Existiert $L(s, \chi_1)$, so besitzt diese Funktion in dem genannten Gebiet auch nur eine Nullstelle, die mit β_1 bezeichnet werde. (Dabei denken wir uns c_3 von vornherein so groß gewählt, daß der vorliegende Sachverhalt sich nicht ändert, wenn wir c_3 durch eine größere absolute Konstante ersetzen; dann besitzt keine unserer L-Reihen für eine absolute Konstante $c' \geqq c_3$ in $1 - \frac{1}{c_3(\log k + 1)} \leqq \sigma \leqq 1 - \frac{1}{c'(\log k + 1)}$ eine Nullstelle.) β_1 ist reell und einfach, und χ_1 ist ein reeller Charakter und $\chi_1 \neq \chi_0$.

Im folgenden ist zu beachten, daß χ_1 wegen $\chi_1 \neq \chi_0$ im Falle $k = 1$ sicher nicht existiert.

Hilfssatz 6. *Falls χ_1 existiert, so gibt es ein $c_4 (\geqq c_3)$, so daß $\log \frac{L(s, \chi_1)}{s - \beta_1}$ in*[11])

$$\sigma \geqq 1 - \frac{1}{c_4(\log k + 1)}, \quad |t| \leqq 4,$$

regulär ist und dort

$$\log \frac{L(s, \chi_1)}{s - \beta_1} = O(\log k)$$

gilt.

Hilfssatz 7. *Ist $\chi \neq \chi_0$ und besitzt $L(s, \chi)$ keine Nullstellen für $\sigma \geqq 1 - \delta$, $|t| \leqq 5$, so gilt*[12])

$$\frac{L'}{L}(s, \chi) = O\left(\frac{1}{\delta}\right) + O(\log k) \text{ in } \sigma \geqq 1 - \frac{\delta}{4}, \quad |t| \leqq 4.$$

Hilfssatz 8. *Für $\chi \neq \chi_1$ und $\chi \neq \chi_0$ gilt*

$$\frac{L'}{L}(s, \chi) = O(\log k) \text{ in } \sigma \geqq 1 - \frac{1}{4c_3(\log k + 1)}, \quad |t| \leqq 4.$$

Beweis. Wegen $\chi \neq \chi_1$ hat $L(s, \chi)$ nach Hilfssatz 5 keine Nullstellen in $\sigma \geqq 1 - \frac{1}{c_3(\log k + 1)}$, $|t| \leqq 5$, so daß wegen $\chi \neq \chi_0$ Hilfssatz 7 mit $\delta = \frac{1}{c_3(\log k + 1)}$ anwendbar ist.

Hilfssatz 9. *Es gibt ein $c_5 (\geqq 4c_3)$, so daß für $\chi \neq \chi_1$ und $\chi \neq \chi_0$ $\log L(s, \chi)$ in*

$$G_2: \qquad 1 - \frac{1}{c_5(\log k + 1)} \leqq \sigma \leqq 2, \quad |t| \leqq 4,$$

regulär ist und dort

$$\log L(s, \chi) = O(\log k)$$

gilt.

Beweis. Nach Hilfssatz 1 und Hilfssatz 5 ist $\log L(s, \chi)$ wegen $c_5 \geqq 4c_3$ in G_2 für $\chi \neq \chi_1$ und $\chi \neq \chi_0$ regulär. Für $s_0 = 2 + it$ und $s \in G_2$ folgt bei geradliniger Integration mit Hilfssatz 8

$$\log L(s, \chi) = \log L(s_0, \chi) + \int_{s_0}^{s} \frac{L'}{L}(s, \chi)\, ds = O(1) + O(\log k).$$

---

[10]) *A. Page*, On the number of primes in an arithmetic progression, Proc. London math. Soc., II. Ser. **39** (1935), 116–141, insbesondere 131.

[11]) A. a. O. [10]), 128–129, Lemma 11.

[12]) A. a. O. [8]), Lemma 10.

Hilfssatz 10. *In* $\frac{3}{4} \leqq \sigma \leqq 2$, $|t| \leqq 4$, *ist* $\log(s-1)\,L(s, \chi_0)$ *regulär, und dort gilt*[13])

$$\log(s-1)\,L(s, \chi_0) = O(\log k + 1).$$

Diese Hilfssätze sollen uns nun zu den für unsere Rechnungen nötigen Abschätzungen von $Z(s, \chi)$ verhelfen. Wir beachten, daß nach (3) und (4) für $\sigma > 1$

$$Z(s, \chi) = \log L(s, \chi) - R(s, \chi) \tag{5}$$

mit

$$R(s, \chi) = \sum_p \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\chi^n(p)}{n}\, p^{-ns} \tag{6}$$

gilt.

Man erkennt, daß $R(s, \chi)$ für $\sigma \geqq \frac{3}{4}$ regulär und gleichmäßig in t und k beschränkt ist, so daß

$$R(s, \chi) = O(1) \text{ für } \sigma \geqq \tfrac{3}{4}$$

und $Z(s, \chi)$ mit Hilfe von (5) analytisch fortgesetzt werden kann.

Wählen wir

$$c_6 = \operatorname{Max}(c_4, c_5, 4), \tag{7}$$

d. h. insbesondere

$$1 - \frac{1}{c_6(\log k + 1)} \geqq \frac{3}{4},$$

so folgt nun aus Hilfssatz 4

Hilfssatz 11. *In* $\frac{3}{4} \leqq 1 - \frac{1}{c_6 \log k\,|t|} \leqq \sigma \leqq 2$, $|t| \geqq 4$, *ist* $Z(s, \chi)$ *regulär, und dort gilt*

$$Z(s, \chi) = O(\log k\,|t|),$$

sowie

$$Z(ns, \chi) = O(1) \text{ für } n \geqq 2.$$

Aus Hilfssatz 9 erhalten wir

Hilfssatz 12. *Für* $\chi \neq \chi_1$ *und* $\chi \neq \chi_0$ *ist* $Z(s, \chi)$ *in*

$$G: \quad \frac{3}{4} \leqq 1 - \frac{1}{c_6(\log k + 1)} \leqq \sigma \leqq 2,\ |t| \leqq 4,$$

regulär, und dort gilt

$$Z(s, \chi) = O(\log k)$$

sowie

$$Z(ns, \chi) = O(1) \text{ für } n \geqq 2.$$

Nach Hilfssatz 5 und Hilfssatz 6 haben wir

Hilfssatz 13. *Falls* χ_1 *existiert, so bezeichne* G' *das Gebiet, das durch einen geraden Schnitt von* $1 - \frac{1}{c_6(\log k + 1)}$ *bis* β_1 *aus* G *entsteht einschließlich der beiden Ufer des Schnittes. Dann ist* $Z(s, \chi_1)$ *in* G' *bis auf den Punkt* $s = \beta_1$ *regulär;* $h(s) = Z(s, \chi_1) - \log(s - \beta_1)$ *ist auch in* β_1, *d. h. in* G *regulär, und dort gilt*

$$h(s) = O(\log k)$$

sowie

$$Z(ns, \chi_1) = O(1) \text{ für } n \geqq 2.$$

---

[13]) A. a. O. [8]), Lemma 7.

Endlich folgt aus Hilfssatz 10

Hilfssatz 14. *G'' bezeichne das Gebiet, das durch einen geraden Schnitt von $\frac{3}{4}$ bis 1 aus $\frac{3}{4} \leqq \sigma \leqq 2$, $|t| \leqq 4$ entsteht einschließlich der beiden Ufer des Schnittes. Dann ist $Z(s, \chi_0)$ in G'' bis auf den Punkt $s = 1$ regulär; $g(s) = Z(s, \chi_0) + \log(s-1)$ ist auch in 1, d. h. in $\frac{3}{4} \leqq \sigma \leqq 2$, $|t| \leqq 4$, regulär, und dort gilt*

$$g(s) = O(\log k + 1)$$

sowie

$$Z(ns, \chi_0) = O(1) \text{ für } n \geqq 2.$$

4. Wir suchen jetzt eine Funktion $F_r(s, \chi)$, so daß der Ansatz

$$J_r(x, \chi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{x^s}{s} F_r(s, \chi)\, ds \tag{8}$$

die Beziehung

$$\frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} \chi(l) J_r(x, \chi) = \pi_r(x; k, l) \tag{9}$$

liefert. Offenbar ist hierfür die Funktion $Z^r(s, \chi)$ noch ungeeignet, denn mit ihr würden wir in (9) jede unserer Zahlen $p_1 \cdots p_r$, $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$, der Restklasse von l mod k mehrfach erhalten und auch diejenigen Zahlen $p_1 \cdots p_r$ mitzählen, deren Primfaktoren nicht sämtlich verschieden sind. Nach den sog. Newtonschen Relationen zwischen Potenzsummen und elementarsymmetrischen Funktionen ist aber

$$rF_r(s, \chi) = \sum_{\nu=1}^{r} (-1)^{\nu+1} Z(\nu s, \chi) F_{r-\nu}(s, \chi), \quad F_0(s, \chi) = 1, \tag{10}$$

also $F_1(s, \chi) = Z(s, \chi)$, $F_2(s, \chi) = \frac{1}{2}(Z^2(s, \chi) - Z(2s, \chi))$ usw. Setzen wir allgemein

$$F_r(s, \chi) = \sum_{\substack{0 \leq \nu_i \leq r,\, i=1,\ldots,r \\ \sum_{i=1}^{r} i\nu_i = r}} a_{\nu_1,\ldots,\nu_r} Z^{\nu_1}(s, \chi) Z^{\nu_2}(2s, \chi) \cdots Z^{\nu_r}(rs, \chi), \tag{11}$$

so erhalten wir aus (10) für die Koeffizienten $a_{\nu_1,\ldots,\nu_r}$ die Rekursionsformel

$$ra_{\nu_1,\ldots,\nu_r} = \sum_{i=1}^{r} (-1)^{i+1} a_{\nu_1,\ldots,\nu_{i-1},\nu_i-1,\nu_{i+1},\ldots,\nu_r}, \quad (\nu_1, \ldots, \nu_r) \neq (0, \ldots, 0, 1), \tag{12}$$

wobei die Koeffizienten, in denen ein Index negativ ist, mit 0 zu interpretieren sind, und ferner

$$r \cdot a_{0,\ldots,0,1} = (-1)^{r+1}. \tag{13}$$

(12) und (13) werden nun durch

$$a_{\nu_1,\ldots,\nu_r} = (-1)^{\nu_2+\nu_4+\cdots} \left(\prod_{n=1}^{r} \nu_n!\, n^{\nu_n} \right)^{-1}$$

befriedigt; denn für (13) ist dies unmittelbar klar, und wegen $\sum_{i=1}^{r} i\nu_i = r$ ist

$$\sum_{i=1}^{r} (-1)^{i+1} a_{\nu_1,\ldots,\nu_i-1,\ldots,\nu_r} = (-1)^{\nu_2+\nu_4+\cdots} \left(\prod_{n=1}^{r} \nu_n!\, n^{\nu_n} \right)^{-1} \sum_{i=1}^{r} i\nu_i = ra_{\nu_1,\ldots,\nu_r},$$
$$(\nu_1, \ldots, \nu_r) \neq (0, \ldots, 0, 1),$$

wobei, wie es verabredet war, im Falle eines Koeffizienten mit einem negativen Index, d. h. $a_{\nu_1,\ldots,\nu_i-1,\ldots,\nu_r}$ mit $\nu_i = 0$, dieser in der Summe $\sum_{i=1}^{r} i\nu_i$ einen verschwindenden Beitrag liefert. Wegen der Eindeutigkeit der Darstellung (11) gelten daher (8) und (9) mit

$$F_r(s, \chi) = \sum_{\substack{0 \leq \nu_i \leq r,\, i=1,\ldots,r \\ \sum_{i=1}^{r} i\nu_i = r}} (-1)^{\nu_2+\nu_4+\cdots} \left(\prod_{n=1}^{r} \nu_n!\, n^{\nu_n} \right)^{-1} Z^{\nu_1}(s, \chi) Z^{\nu_2}(2s, \chi) \cdots Z^{\nu_r}(rs, \chi). \tag{14}$$

5. Zur Berechnung von $J_r(x, \chi)$ treffen wir die folgenden Vereinbarungen. Es seien

$$T \geqq 4,$$

$$a = \frac{1}{c_6 \log kT}, \tag{15}$$

und wir erklären die folgenden Integrationswege, die sämtlich geradlinig gemeint sind:

$$C_1\colon 1 + a - i\infty \cdots 1 + a - iT; \quad C_1'\colon 1 + a - iT \cdots 1 - a - iT;$$
$$C_1''\colon 1 - a - iT \cdots 1 - a - 4i,$$

C_2, C_2', C_2'' seien die in bezug auf die reelle Achse hierzu spiegelbildlichen Wege, jedoch im gleichen Sinne durchlaufen, ferner

$$\Gamma_1\colon 1 - a - 4i \cdots 1 - a; \quad \Gamma_2\colon 1 - a \cdots 1 - a + 4i, \tag{16}$$

$$w = C_1 + C_1' + C_1'' + \Gamma_1 + \Gamma_2 + C_2'' + C_2' + C_2. \tag{17}$$

C_0 sei eine Schleife $1 - a \cdots 1 \cdots 1 - a$, wobei der Punkt $s = 1$ im positiven Sinne umfahren wird,

$$w_0 = C_1 + C_1' + C_1'' + \Gamma_1 + C_0 + \Gamma_2 + C_2'' + C_2' + C_2. \tag{18}$$

Wir wollen den in (8) angegebenen Integrationsweg $2 - i\infty \cdots 2 + i\infty$ für χ_0 in w_0 und für $\chi \neq \chi_0$ und $\chi \neq \chi_1$ in w abändern. In den Zwischengebieten ist der Integrand nach Hilfssatz 11, Hilfssatz 12 und Hilfssatz 14 regulär, so daß wir aus (8)

$$J_r(x, \chi_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{w_0} \frac{x^s}{s} F_r(s, \chi_0)\, ds \tag{19}$$

und

$$J_r(x, \chi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{w} \frac{x^s}{s} F_r(s, \chi)\, ds \quad \text{für} \quad \chi \neq \chi_0,\ \chi \neq \chi_1 \tag{20}$$

erhalten.

Falls der Ausnahmecharakter χ_1 existiert, unterscheiden wir drei Fälle. Wir setzen

$$w_1 = C_1 + C_1' + C_1'' + \Gamma_3 + C_2'' + C_2' + C_2, \tag{21}$$

wo Γ_3 folgendermaßen erklärt wird:

Ist $\beta_1 \leqq 1 - \frac{3a}{2}$, so setzen wir $\Gamma_3 = \Gamma_1 + \Gamma_2$, und nach Hilfssatz 13, (14) und (16) ist

$$F_r(s, \chi_1) = O\left(\log^r \frac{1}{a}\right) + O(\log^r k), \quad s \in \Gamma_3 = \Gamma_1 + \Gamma_2, \ \beta_1 \leqq 1 - \frac{3a}{2}. \tag{22}$$

Ist $1 - \frac{3a}{2} < \beta_1 < 1 - \frac{a}{2}$, so definieren wir Γ_3 wie untenstehend in jeweils geradliniger Verbindung und erhalten nach Hilfssatz 13 und (14)

$$F_r(s, \chi_1) = O\left(\log^r \frac{1}{a}\right) + O(\log^r k), \tag{23}$$

$$s \in \Gamma_3\colon 1 - a - 4i \cdots 1 - \frac{a}{4} - 4i \cdots 1 - \frac{a}{4} + 4i \cdots 1 - a + 4i,\ 1 - \frac{3a}{2} < \beta_1 < 1 - \frac{a}{2}.$$

Für $\beta_1 \geqq 1 - \frac{a}{2}$ verstehen wir unter C_0' eine Schleife $1 - a \cdots \beta_1 \cdots 1 - a$ in G', die den Punkt β_1 im positiven Sinne umfährt, und setzen $\Gamma_3 = \Gamma_1 + C_0' + \Gamma_2$.

In jedem Falle ist auch hier der Integrand zwischen $2 - i\infty \cdots 2 + i\infty$ und w_1 regulär, so daß jedenfalls

$$J_r(x, \chi_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{w_1} \frac{x^s}{s} F_r(s, \chi_1)\, ds \tag{24}$$

gilt.

Zunächst wollen wir nun die Integrale über die allen drei Wegen gemeinsamen Wegstücke C_ν'', C_ν', C_ν, $\nu = 1, 2$, abschätzen.

Aus Hilfssatz 11 erhalten wir mit (14) sofort

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\nu''} \frac{x^s}{s} F_r(s, \chi)\, ds = O(x^{1-a} \log^{r+1} kT), \quad \nu = 1, 2, \tag{25}$$

und

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\nu'} \frac{x^s}{s} F_r(s, \chi)\, ds = O\left(\frac{x^{1+a}}{T} \log^r kT\right), \quad \nu = 1, 2. \tag{26}$$

Für die Abschätzung auf C_ν, $\nu = 1, 2$, können wir uns auf C_2 beschränken. Hier ist $\sigma > 1$ und daher nach (14) und (4)

$$F_r(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varkappa_r(n)}{n^s},$$

wo

$$\varkappa_r(n) = O(1) \tag{27}$$

gilt.

Für $T' \geqq T$ ist dann

$$\int\limits_{1+a+iT}^{1+a+iT'} \frac{x^s}{s} F_r(s, \chi)\, ds = \sum_{n=1}^{\infty} \varkappa_r(n) \int\limits_{1+a+iT}^{1+a+iT'} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^s}{s}\, ds. \tag{28}$$

Beachten wir (2) sowie

$$\int \frac{e^{\mu s}}{s}\, ds = \frac{e^{\mu s}}{\mu s} + \int \frac{e^{\mu s}}{\mu s^2}\, ds,$$

so erhalten wir

$$\left|\int\limits_{1+a+iT}^{1+a+iT'} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^s}{s}\, ds\right| \leqq \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{1+a}}{\log\frac{x}{n}}\left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T'}\right) + \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{1+a}}{\log\frac{x}{n}}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T'}\right) = \frac{2}{T}\,\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{1+a}}{\log\frac{x}{n}},$$

und da diese Abschätzung von T' unabhängig ist, folgt aus (28) und (27)

$$\int\limits_{C_2} \frac{x^s}{s} F_r(s, \chi)\, ds = O\left(\frac{1}{T}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{1+a}}{\left|\log\frac{x}{n}\right|}. \tag{29}$$

Von der rechts stehenden Summe schätzen wir zuerst die Teile ab, für die $\left|\log\frac{x}{n}\right| \geqq \log 2$, d. h. $\frac{x}{n} \leqq \frac{1}{2}$ oder $\frac{x}{n} \geqq 2$ ist:

$$\sum_{\substack{n=1 \\ \left|\log\frac{x}{n}\right| \geqq \log 2}}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{1+a}}{\left|\log\frac{x}{n}\right|} \leqq \frac{x^{1+a}}{\log 2}\,\zeta(1+a) = O\left(\frac{x^{1+a}}{a}\right). \tag{30}$$

Im Rest unserer Summe setzen wir $n = x + \nu$, wo ν wegen (2) halbzahlig ist und $-\frac{x}{2} < \nu < x$ gilt. Hier ist $\left|\log\frac{x}{n}\right| \geqq \frac{1}{c_7}\frac{|\nu|}{x}$, und wir haben

$$(31)\qquad \sum_{\substack{n=1\\ \log\frac{x}{n} < \log 2}}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{1+a}}{\left|\log\frac{x}{n}\right|} \leqq c_7\, 2^{1+a} \sum_{\substack{-\frac{x}{2} < \nu < x\\ \nu \text{ halbzahlig}}} \frac{x}{|\nu|} = O(x \log x).$$

Aus (29) und (31) folgt nunmehr

$$(32)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\nu} \frac{x^s}{s} F_r(s, \chi)\, ds = O\left(\frac{x^{1+a}}{aT}\right) + O\left(\frac{x \log x}{T}\right), \quad \nu = 1, 2.$$

Für $\chi \neq \chi_1$ und $\chi \neq \chi_0$ erhalten wir aus (14) und Hilfssatz 12

$$(33)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\nu} \frac{x^s}{s} F_r(s, \chi)\, ds = O(x^{1-a} \log^r k), \quad \chi \neq \chi_1, \chi \neq \chi_0, \nu = 1, 2,$$

und nach Hilfssatz 14 folgt

$$(34)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\nu} \frac{x^s}{s} F_r(s, \chi_0)\, ds = O\left(x^{1-a} \log^r \frac{1}{a}\right) + O\left(x^{1-a}(\log^r k + 1)\right), \quad \nu = 1, 2.$$

Falls χ_1 existiert, haben wir gemäß den drei Fallunterscheidungen für die mögliche Lage von β_1 nach (22), (23) und Hilfssatz 13

$$(35)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{x^s}{s} F_r(s, \chi_1)\, ds$$

$$= \begin{cases} O\left(x^{1-a} \log^r \frac{1}{a}\right) + O\left(x^{1-a} \log^r k\right) & \text{für } \beta_1 \leqq 1 - \frac{3a}{2}, \\ O\left(x^{1-\frac{a}{4}} \log^r \frac{1}{a}\right) + O\left(x^{1-\frac{a}{4}} \log^r k\right) & \text{für } 1 - \frac{3a}{2} < \beta_1 < 1 - \frac{a}{2}, \\ \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0'} \frac{x^s}{s} F_r(s, \chi_1)\, ds + O\left(x^{1-a} \log^r \frac{1}{a}\right) + O\left(x^{1-a} \log^r k\right) & \text{für } \beta_1 \geqq 1 - \frac{a}{2}. \end{cases}$$

Wenn der dritte der genannten Fälle vorliegt, muß das auftretende Integral über C_0' abgeschätzt werden.

Es ist nach der Definition von C_0'

$$(36)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0'} \frac{x^s}{s} F_r(s, \chi_1)\, ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{1-a}^{\beta_1 - \varepsilon} \frac{x^s}{s} \left(\underset{\text{unteres Ufer}}{F_r(s, \chi_1)} - \underset{\text{oberes Ufer}}{F_r(s, \chi_1)}\right) ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{K_\varepsilon} \frac{x^s}{s} F_r(s, \chi_1)\, ds,$$

wo K_ε mit hinreichend kleinem $\varepsilon > 0$ den Kreis vom Radius ε um β_1 bezeichnet.

Nach Hilfssatz 13 ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K_\varepsilon} \frac{x^s}{s} F_r(s, \chi_1)\, ds = O\left(\int_0^{2\pi} \frac{x^{\beta_1+\varepsilon}}{\beta_1 - \varepsilon} \left(\log^r \frac{1}{\varepsilon} + \log^r k\right) \varepsilon\, d\varphi\right) = O\left(x^{\beta_1+\varepsilon} \cdot \varepsilon \left(\log^r \frac{1}{\varepsilon} + \log^r k\right)\right)$$

und wegen $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \log^r \frac{1}{\varepsilon} = 0$ folgt daher aus (36)

$$(37)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0'} \frac{x^s}{s} F_r(s, \chi_1)\, ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{1-a}^{\beta_1} \frac{x^s}{s} \left(\underset{\text{unteres Ufer}}{F_r(s, \chi_1)} - \underset{\text{oberes Ufer}}{F_r(s, \chi_1)}\right) ds.$$

Nun ist nach der Definition von $h(s)$ (Hilfssatz 13)

$$\underset{\text{unteres Ufer}}{Z^{\nu_1}(s,\chi_1)} - \underset{\text{oberes Ufer}}{Z^{\nu_1}(s,\chi_1)} = (h(s)+\log(\beta_1-s)-\pi i)^{\nu_1} - (h(s)+\log(\beta_1-s)+\pi i)^{\nu_1}$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\nu_1}\binom{\nu_1}{\mu}((-\pi i)^\mu - (\pi i)^\mu)(h(s)+\log(\beta_1-s))^{\nu_1-\mu}$$

$$= -2\pi i \sum_{0\leq\lambda\leq\frac{\nu_1-1}{2}}\binom{\nu_1}{2\lambda+1}(-1)^\lambda\pi^{2\lambda}\sum_{\mu=0}^{\nu_1-2\lambda-1}\binom{\nu_1-2\lambda-1}{\mu}(-1)^\mu h^{\nu_1-2\lambda-1-\mu}(s)\log^\mu\frac{1}{\beta_1-s},$$

und da die übrigen Faktoren in den Summanden von $F_r(s,\chi)$ nach Hilfssatz 13 in G regulär und gleichmäßig beschränkt sind, haben wir nach (14), (37) und Hilfssatz 13

$$\text{(38)}\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0'}\frac{x^s}{s}F_r(s,\chi)\,ds = O\left(\log^{r-1}k\int_{1-a}^{\beta_1}x^s\log^{r-1}\frac{1}{\beta_1-s}\,ds\right).$$

Hierin ist

$$\text{(39)}\qquad \int_{1-a}^{\beta_1}x^s\log^{r-1}\frac{1}{\beta_1-s}\,ds = x^{\beta_1}\int_0^{\beta_1-1+a}x^{-t}\log^{r-1}\frac{1}{t}\,dt$$

$$= \frac{x^{\beta_1}}{\log x}\sum_{\mu=0}^{r-1}\binom{r-1}{\mu}(\log\log x)^{r-1-\mu}\int_0^{(\beta_1-1+a)\log x}e^{-t}\log^\mu\frac{1}{t}\,dt.$$

Im vorliegenden Falle (vgl. (35)) ist $\beta_1 \geqq 1-\frac{a}{2}$, also

$$\beta_1-1+a \geqq 1-\frac{a}{2}-1+a = \frac{a}{2},$$

und daher gilt

$$\int_0^{(\beta_1-1+a)\log x}e^{-t}\log^\mu\frac{1}{t}\,dt = (-1)^\mu\Gamma^{(\mu)}(1) + O\left(\int_{(\beta_1-1+a)\log x}^{\infty}e^{-\frac{t}{2}}\,dt\right)$$

$$= (-1)^\mu\Gamma^{(\mu)}(1) + O\left(x^{-\frac{a}{4}}\right) = O(1).$$

Mit (38) und (39) entnehmen wir hieraus

$$\text{(40)}\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0'}\frac{x^s}{s}F_r(s,\chi_1)\,ds = O\left(\frac{x^{\beta_1}\log^{r-1}k(\log\log x)^{r-1}}{\log x}\right).$$

Nun stellen wir unsere Ergebnisse zusammen. (19), (18), (32), (26), (25) und (34) liefern

$$\text{(41)}\quad J_r(x,\chi_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{x^s}{s}F_r(s,\chi_0)\,ds + O\left(\frac{x\log x}{T}\right) + O\left(\frac{x^{1+a}}{T}\log^r kT\right)$$
$$+ O(x^{1-a}\log^{r+1}kT),$$

und (20), (17), (32), (26), (25) und (33) ergeben

$$\text{(42)}\quad J_r(x,\chi) = O\left(\frac{x\log x}{T}\right) + O\left(\frac{x^{1+a}}{T}\log^r kT\right) + O(x^{1-a}\log^{r+1}kT),\ \chi\neq\chi_0,\ \chi\neq\chi_1.$$

Falls χ_1 existiert, so ist nach (24), (21), (32), (26), (25), (35) und (40) gewiß

$$\text{(43)}\qquad J_r(x,\chi_1) = O\left(\frac{x^{1+a}}{T}\log^r kT\right) + O\left(\frac{x\log x}{T}\right) + O\left(x^{1-\frac{a}{4}}\log^{r+1}kT\right)$$
$$+ O\left(\frac{x^{\beta_1}\log^{r-1}k(\log\log x)^{r-1}}{\log x}\right).$$

6. Nach (12) erhalten wir nun aus (41) bis (43)

$$(44)\quad \pi_r(x;k,l) = \frac{1}{\varphi(k)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_0}\frac{x^s}{s}F_r(s,\chi_0)\,ds + O\left(\frac{x\log x}{T}\right) + O\left(\frac{x^{1+a}}{T}\log^r kT\right)$$
$$+ O\left(x^{1-\frac{a}{4}}\log^{r+1}kT\right) + O\left(x^{\beta_1}\frac{\log^{r-1}k\,(\log\log x)^{r-1}}{\varphi(k)\log x}\right).$$

Wir fordern vorläufig

$$(45)\qquad k \leqq e^{\frac{1}{2}\sqrt{\log x}},$$

und über das im Rahmen von $T \geqq 4$ noch beliebige T verfügen wir jetzt so, daß

$$kT = x^{ac_6}$$

wird, d. h. mit (15)

$$\log kT = \sqrt{\log x}$$

und

$$(46)\qquad a = \frac{1}{c_6\sqrt{\log x}}$$

sowie

$$(47)\qquad x^{-a} = e^{-\frac{1}{c_6}\sqrt{\log x}}.$$

Die Bedingung $T \geqq 4$ ist dann wegen (45) und (1) erfüllt. Beachten wir, daß nach (7) jedenfalls $c_6 \geqq 4$ ist, und setzen wir

$$(48)\qquad c = 5c_6\,(\geqq 20),$$

so erhalten wir aus (44) nunmehr

$$(49)\qquad \pi_r(x;k,l) = \frac{1}{\varphi(k)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_0}\frac{x^s}{s}F_r(s,\chi_0)\,ds + O\left(xe^{-\frac{1}{c}\sqrt{\log x}}\right)$$
$$+ O\left(\frac{x^{\beta_1}}{\log x}\frac{\log^{r-1}k}{\varphi(k)}(\log\log x)^{r-1}\right).$$

Jetzt soll das Schleifenintegral über C_0 bestimmt werden. Wie bei (37) finden wir mit der Definition von C_0

$$(50)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_0}\frac{x^s}{s}F_r(s,\chi_0)\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-a}^{1}\frac{x^s}{s}\left(\underset{\text{unteres Ufer}}{F_r(s,\chi_0)} - \underset{\text{oberes Ufer}}{F_r(s,\chi_0)}\right)ds.$$

Mit der Definition von $g(s)$ in Hilfssatz 14 wird hier

$$(51)\quad \underset{\text{unteres Ufer}}{Z^{\nu_1}(s,\chi_0)} - \underset{\text{oberes Ufer}}{Z^{\nu_1}(s,\chi_0)} = \left(g(s) + \log\frac{1}{1-s} + \pi i\right)^{\nu_1} - \left(g(s) + \log\frac{1}{1-s} - \pi i\right)^{\nu_1}$$
$$= 2\pi i \sum_{0\leqq\lambda\leqq\frac{\nu_1-1}{2}}\binom{\nu_1}{2\lambda+1}(-1)^\lambda\pi^{2\lambda}\sum_{\mu=0}^{\nu_1-2\lambda-1}\binom{\nu_1-2\lambda-1}{\mu}g^{\nu_1-2\lambda-1-\mu}(s)\log^\mu\frac{1}{1-s}.$$

Da

$$(52)\quad G^{(\varrho)}_{\nu_2,\ldots,\nu_r}(s,k) = g^\varrho(s)\,Z^{\nu_2}(2s,\chi_0)\cdots Z^{\nu_r}(rs,\chi_0),\quad 0\leqq\varrho\leqq\nu_1-1\leqq r-1,$$

nach Hilfssatz 14 in $|s-1|\leqq\frac{1}{4}$ regulär ist, gilt dort eine Entwicklung

$$(53)\qquad G^{(\varrho)}_{\nu_2,\ldots,\nu_r}(s,k) = \sum_{m=0}^{\infty}d^{(\varrho)}_{\nu_2,\ldots,\nu_r}(m,k)\,(1-s)^m,\quad |s-1|\leqq\tfrac{1}{4},$$

und wir erhalten aus (14), wobei wir, da anderenfalls bereits die Differenz (51) verschwindet, die Summation von ν_1 bei 1 beginnen können, mit (50) bis (53)

$$(54)\quad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_a}\frac{x^s}{s}F_r(s,\chi_0)\,ds$$

$$= \sum_{\substack{0\leq \nu_i\leq r,\, i=1,\dots,r\\ \sum_{i=1}^{r} i\nu_i = r,\, \nu_1\geq 1}} (-1)^{\nu_2+\nu_4+\cdots}\left(\prod_{n=1}^{r}\nu_n!\,n^{\nu_n}\right)^{-1}\sum_{0\leq\lambda\leq\frac{\nu_1-1}{2}}\binom{\nu_1}{2\lambda+1}(-1)^{\lambda}\pi^{2\lambda}\sum_{\mu=0}^{\nu_1-2\lambda-1}\binom{\nu_1-2\lambda-1}{\mu}$$

$$\cdot\sum_{m=0}^{\infty} d^{(\nu_1-2\lambda-1-\mu)}_{\nu_2,\dots,\nu_r}(m,k)\int\limits_{1-a}^{1}\frac{x^s}{s}(1-s)^m\log^{\mu}\frac{1}{1-s}\,ds.$$

Wir setzen

$$(55)\quad H_{m,\mu}(x) = \int\limits_{1-a}^{1}\frac{x^s}{s}(1-s)^m\log^{\mu}\frac{1}{1-s}\,ds = \int\limits_{0}^{a}\frac{x^{1-t}}{1-t}t^m\log^{\mu}\frac{1}{t}\,dt,$$

$$m = 0, 1, 2, \dots;\ 0\leq\mu\leq\nu_1-1\leq r-1,$$

und notieren zunächst die triviale Abschätzung

$$(56)\quad H_{m,\mu}(x) = O\left(xa^m\int\limits_{0}^{1}\log^{\mu}\frac{1}{t}\,dt\right) = O(xa^m).$$

Für das Weitere benötigen wir den

Hilfssatz 15. *Es sei* $r_1 > 0$,

$$f(s) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(s-s_0)^m$$

für $|s-s_0|\leq r_1$ *regulär und ebenda* $Ref(s)\leq M$. *Dann ist für* $m\geq 1$ [14])

$$|a_m|\leq\frac{2}{r_1^m}(M - Re\,a_0).$$

Wir wählen $f(s) = G^{(\varrho)}_{\nu_2,\dots,\nu_r}(s,k)$. Dann sind die Voraussetzungen von Hilfssatz 15 nach (53), (52) und Hilfssatz 14 mit $s_0 = 1$, $r_1 = \frac{1}{4}$ und $M = O(\log k + 1)$ erfüllt. Für unsere Anwendungen werde hier gleich $d^{(\varrho)}_{\nu_2,\dots,\nu_r}(0,k)$ berechnet. Wir beachten [15])

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{p}p^{-n} = C - B,$$

wo C die Eulersche und B die Mertenssche Konstante aus der Entwicklung

$$(57)\quad \sum_{p\leq x}\frac{1}{p} = \log\log x + B + o(1)$$

bezeichnen. Dann erhalten wir aus (5), Hilfssatz 1 und (6) zunächst

$$(58)\quad g(1) = \lim_{s\to 1}\log(s-1)\,L(s,\chi_0) - R(1,\chi_0)$$

$$= \log\frac{\varphi(k)}{k} + B - C + \sum_{p\mid k}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}p^{-n} - p^{-1}\right) = B - C - \sum_{p\mid k}\frac{1}{p},$$

---

[14]) A. a. O. [7]), Satz 225.

[15]) *S. Selberg*, Über die Verteilung einiger Klassen quadratfreier Zahlen, Avhdl. Norske Vid. Akad. Oslo I, No. 5 (1942), 10.

letzteres wegen

$$\sum_{p|k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} p^{-n} = -\sum_{p|k} \log\left(1 - \frac{1}{p}\right) = -\log \prod_{p|k} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = -\log \frac{\varphi(k)}{k};$$

so daß wir aus (53), (52) und (58) bekommen:

$$(59) \qquad d^{(\varrho)}_{\nu_2, \ldots, \nu_r}(0, k) = G^{(\varrho)}_{\nu_2, \ldots, \nu_r}(1, k) = \left(B - C - \sum_{p|k} \frac{1}{p}\right)^{\varrho} Z^{\nu_2}(2, \chi_0) \cdots Z^{\nu_r}(r, \chi_0).$$

Nun ist[16])

$$(60) \qquad \sum_{p|k} \frac{1}{p} \leqq \sum_{p|k} 1 = O(\log k)$$

so daß aus (59), (60) und Hilfssatz 14

$$(61) \qquad d^{(\varrho)}_{\nu_2, \ldots, \nu_r}(0, k) = O(\log^{\varrho} k + 1)$$

folgt. Wegen (61) liefert uns Hilfssatz 15 jetzt

$$(62) \qquad d^{(\varrho)}_{\nu_2, \ldots, \nu_r}(m, k) = O(4^m (\log^{\varrho} k + 1)) \text{ für } m \geqq 0.$$

Mit der Abkürzung

$$M = \left[\frac{1}{c} \sqrt{\log x}\right]$$

folgt aus (56), (62) und (45)

$$\begin{aligned} \sum_{m > M} d^{(\nu_1 - 2\lambda - 1 - \mu)}_{\nu_2, \ldots, \nu_r}(m, k) H_{m, \mu}(x) &= O(x(\log^{\nu_1 - 2\lambda - 1 - \mu} k + 1) \sum_{m > M} (4a)^m) \\ &= O\left(x (\log^{r-1} k + 1) (4a)^{\frac{1}{c}\sqrt{\log x}}\right) \\ &= O\left(x \log^{\frac{r-1}{2}} x e^{-\frac{1}{c}\sqrt{\log x} \log\left(\frac{c_8}{4}\sqrt{\log x}\right)}\right) = O\left(x e^{-\frac{1}{c}\sqrt{\log x}}\right), \end{aligned}$$

und hiermit erhalten wir wegen (49), (54) und (55), wenn wir für β_1 die von Siegel und Walfisz herrührende Abschätzung[17])

$$\beta_1 \leqq 1 - \frac{1}{bk^{\varepsilon}}, \; b = b(\varepsilon)$$

benutzen,

$$(63) \qquad \pi_r(x; k, l) = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\substack{0 \leqq \nu_i \leqq r,\, i = 1, \ldots, r \\ \sum_{i=1}^{r} i\nu_i = r,\, \nu_1 \geqq 1}} (-1)^{\nu_2 + \nu_4 + \cdots} \left(\prod_{n=1}^{r} \nu_n!\, n^{\nu_n}\right)^{-1}$$

$$\cdot \sum_{0 \leqq \lambda \leqq \frac{\nu_1 - 1}{2}} \binom{\nu_1}{2\lambda + 1} (-1)^{\lambda} \pi^{2\lambda} \sum_{\mu = 0}^{\nu_1 - 2\lambda - 1} \binom{\nu_1 - 2\lambda - 1}{\mu} \sum_{0 \leqq m \leqq M} d^{(\nu_1 - 2\lambda - 1 - \mu)}_{\nu_2, \ldots, \nu_r}(m, k) H_{m, \mu}(x)$$

$$+ O\left(x e^{-\frac{1}{c}\sqrt{\log x}}\right) + O\left(x^{1 - \frac{1}{bk^{\varepsilon}}} \frac{\log^{r-1} k}{\varphi(k)} \frac{(\log\log x)^{r-1}}{\log x}\right).$$

Wir bilden nun

$$H'_{m, \mu}(u) = \int_0^a u^{-t} t^m \log^{\mu} \frac{1}{t}\, dt = \int_0^{\infty} u^{-t} t^m \log^{\mu} \frac{1}{t}\, dt + O\left(\int_a^{\infty} u^{-t} t^m \log^{\mu} \frac{1}{t}\, dt\right).$$

Für $t > a$, $0 \leqq \mu \leqq r - 1$, $0 \leqq m \leqq M$, $\sqrt{x} \leqq u \leqq x$ ist wegen (46)

$$u^{-t} t^m \log^{\mu} \frac{1}{t} = O\left(u^{-\frac{t}{2}}\right),$$

[16]) A. a. O. [7]), Satz 221.

[17]) A. a. O. [3]), Hilfssatz 2.

so daß wir

$$H'_{m,\mu}(u) = \int_0^\infty e^{-t\log u} t^m \log^\mu \frac{1}{t}\, dt + O\left(u^{-\frac{a}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\log u} \int_0^\infty e^{-\xi} \left(\frac{\xi}{\log u}\right)^m \log^\mu \left(\frac{\log u}{\xi}\right) d\xi + O\left(u^{-\frac{a}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\log^{m+1} u} \sum_{\gamma=0}^{\mu} \binom{\mu}{\gamma} (\log\log u)^\gamma (-1)^{\mu-\gamma} \int_0^\infty e^{-\xi}\, \xi^m \log^{\mu-\gamma} \xi d\xi + O\left(u^{-\frac{a}{2}}\right)$$

$$= \sum_{\gamma=0}^{\mu} \binom{\mu}{\gamma} (-1)^{\mu-\gamma}\, \Gamma^{(\mu-\gamma)}(m+1) \frac{(\log\log u)^\gamma}{\log^{m+1} u} + O\left(u^{-\frac{a}{2}}\right)$$

$$\text{für } \sqrt{x} \leqq u \leqq x,\ 0 \leqq m \leqq M,\ 0 \leqq \mu \leqq r-1,$$

erhalten. Mit (56) folgt hieraus, wenn wir zur Abkürzung

$$L_{h,n}(x) = \int_2^x \frac{(\log\log u)^h}{\log^n u}\, du \tag{64}$$

setzen, für $0 \leqq m \leqq M$, $0 \leqq \mu \leqq r-1$

$$H_{m,\mu}(x) = H_{m,\mu}(\sqrt{x}) + \int_{\sqrt{x}}^x H'_{m,\mu}(u)\, du$$

$$= O\left(x^{1-\frac{a}{2}}\right) + \sum_{h=0}^{\mu} \binom{\mu}{h} (-1)^{\mu-h} \Gamma^{(\mu-h)}(m+1)\, L_{h,m+1}(x).$$

Verwenden wir dies endlich in (63), so erhalten wir bei Beachtung von (47) und (48)

$$\pi_r(x; k, l) = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{0 \leqq m \leqq \frac{1}{c}\sqrt{\log x}} \sum_{0 \leqq h \leqq r-1} A_r(h, m, k)\, L_{h,m+1}(x) \tag{65}$$

$$+ O\left(x e^{-\frac{1}{c}\sqrt{\log x}}\right) + O\left(\frac{x^{1-\frac{1}{bk^2}} \log^{r-1} k (\log\log x)^{r-1}}{\varphi(k) \log x}\right)$$

mit

$$A_r(h, m, k) = \sum_{\substack{0 \leqq \nu_i \leqq r,\ i=1,\dots,r \\ \sum_{i=1}^r i\nu_i = r,\ \nu_1 \geqq 1}} (-1)^{\nu_2+\nu_4+\cdots} \left(\prod_{n=1}^r \nu_n!\, n^{\nu_n}\right)^{-1} \sum_{0 \leqq \lambda \leqq \frac{\nu_1-1}{2}} \binom{\nu_1}{2\lambda+1} (-1)^\lambda \pi^{2\lambda}$$

$$\cdot \sum_{h \leqq \mu \leqq \nu_1-2\lambda-1} \binom{\nu_1-2\lambda-1}{\mu} d^{(\nu_1-2\lambda-1-\mu)}_{\nu_2,\dots,\nu_r}(m, k) \binom{\mu}{h} (-1)^{\mu-h}\, \Gamma^{(\mu-h)}(m+1).$$

Nun wollen wir uns noch von den beiden einschränkenden Voraussetzungen (2) und (45) befreien. Die Bedingung (2) können wir fortlassen, da man in (65) erkennt, daß die Änderungen aller Glieder in einem Intervall der Länge 1 von den Fehlergliedern verschluckt werden. Ist (45) nicht erfüllt, d. h. ist $k > e^{\frac{1}{2}\sqrt{\log x}}$, so folgen in trivialer Abschätzung wegen (48), (62) und (64) unter Verwendung von [18])

[18]) *E Landau*, Handbuch I (1909), 218–219.

$$\frac{1}{\varphi(k)} = O\left(\frac{\log k + 1}{k}\right) \tag{66}$$

die Aussagen

$$\pi_r(x; k, l) = O(1 + xk^{-1}) = O\left(xe^{-\frac{1}{2}\sqrt{\log x}}\right) = O\left(xe^{-\frac{1}{c}\sqrt{\log x}}\right)$$

und

$$\frac{1}{\varphi(k)} \sum_{0 \leq m \leq \frac{1}{c}\sqrt{\log x}} \sum_{0 \leq h \leq r-1} A_r(h, m, k)\, L_{h, m+1}(x)$$

$$= O\left(\frac{x \log^{r-1} k (\log\log x)^{r-1}}{\varphi(k) \log x} \sum_{0 \leq m \leq \frac{1}{c}\sqrt{\log x}} \left(\frac{\frac{4}{c}\sqrt{\log x}}{\log x}\right)^m\right)$$

$$= O\left(\frac{x \log^r k}{k}\right) = O\left(xk^{-\frac{1}{2}}\right) = O\left(xe^{-\frac{1}{4}\sqrt{\log x}}\right) = O\left(xe^{-\frac{1}{c}\sqrt{\log x}}\right).$$

Damit haben wir den

Satz 1. *Es seien r, k und l natürliche Zahlen, $(k, l) = 1$. Dann gilt für $x \geqq 2$ und jedes $\varepsilon > 0$ gleichmäßig in k*

$$\pi_r(x; k, l) = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{0 \leq m \leq \frac{1}{c}\sqrt{\log x}} \sum_{0 \leq h \leq r-1} A_r(h, m, k)\, L_{h, m+1}(x) \tag{67}$$

$$+ O\left(xe^{-\frac{1}{c}\sqrt{\log x}}\right) + O\left(x^{1-\frac{1}{bk^\varepsilon}} \frac{\log^{r-1} k (\log\log x)^{r-1}}{\varphi(k) \log x}\right),$$

$$A_r(h, m, k) = \sum_{\substack{0 \leq \nu_i \leq r,\, i=1,\dots,r \\ \sum_{i=1}^{r} i\nu_i = r,\, \nu_1 \geqq 1}} (-1)^{\nu_2+\nu_4+\cdots} \left(\prod_{n=1}^{r} \nu_n!\, n^{\nu_n}\right)^{-1} \sum_{0 \leq \lambda \leq \frac{\nu_1-1}{2}} \binom{\nu_1}{2\lambda+1} (-1)^\lambda \pi^{2\lambda}$$

$$\cdot \sum_{h \leq \mu \leq \nu_1-2\lambda-1} \binom{\nu_1-2\lambda-1}{\mu} d^{(\nu_1-2\lambda-1-\mu)}_{\nu_2,\dots,\nu_r}(m, k) \binom{\mu}{h} (-1)^{\mu-h} \Gamma^{(\mu-h)}(m+1)$$

wo c eine absolute, b eine nur von ε abhängige Konstante bezeichnen, und die $L_{h,n}(x)$ und die $d^{(\varrho)}_{\nu_2,\dots,\nu_r}(m, k)$ in (64) und (53) erklärt sind.

Für $r = 1$ verbleibt in (67) nur ein Summand, für den $\nu_1 = 1$, $\lambda = \mu = h = m = 0$ ist, denn mit $\nu_1 = 1$, $\lambda = \mu = 0$ reduziert sich wegen (52) die Darstellung (53) auf die Konstante 1, und aus Satz 1 folgt daher

$$\pi_1(x; k, l) = \frac{1}{\varphi(k)} L_{0,1}(x) + O\left(xe^{-\frac{1}{c}\sqrt{\log x}}\right) + O\left(\frac{x^{1-\frac{1}{bk^\varepsilon}}}{\varphi(k) \log x}\right), \tag{68}$$

d. h. der Primzahlsatz von Page-Siegel-Walfisz [19]).

7. Mit Satz 1 lassen sich nun, wie in der Einleitung bereits erwähnt, weitere additive Probleme lösen und deren Lösungsanzahlen asymptotisch berechnen, bei denen die auftretenden Summanden aus einer vorgeschriebenen Anzahl von Primfaktoren bestehen.

Wir wählen ein einfaches Anwendungsbeispiel, indem wir uns die Aufgabe der asymptotischen Bestimmung der Lösungsanzahl von

$$p_1 + p_2 + p_3 p_4 = n, \quad p_3 < p_4, \tag{69}$$

stellen.

---

[19]) A. a. O. [3]).

Bezeichnet $\gamma(n)$ die Lösungsanzahl von (69), so besagt der Satz von Estermann[20])

$$\gamma(n) \geqq \frac{1}{c_8} \frac{n^2}{\log^3 n \log\log n} \text{ für } n \equiv 1 \pmod 2,\ n \geqq N_0. \tag{70}$$

Aus unserem Ergebnis (Satz 2) wird insbesondere folgen, daß (70) auch für $n \equiv 0 \pmod 2$ $\left(\text{sogar ohne Faktor } \frac{1}{\log\log n}\right)$ gilt, während für $n \equiv 1 \pmod 2$

$$\gamma(n) \geqq \frac{1}{c_9} \frac{n^2}{\log^3 n} \log\log n,\ n \geqq n_0,$$

ist.

Es seien

(71) n eine hinreichend große natürliche Zahl,

$$\omega = \log^{17} n, \tag{72}$$

$$\varrho(y, n) = \sum_{p \leqq n} e^{2\pi i y p}, \tag{73}$$

$$\sigma(y, n) = \sum_{\substack{p_1 p_2 \leqq n \\ p_1 < p_2}} e^{2\pi i y p_1 p_2}, \tag{74}$$

$$r_m(y, n) = \sum_{2 \leqq \nu \leqq n} \frac{1}{\log^m \nu} e^{2\pi i y \nu},\ m \geqq 1, \tag{75}$$

$$s(y, n) = \sum_{2 \leqq \nu \leqq n} \frac{\log\log \nu}{\log \nu} e^{2\pi i y \nu}, \tag{76}$$

$$R(y, n) = \sum_{1 \leqq \nu \leqq n} e^{2\pi i y \nu}, \tag{77}$$

$$\begin{aligned} U_n(l, k) &= \int_{\frac{l}{k} - \omega n^{-1}}^{\frac{l}{k} + \omega n^{-1}} \varrho^2(y, n)\, \sigma(y, n)\, e^{-2\pi i y n} dy \\ &= e^{-\frac{2\pi i l n}{k}} \int_{-\omega n^{-1}}^{\omega n^{-1}} \varrho^2\left(\frac{l}{k} + y, n\right) \sigma\left(\frac{l}{k} + y, n\right) e^{-2\pi i y n} dy, \end{aligned} \tag{78}$$

$$j(n) = \int_{-\omega n^{-1}}^{\omega n^{-1}} r_1^2(y, n)\, s(y, n)\, e^{-2\pi i y n} dy, \tag{79}$$

$$j_m(n) = \int_{-\omega n^{-1}}^{\omega n^{-1}} r_1^2(y, n)\, r_m(y, n)\, e^{-2\pi i y n} dy, \tag{80}$$

$$\lambda_p(n) = \int_{-\omega n^{-1}}^{\omega n^{-1}} r_1^2(y, n)\, r_1\left(yp, \frac{n}{p}\right) e^{-2\pi i y n} dy, \tag{81}$$

$$j^*(n) = \int_{-\omega n^{-1}}^{\omega n^{-1}} R^3(y, n)\, e^{-2\pi i y n} dy, \tag{82}$$

$$\lambda_p^*(n) = \int_{-\omega n^{-1}}^{\omega n^{-1}} R^2(y, n)\, R\left(yp, \frac{n}{p}\right) e^{-2\pi i y n} dy, \tag{83}$$

---

[20]) A. a. O. [5]).

$$j^{**}(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} R^3(y, n)\, e^{-2\pi i y n}\, dy, \tag{84}$$

$$\lambda_p^{**}(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} R^2(y, n)\, R\left(yp, \frac{n}{p}\right) e^{-2\pi i y n}\, dy, \tag{85}$$

$$\mathfrak{J}: \qquad \omega n^{-1} \cdots 1 + \omega n^{-1}. \tag{86}$$

$\mathfrak{M}$ sei die Menge aller $y \in \mathfrak{J}$, für die zwei Zahlen l und k existieren, so daß

$$\left| y - \frac{l}{k} \right| \leqq \omega n^{-1}, \tag{87}$$

$$1 \leqq l \leqq k \leqq \omega, \tag{88}$$

$$(l, k) = 1 \tag{89}$$

erfüllt sind; $\mathfrak{m}$ erklären wir durch

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{J} - \mathfrak{M}.$$

Ferner seien

$$D_k(l) = \sum_{\substack{1 \leqq h \leqq k \\ (h, k) = 1}} e^{\frac{2\pi i h l}{k}}, \tag{90}$$

$$\mathfrak{S}(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{\varphi^3(k)} D_k(n), \tag{91}$$

$$\mathfrak{S}_1(n) = -\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\mu(k)}{\varphi^3(k)} D_k(n) \sum_{p\ k} 1. \tag{92}$$

Jetzt beziehen sich unsere Abschätzungen auf die Bewegung $n \to \infty$.

8. Wir benötigen die folgenden Hilfssätze:

Hilfssatz 16. *Für* $y \in \mathfrak{m}$, $y = \frac{l}{k} + \frac{\theta}{k^2}$, $(l, k) = 1$, $|\theta| \leqq 1$, *gilt*[21])

$$\operatorname{Min}\left(k, \frac{n}{k}\right) \geqq \omega.$$

Hilfssatz 17. *Es sei* $y = \frac{l}{k} + \frac{\theta}{k^2}$, $(l, k) = 1$, $|\theta| \leqq 1$, $\varepsilon > 0$. *Dann ist*[22])

$$\varrho(y, n) = O\left(n \log n \left(\operatorname{Min}\left(k, \frac{n}{k}\right)\right)^{-\frac{1}{4}+\varepsilon}\right).$$

Hilfssatz 18. *Für* $y \in \mathfrak{m}$ *ist*

$$\varrho(y, n) = O\left(n \log n\, \omega^{-\frac{6}{25}}\right).$$

Beweis. Folgt aus Hilfssatz 17 mit $\varepsilon = 10^{-2}$ und Hilfssatz 16.

Hilfssatz 19. *Es seien* $(h, k) = 1$, $1 \leqq k \leqq \omega$, $1 \leqq \nu \leqq n$. *Setzt man*

$$\pi_1(\nu; k, h) = \sum_{\substack{p \leqq \nu \\ p \equiv h \pmod k}} 1 = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{2 \leqq \mu \leqq \nu} \frac{1}{\log \mu} + \theta_1(\nu),$$

so ist

$$\theta_1(\nu) = O(n\omega^{-6}). \tag{93}$$

---

[21]) *H.-E. Richert*, Aus der additiven Primzahltheorie, J. reine angew. Math. **191** (1953), 179–198, Lemma 1.

[22]) *I. M. Vinogradov*, A new estimation of a certain sum containing primes, Mat. Sbornik **44**, n. Ser. **2** (1937), 783–792.

Beweis. Nach der Eulerschen Summenformel ist für feste h und m

$$L_{h,m+1}(\nu) = \sum_{2 \leq \mu \leq \nu} \frac{(\log\log \mu)^h}{\log^{m+1} \mu} + O(1), \tag{94}$$

und daher folgt mit $h = m = 0$ die Behauptung (93) wegen $k \leqq \omega$ aus (68).

Hilfssatz 20. *Für die durch* (90) *erklärte Funktion* $D_k(l)$ *gelten*[23])

$$D_k(l) = \sum_{d \mid (l,k)} d\mu\left(\frac{k}{d}\right) = D_k(-l), \tag{95}$$

$$D_k(l) = \mu(k) \text{ für } (l, k) = 1, \tag{96}$$

$$D_{k_1}(l)\, D_{k_2}(l) = D_{k_1 k_2}(l) \text{ für } (k_1, k_2) = 1,$$

$$|D_k(l)| \leqq \varphi(k) \leqq k. \tag{97}$$

Hilfssatz 21. *Es seien* $(h, k) = 1$, $1 \leqq k \leqq \omega$, $1 \leqq \nu \leqq n$. *Setzt man*

$$\pi_2(\nu; k, h) = \sum_{\substack{p_1 p_2 \leq \nu,\, p_1 < p_2 \\ p_1 p_2 \equiv h \,(\mathrm{mod}\, k)}} 1 = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{2 \leq \mu \leq \nu} \frac{\log\log \mu}{\log \mu} + \frac{C}{\varphi(k)} \sum_{2 \leq \mu \leq \nu} \frac{1}{\log \mu}$$
$$+ \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{0 \leq m \leq 100} d_0^{(1)}(m, k)\, m! \sum_{2 \leq \mu \leq \nu} \frac{1}{\log^{m+1} \mu} + \theta_2(\nu),$$

so ist

$$\theta_2(\nu) = O(n\omega^{-6}).$$

Beweis. Nach Satz 1 ist wegen $k \leqq \omega$

$$\pi_2(\nu; k, h) = \frac{1}{\varphi(k)} L_{1,1}(\nu) + \frac{C}{\varphi(k)} L_{0,1}(\nu)$$
$$+ \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{0 \leq m \leq \frac{1}{c}\sqrt{\log \nu}} d_0^{(1)}(m, k)\, m!\, L_{0,m+1}(\nu) + O(n\omega^{-6}).$$

Hierin gilt für festes natürliches q nach (62)

$$\frac{1}{\varphi(k)} \sum_{q \leq m \leq \frac{1}{c}\sqrt{\log \nu}} d_0^{(1)}(m, k)\, m!\, L_{0,m+1}(\nu)$$
$$= O\left(\frac{\nu(\log k + 1)}{\log \nu\, \varphi(k)} \left(\sum_{q \leq m \leq 2q-1} \left(\frac{4(2q-1)}{\log \nu}\right)^m + \sum_{2q \leq m \leq \frac{1}{c}\sqrt{\log \nu}} \left(\frac{\frac{4}{c}\sqrt{\log \nu}}{\log \nu}\right)^m \right)\right)$$
$$= O\left(\frac{\nu}{\log^{q+1} \nu}\right) = O\left(\frac{n}{\log^{q+1} n}\right),$$

so daß wir mit $q = 101$, d. h. wegen (72) mit $\log^{q+1} n = \omega^6$, unter Verwendung von (94) und (62) erhalten

$$\theta_2(\nu) = O(1) + O(n\omega^{-6}) + O\left(\frac{(\log k + 1)}{\varphi(k)} \sum_{0 \leq m \leq 100} (4m)^m\right) = O(n\omega^{-6}).$$

Hilfssatz 22. *Für die durch* (75) *bis* (77) *erklärten Funktionen gelten die folgenden Abschätzungen*

$$r_m(y, n) = O\left(\frac{n}{\log^m n}\right), \tag{98}$$

$$r_m(y, n) = O\left(\frac{1}{|y| \log^m n}\right), \quad \frac{1}{n} \leq |y| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad m \geqq 1, \tag{99}$$

---

[23]) Vgl. [7]), 188.

$$s(y, n) = O\left(\frac{n \log\log n}{\log n}\right) \tag{100}$$

$$s(y, n) = O\left(\frac{\log\log n}{|y| \log n}\right), \quad \frac{1}{n} \leqq |y| \leqq \frac{1}{\sqrt{n}}, \tag{101}$$

$$R(y, n) = O(n), \tag{102}$$

$$R(y, n) = O\left(\frac{1}{|y|}\right), \quad \frac{1}{n} \leqq |y| \leqq \frac{1}{2}. \tag{103}$$

Beweis. Die Abschätzungen (98), (100) und (102) sind nach (75) bis (77) trivial. (103) ist bekannt[24]). Nach der Eulerschen Summenformel ist wegen $m \geqq 1$ für $0 < |y| \leqq \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$r_m(y, n) = \int_{\sqrt{n}}^{n} \frac{e^{2\pi i y u}}{\log^m u}\, du + O\left(\frac{\sqrt{n}}{\log^m n}\right) + O(1) + O\left(|y| \frac{n}{\log^m n}\right)$$
$$= O\left(\frac{1}{|y| \log^m n}\right) + O\left(\frac{\sqrt{n}}{\log^m n}\right) + O\left(|y| \frac{n}{\log^m n}\right)$$

und

$$s(y, n) = \int_{\sqrt{n}}^{n} \frac{e^{2\pi i y u} \log\log u}{\log u}\, du + O\left(\frac{\sqrt{n} \log\log n}{\log n}\right) + O(1) + O\left(|y| \frac{n \log\log n}{\log n}\right)$$
$$= O\left(\frac{\log\log n}{|y| \log n}\right) + O\left(\frac{\sqrt{n} \log\log n}{\log n}\right) + O\left(|y| \frac{n \log\log n}{\log n}\right).$$

Hieraus folgen für $\frac{1}{n} \leqq |y| \leqq \frac{1}{\sqrt{n}}$ die Abschätzungen (99) und (101).

Hilfssatz 23. *Für $m \geqq 1$ ist*

$$j_m(n) = O\left(\frac{n^2}{\log^{m+2} n}\right).$$

Beweis. Nach (80) und Hilfssatz 22 ist

$$j_m(n) = O\left(\frac{n^3}{\log^{m+2} n} \int_0^{n^{-1}} dy + \frac{1}{\log^{m+2} n} \int_{n^{-1}}^{\infty n^{-1}} \frac{dy}{y^3}\right) = O\left(\frac{n^2}{\log^{m+2} n}\right).$$

Hilfssatz 24. *Für $|y| \leqq \frac{1}{\sqrt{n}}$ ist*

$$s(y, n) - \frac{\log\log n}{\log n} R(y, n) = O\left(\frac{\log\log n}{\log n} \operatorname{Min}\left(\frac{1}{|y|}, \frac{n}{\log n}\right)\right), \tag{104}$$

$$r_1(y, n) - \frac{1}{\log n} R(y, n) = O\left(\frac{1}{\log n} \operatorname{Min}\left(\frac{1}{|y|}, \frac{n}{\log n}\right)\right). \tag{105}$$

Beweis. Nach (76), (77), (75) und wegen

$$\sum_{2 \leqq \nu \leqq n} \frac{(\log\log \nu)^h}{\log \nu} = \frac{n (\log\log n)^h}{\log n} + O\left(\frac{n (\log\log n)^h}{\log^2 n}\right), \quad h = 0, 1,$$

ist

$$s(y, n) - \frac{\log\log n}{\log n} R(y, n) = O(1) + \sum_{2 \leqq \nu \leqq n} \left(\frac{\log\log \nu}{\log \nu} - \frac{\log\log n}{\log n}\right) e^{2\pi i y n}$$
$$= O(1) + O\left(\sum_{2 \leqq \nu \leqq n} \left|\frac{\log\log \nu}{\log \nu} - \frac{\log\log n}{\log n}\right|\right) = O\left(\frac{n \log\log n}{\log^2 n}\right)$$

[24]) *E. Landau*, Über einige neuere Fortschritte der additiven Zahlentheorie, Cambridge Tracts No. 35 (1937), 28.

und ebenso

$$r_1(y, n) - \frac{1}{\log n} R(y, n) = O(1) + O\left(\sum_{2 \leq \nu \leq n} \left(\frac{1}{\log \nu} - \frac{1}{\log n}\right)\right) = O\left(\frac{n}{\log^2 n}\right).$$

Wegen (101), (103) und (99) folgen hieraus unsere Behauptungen.

Hilfssatz 25. *Es ist*

$$j(n) - \frac{\log\log n}{\log^3 n} j^*(n) = O\left(\frac{n^2 \log\log n}{\log^4 n}\right), \tag{106}$$

$$j_1(n) - \frac{1}{\log^3 n} j^*(n) = O\left(\frac{n^2}{\log^4 n}\right), \tag{107}$$

$$\lambda_p(n) - \frac{1}{\log^3 n} \lambda_p^*(n) = O\left(\frac{n^2 \log\log n}{p \log^4 n}\right), \quad p \leq \omega. \tag{108}$$

Beweis. Nach (104), (102), (103) und (105) ist für $|y| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$r_1^2(y, n)\, s(y, n) = \frac{\log\log n}{\log^3 n} R^3(y, n) + O\left(\frac{\log\log n}{\log^3 n} \operatorname{Min}^2\left(\frac{1}{|y|}, n\right) \operatorname{Min}\left(\frac{1}{|y|}, \frac{n}{\log n}\right)\right),$$

so daß wir aus (79) und (82) erhalten

$$j(n) - \frac{\log\log n}{\log^3 n} j^*(n) \tag{109}$$

$$= \frac{\log\log n}{\log^3 n} O\left(\frac{n^3}{\log n} \int_0^{n^{-1}} dy + \frac{n}{\log n} \int_{n^{-1}}^{\frac{\log n}{n}} \frac{dy}{y^2} + \int_{\frac{\log n}{n}}^{\frac{\omega}{n}} \frac{dy}{y^3}\right) = O\left(\frac{n^2 \log\log n}{\log^4 n}\right),$$

und in ähnlicher Weise folgt (107). Für $p \leq \omega$ und $|y| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ haben wir wegen (105), (102) und (103)

$$r_1\left(yp, \frac{n}{p}\right) = \frac{R\left(yp, \frac{n}{p}\right)}{\log \frac{n}{p}} + O\left(\frac{1}{p \log n} \operatorname{Min}\left(\frac{1}{|y|}, \frac{n}{\log n}\right)\right)$$

$$= \frac{R\left(yp, \frac{n}{p}\right)}{\log n} + O\left(\frac{1}{p \log n} \operatorname{Min}\left(\frac{1}{|y|}, \frac{n}{\log n}\right)\right) + O\left(\frac{\log\log n}{p \log^2 n} \operatorname{Min}\left(\frac{1}{|y|}, n\right)\right),$$

also nochmals mit (105)

$$r_1^2(y, n)\, r_1\left(yp, \frac{n}{p}\right) = \frac{R^2(y, n)\, R\left(yp, \frac{n}{p}\right)}{\log^3 n} + O\left(\frac{1}{p \log^3 n} \operatorname{Min}^2\left(\frac{1}{|y|}, n\right) \operatorname{Min}\left(\frac{1}{|y|}, \frac{n}{\log n}\right)\right)$$

$$+ O\left(\frac{\log\log n}{p \log^4 n} \operatorname{Min}^3\left(\frac{1}{|y|}, n\right)\right).$$

Hiermit folgt dann (108) nach (81) und (83) in derselben Einteilung wie bei (109).

Hilfssatz 26. *Es ist*

$$j(n) = \frac{n^2 \log\log n}{2 \log^3 n} + O\left(\frac{n^2 \log\log n}{\log^4 n}\right), \tag{110}$$

$$j_1(n) = \frac{n^2}{2 \log^3 n} + O\left(\frac{n^2}{\log^4 n}\right), \tag{111}$$

$$\lambda_p(n) = \frac{n^2}{2p \log^3 n} + O\left(\frac{n^2 \log\log n}{p \log^4 n}\right), \quad p \leq \omega. \tag{112}$$

Beweis. Zunächst ist wegen (82), (84) und (103)

$$(113)\qquad j^*(n) - j^{**}(n) = O\left(\int\limits_{\omega n^{-1}}^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{y^3}\right) = O(n^2\omega^{-2})$$

und wegen (83), (85), (103) und (102)

$$(114)\qquad \lambda_p^*(n) - \lambda_p^{**}(n) = O\left(\frac{n}{p}\int\limits_{\omega n^{-1}}^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{y^3}\right) = O\left(\frac{n^2\omega^{-1}}{p}\right).$$

Weiter sind nach (84), (85) und (77)

$$(115)\qquad j^{**}(n) = \sum_{\substack{1\leq \nu_i\leq n\\ i=1,2,3\\ \nu_1+\nu_2+\nu_3=n}} 1 = \sum_{\substack{1\leq \nu_1\leq n\\ 1\leq \mu\leq n\\ \nu_1+\mu=n}} (\mu-1) = \sum_{1\leq \mu\leq n-1} (\mu-1) = \frac{n^2}{2} + O(n),$$

$$(116)\qquad \lambda_p^{**}(n) = \sum_{\substack{1\leq \nu_i\leq n\\ i=1,2\\ 1\leq \nu_3\leq \frac{n}{p}\\ \nu_1+\nu_2+\nu_3 p=n}} 1 = \sum_{\substack{1\leq \nu_3\leq \frac{n}{p}\\ 1\leq \mu\leq n-1\\ \nu_3 p+\mu=n}} (\mu-1) = \sum_{\substack{1\leq \nu_3\leq \frac{n}{p}\\ 1\leq \mu\leq \frac{n-1}{p}\\ \nu_3=\mu}} (n-\mu p-1) = \frac{n^2}{2p} + O(n).$$

Nun folgen (110) und (111) aus (106), (107), (113) und (115), und (112) erhalten wir bei Beachtung von $p \leqq \omega$ aus (108), (114) und (116).

Hilfssatz 27. *Es ist*

$$\sum_{1\leq k\leq \omega} \frac{\mu(k)}{\varphi^3(k)} D_k(n) = O(1),$$

$$\sum_{2\leq k\leq \omega} \frac{\mu(k)}{\varphi^3(k)} D_k(n) \sum_{p\mid k} \frac{1}{p} = O(1),$$

$$\sum_{2\leq k\leq \omega} \left|\frac{\mu(k)}{\varphi^3(k)} D_k(n) \sum_{p\mid k} \frac{p-1}{p}\right| = O(1),$$

$$\sum_{k>\omega} \frac{\mu(k)}{\varphi^3(k)} D_k(n) = O(\omega^{-\frac{1}{2}}),$$

$$\sum_{k>\omega} \frac{\mu(k)}{\varphi^3(k)} D_k(n) \sum_{p\mid k} 1 = O(\omega^{-\frac{1}{2}}).$$

Beweis. Sämtliche Abschätzungen folgen unmittelbar aus (97), (66) und (60).

9. Wegen (69), (73), (74) und (86) gilt

$$(117)\qquad \gamma(n) = \int\limits_{\mathfrak{J}} \varrho^2(y,n)\,\sigma(y,n)\,e^{-2\pi i y n}dy$$
$$= \int\limits_{\mathfrak{M}} \varrho^2(y,n)\,\sigma(y,n)\,e^{-2\pi i y n}dy + \int\limits_{\mathfrak{m}} \varrho^2(y,n)\,\sigma(y,n)\,e^{-2\pi i y n}dy.$$

Nach der Schwarzschen Ungleichung haben wir bei Beachtung von Hilfssatz 21

$$\int\limits_{\mathfrak{m}} |\varrho(y,n)\,\sigma(y,n)|\,dy \leqq \sqrt{\int\limits_{\mathfrak{J}} |\varrho^2(y,n)|\,dy \int\limits_{\mathfrak{J}} |\sigma^2(y,n)|\,dy}$$
$$= O\left(\left(\frac{n}{\log n}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{n\log\log n}{\log n}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = O\left(\frac{n\log^{\frac{1}{2}}\log n}{\log n}\right)$$

und folglich mit Hilfssatz 18

$$(118)\qquad \left|\int\limits_{\mathfrak{m}} \varrho^2(y,n)\,\sigma(y,n)\,e^{-\pi i y n}dy\right| \leqq \operatorname*{Max}_{y\in\mathfrak{m}} |\varrho(y,n)| \int\limits_{\mathfrak{m}} |\varrho(y,n)\,\sigma(y,n)|\,dy$$
$$= O\left(n^2\log^{\frac{1}{2}}\log n\,\omega^{-\frac{6}{25}}\right).$$

Aus (87) bis (89) und (78) erhalten wir

$$(119)\qquad \int_{\mathfrak{M}} \varrho^2(y, n)\, \sigma(y, n)\, e^{-\pi i y n} dy = \sum_{1 \leq k \leq \omega} \sum_{\substack{1 \leq l \leq k \\ (l, k) = 1}} U_n(l, k),$$

denn die Teilintegrale auf der rechten Seite überschreiten die Grenzen von $\mathfrak{J}$ nicht und überlappen einander auch nicht, da für zwei Fareynachbarn $\frac{l}{k}$ und $\frac{l'}{k'}$ wegen (71)

$$\left(\frac{l'}{k'} - \omega n^{-1}\right) - \left(\frac{l}{k} + \omega n^{-1}\right) \geqq \omega^{-2} - 2\omega n^{-1} \geqq 0$$

gilt. Nach (117) bis (119) läuft nun alles auf die Bestimmung der $U_n(l, k)$ hinaus.

Wir haben

$$(120)\qquad \varrho\left(\frac{l}{k} + y, n\right) = \sum_{p \mid k} e^{2\pi i \left(\frac{l}{k} + y\right) p} + \sum_{\substack{1 \leq h \leq k \\ (h, k) = 1}} e^{\frac{2\pi i l h}{k}} \sum_{\substack{p \leq n \\ p \equiv h \,(\mathrm{mod}\, k)}} e^{2\pi i y p},$$

und hierin ist nach Hilfssatz 19 und (75)

$$(121)\qquad \sum_{\substack{p \leq n \\ p \equiv h \,(\mathrm{mod}\, k)}} e^{2\pi i y p} = \sum_{2 \leq \nu \leq n} (\pi_1(\nu; k, h) - \pi_1(\nu - 1; k, h))\, e^{2\pi i y \nu}$$

$$= \sum_{2 \leq \nu \leq n} \left(\frac{1}{\varphi(k)} \frac{1}{\log \nu} + \theta_1(\nu) - \theta_1(\nu - 1)\right) e^{2\pi i y \nu}$$

$$= \frac{1}{\varphi(k)} r_1(y, n) + \theta_1(n)\, e^{2\pi i y n} + (1 - e^{2\pi i y}) \sum_{2 \leq \nu \leq n-1} \theta_1(\nu)\, e^{2\pi i y \nu}$$

$$= \frac{1}{\varphi(k)} r_1(y, n) + O(n\omega^{-5}) \text{ für } |y| \leqq \omega n^{-1},\ 1 \leqq k \leqq \omega,\ (h; k) = 1.$$

Verwenden wir dies in (120), so erhalten wir wegen (96), (97) und (60)

$$(122)\qquad \varrho\left(\frac{l}{k} + y, n\right) = \frac{\mu(k)}{\varphi(k)} r_1(y, n) + O(n\omega^{-4}) \text{ für } |y| \leqq \omega n^{-1},\ 1 \leqq k \leqq \omega,\ (l, k) = 1.$$

Eine ähnliche Approximation auf $\mathfrak{M}$ wollen wir auch für $\sigma\left(\frac{l}{k} + y, n\right)$ durchführen. Nach (74) haben wir wegen (88) zunächst

$$(123)\qquad \sigma\left(\frac{l}{k} + y, n\right) = \sum_{1 \leq h \leq k} e^{\frac{2\pi i l h}{k}} \sum_{\substack{p_1 p_2 \leq n \\ p_1 < p_2 \\ p_1 p_2 \equiv h \,(\mathrm{mod}\, k)}} e^{2\pi i y p_1 p_2}$$

$$= \sum_{\substack{1 \leq h \leq k \\ (h, k) = 1}} e^{\frac{2\pi i l h}{k}} \sum_{\substack{p_1 p_2 \leq n \\ p_1 < p_2 \\ p_1 p_2 \equiv h \,(\mathrm{mod}\, k)}} e^{2\pi i y p_1 p_2} + \sum_{p \mid k} \sum_{\substack{1 \leq h \leq \frac{k}{p} \\ \left(h, \frac{k}{p}\right) = 1}} e^{\frac{2\pi i l h p}{k}} \sum_{\substack{p_1 \leq \frac{n}{p} \\ p_1 \equiv h \left(\mathrm{mod}\, \frac{k}{p}\right)}} e^{2\pi i y p p_1} + O(\omega^2).$$

Hierin ist wie bei (121)

$$\sum_{\substack{p_1 \leq \frac{n}{p} \\ p_1 \equiv h \left(\mathrm{mod}\, \frac{k}{p}\right)}} e^{2\pi i y p p_1} = \frac{1}{\varphi\left(\frac{k}{p}\right)} r_1\left(yp, \frac{n}{p}\right) + O\left(\frac{n}{p}\, \omega^{-5}\right) \text{ für } |y| \leqq \omega n^{-1},\ 1 \leqq k \leqq \omega,\ \left(h, \frac{k}{p}\right) = 1,\ p \mid k,$$

also mit (96) wegen $\sum_{p \mid k} \frac{1}{p^2} \leqq \sum_{p} \frac{1}{p^2} = O(1)$

$$(124)\qquad \sum_{p \mid k} \sum_{\substack{1 \leq h \leq \frac{k}{p} \\ \left(h, \frac{k}{p}\right) = 1}} e^{\frac{2\pi i l h p}{k}} \sum_{\substack{p_1 \leq \frac{n}{p} \\ p_1 \equiv h \left(\mathrm{mod}\, \frac{k}{p}\right)}} e^{2\pi i y p p_1} = \sum_{p \mid k} \frac{\mu\left(\frac{k}{p}\right)}{\varphi\left(\frac{k}{p}\right)} r_1\left(yp, \frac{n}{p}\right) + O(n\omega^{-4})$$

$$\text{für } |y| \leqq \omega n^{-1},\ 1 \leqq k \leqq \omega,\ (l, k) = 1.$$

Weiter ist mit Hilfssatz 21, (76) und (75)

$$\sum_{\substack{p_1p_2 \leqq n \\ p_1 < p_2 \\ p_1p_2 \equiv h \,(\mathrm{mod}\, k)}} e^{2\pi i y p_1 p_2} = \sum_{2 \leqq \nu \leqq n} (\pi_2(\nu; k, h) - \pi_2(\nu - 1; k, h))\, e^{2\pi i y \nu} = \frac{1}{\varphi(k)} s(y, n) + \frac{C}{\varphi(k)} r_1(y, n)$$

$$+ \sum_{0 \leqq m \leqq 100} d_0^{(1)}(m, k)\, m!\, \frac{1}{\varphi(k)} r_{m+1}(y, n) + \theta_2(n)\, e^{2\pi i y n} + (1 - e^{2\pi i y}) \sum_{2 \leqq \nu \leqq n-1} \theta_2(\nu)\, e^{2\pi i y \nu}$$

$$= \frac{1}{\varphi(k)} s(y, n) + \frac{C}{\varphi(k)} r_1(y, n) + \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{0 \leqq m \leqq 100} d_0^{(1)}(m, k)\, m!\, r_{m+1}(y, n) + O(n\omega^{-5})$$

$$\text{für } |y| \leqq \omega n^{-1},\ 1 \leqq k \leqq \omega,\ (h, k) = 1,$$

folglich mit (96) und (97)

$$(125) \qquad \sum_{\substack{1 \leqq h \leqq k \\ (h,k)=1}} e^{\frac{2\pi i l h}{k}} \sum_{\substack{p_1p_2 \leqq n \\ p_1 < p_2 \\ p_1p_2 \equiv h \,(\mathrm{mod}\, k)}} e^{2\pi i y p_1 p_2} = \frac{\mu(k)}{\varphi(k)} s(y, n) + C \frac{\mu(k)}{\varphi(k)} r_1(y, n)$$

$$+ \frac{\mu(k)}{\varphi(k)} \sum_{0 \leqq m \leqq 100} d_0^{(1)}(m, k)\, m!\, r_{m+1}(y, n) + O(n\omega^{-4})$$

$$\text{für } |y| \leqq \omega n^{-1},\ 1 \leqq k \leqq \omega,\ (l, k) = 1.$$

(123) bis (125) liefern uns bei Beachtung von (72)

$$(126) \qquad \sigma\left(\frac{l}{k} + y, n\right) = \frac{\mu(k)}{\varphi(k)} s(y, n) + C \frac{\mu(k)}{\varphi(k)} r_1(y, n)$$

$$+ \frac{\mu(k)}{\varphi(k)} \sum_{0 \leqq m \leqq 100} d_0^{(1)}(m, k)\, m!\, r_{m+1}(y, n) + \sum_{p \mid k} \frac{\mu\left(\frac{k}{p}\right)}{\varphi\left(\frac{k}{p}\right)} r_1\left(yp, \frac{n}{p}\right) + O(n\omega^{-4})$$

$$\text{für } |y| \leqq \omega n^{-1},\ 1 \leqq k \leqq \omega,\ (l, k) = 1.$$

Aus (122) folgt mit (98)

$$\varrho^2\left(\frac{l}{k} + y, n\right) = \frac{\mu^2(k)}{\varphi^2(k)} r_1^2(y, n) + O\left(\frac{n^2\omega^{-4}}{\varphi(k)}\right),$$

und dies liefert zusammen mit (126) wegen (98), (100) und (60)

$$(127) \qquad \varrho^2\left(\frac{l}{k} + y, n\right) \sigma\left(\frac{l}{k} + y, n\right) = \frac{\mu(k)}{\varphi^3(k)} r_1^2(y, n)\, s(y, n)$$

$$+ C \frac{\mu(k)}{\varphi^3(k)} r_1^3(y, n) + \frac{\mu(k)}{\varphi^3(k)} \sum_{0 \leqq m \leqq 100} d_0^{(1)}(m, k)\, m!\, r_1^2(y, n)\, r_{m+1}(y, n)$$

$$+ \frac{\mu^2(k)}{\varphi^2(k)} \sum_{p \mid k} \frac{\mu\left(\frac{k}{p}\right)}{\varphi\left(\frac{k}{p}\right)} r_1^2(y, n)\, r_1\left(yp, \frac{n}{p}\right) + O\left(\frac{n^3\omega^{-4}}{\varphi(k)}\right)$$

$$\text{für } |y| \leqq \omega n^{-1},\ 1 \leqq k \leqq \omega,\ (l, k) = 1.$$

Nun ist für $p \mid k$

$$(128) \qquad \mu^2(k) \frac{\mu\left(\frac{k}{p}\right)}{\varphi\left(\frac{k}{p}\right)} = -\frac{\mu(k)}{\varphi(k)} (p - 1);$$

denn ist k nicht quadratfrei, so verschwinden beide Seiten, und anderenfalls ist $\left(p, \frac{k}{p}\right) = 1$. Dann folgt

$$\mu^2(k)\frac{\mu\left(\frac{k}{p}\right)}{\varphi\left(\frac{k}{p}\right)} = \mu^2(k)\frac{(-\mu(p))\,\mu\left(\frac{k}{p}\right)\varphi(p)}{\varphi\left(\frac{k}{p}\right)\varphi(p)} = -\mu^2(k)\frac{\mu(k)}{\varphi(k)}\varphi(p) = -\frac{\mu(k)}{\varphi(k)}(p-1).$$

Integrieren wir (127) nach Multiplikation mit $e^{-2\pi i y n}$ über $-\omega n^{-1}\cdots\omega n^{-1}$, so ergibt sich nach (78) bis (81) mit (128)

$$e^{\frac{2\pi i l n}{k}}\,U_n(l,k) = \frac{\mu(k)}{\varphi^3(k)}\,j(n) + C\,\frac{\mu(k)}{\varphi^3(k)}\,j_1(n)$$

$$+\frac{\mu(k)}{\varphi^3(k)}\sum_{0\leq m\leq 100} d_0^{(1)}(m,k)\,m!\,j_{m+1}(n) - \frac{\mu(k)}{\varphi^3(k)}\sum_{p\,k}(p-1)\,\lambda_p(n) + O\left(\frac{n^2\omega^{-3}}{\varphi(k)}\right),$$

$$1\leq k\leq\omega,\ (l,k)=1.$$

Summieren wir wie in (119) vorgesehen, so erhalten wir hieraus wegen (90) und (95)

$$\int\limits_{\mathfrak{M}} \varrho^2(y,n)\,\sigma(y,n)\,e^{-2\pi i\mu n}\,dy = j(n)\sum_{1\leq k\leq\omega}\frac{\mu(k)}{\varphi^3(k)}D_k(n) \tag{129}$$

$$+Cj_1(n)\sum_{1\leq k\leq\omega}\frac{\mu(k)}{\varphi^3(k)}D_k(n) + \sum_{0\leq m\leq 100} m!\,j_{m+1}(n)\sum_{1\leq k\leq\omega}\frac{\mu(k)}{\varphi^3(k)}D_k(n)\,d_0^{(1)}(m,k)$$

$$-\sum_{2\leq k\leq\omega}\frac{\mu(k)}{\varphi^3(k)}D_k(n)\sum_{p\,k}(p-1)\,\lambda_p(n) + O(n^2\omega^{-2}).$$

Wegen Hilfssatz 23, (97) und (62) ist

$$\sum_{1\leq m\leq 100} m!\,j_{m+1}(n)\sum_{1\leq k\leq\omega}\frac{\mu(k)}{\varphi^3(k)}D_k(n)\,d_0^{(1)}(m,k) = O\left(\sum_{1\leq m\leq 100}\frac{n^2}{\log^{m+3}n}\right) = O\left(\frac{n^2}{\log^4 n}\right),$$

so daß aus (129) bei Beachtung von (117), (59), (118) und (72)

$$\gamma(n) = j(n)\sum_{1\leq k\leq\omega}\frac{\mu(k)}{\varphi^3(k)}D_k(n) + Cj_1(n)\sum_{1\leq k\leq\omega}\frac{\mu(k)}{\varphi^3(k)}D_k(n)$$

$$+j_1(n)\sum_{1\leq k\leq\omega}\frac{\mu(k)}{\varphi^3(k)}D_k(n)\left(B-C-\sum_{p\,k}\frac{1}{p}\right) - \sum_{2\leq k\leq\omega}\frac{\mu(k)}{\varphi^3(k)}D_k(n)\sum_{p\,k}(p-1)\,\lambda_p(n) + O\left(\frac{n^2}{\log^4 n}\right)$$

folgt, woraus wir mit Hilfssatz 26 bei Beachtung von Hilfssatz 27

$$\gamma(n) = \frac{n^2\log\log n}{2\log^3 n}\sum_{1\leq k\leq\omega}\frac{\mu(k)}{\varphi^3(k)}D_k(n)$$

$$+\frac{Bn^2}{2\log^3 n}\sum_{1\leq k\leq\omega}\frac{\mu(k)}{\varphi^3(k)}D_k(n) - \frac{n^2}{2\log^3 n}\sum_{2\leq k\leq\omega}\frac{\mu(k)}{\varphi^3(k)}D_k(n)\sum_{p\,k}\frac{1}{p}$$

$$-\frac{n^2}{2\log^3 n}\sum_{2\leq k\leq\omega}\frac{\mu(k)}{\varphi^3(k)}D_k(n)\sum_{p\,k}\frac{p-1}{p} + O\left(\frac{n^2\log\log n}{\log^4 n}\right)$$

$$=\frac{n^2(\log\log n+B)}{2\log^3 n}\sum_{1\leq k\leq\omega}\frac{\mu(k)}{\varphi^3(k)}D_k(n) - \frac{n^2}{2\log^3 n}\sum_{2\leq k\leq\omega}\frac{\mu(k)}{\varphi^3(k)}D_k(n)\sum_{p\,k}1$$

$$+O\left(\frac{n^2\log\log n}{\log^4 n}\right).$$

erhalten. Wegen Hilfssatz 27, (91), (92) und (72) folgt hieraus jetzt

$$\gamma(n) = \frac{n^2(\log\log n+B)}{2\log^3 n}\,\mathfrak{S}(n) + \frac{n^2}{2\log^3 n}\,\mathfrak{S}_1(n) + O\left(\frac{n^2\log\log n}{\log^4 n}\right). \tag{130}$$

Um noch die nötigen Kenntnisse über die Reihen $\mathfrak{S}(n)$ und $\mathfrak{S}_1(n)$ zu erhalten, bemerken wir, daß aus (91), (92), Hilfssatz 27 und Hilfssatz 20 folgt:

$$(131)\qquad \mathfrak{S}(n) = \prod_p \left(1 - \frac{D_p(n)}{\varphi^3(p)}\right) = \prod_{p \mid n}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{p \nmid n}\left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right)$$

und

$$(132)\qquad \mathfrak{S}_1(n) = -\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(mp)}{\varphi^3(mp)} D_{mp}(n) = \sum_p \frac{D_p(n)}{\varphi^3(p)} \sum_{\substack{m=1\\(m,p)=1}}^{\infty} \frac{\mu(m)}{\varphi^3(m)} D_m(n)$$

$$= \sum_{p \mid n} \frac{1}{(p-1)^2} \prod_{\substack{p_0 \mid n\\ p_0 \neq p}} \left(1 - \frac{1}{(p_0-1)^2}\right) \prod_{p_0 \nmid n}\left(1 + \frac{1}{(p_0-1)^3}\right)$$

$$- \sum_{p \nmid n} \frac{1}{(p-1)^3} \prod_{p_0 \mid n}\left(1 - \frac{1}{(p_0-1)^2}\right) \prod_{\substack{p_0 \nmid n\\ p_0 \neq p}}\left(1 + \frac{1}{(p_0-1)^3}\right).$$

Aus (131) erkennen wir

$$(133)\qquad \mathfrak{S}(n) = 0 \text{ für } n \equiv 0 \pmod 2,$$

da dann der erste Faktor von $\mathfrak{S}(n)$ verschwindet. Anderenfalls ist

$$(134)\qquad \mathfrak{S}(n) \geqq \prod_{p>2}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \geqq \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{6}{\pi^2} > 0, \quad n \equiv 1 \pmod 2.$$

Dagegen ist $\mathfrak{S}_1(n)$ für $n \equiv 0 \pmod 2$ von Null verschieden, da dann aus (132) folgt:

$$\mathfrak{S}_1(n) = \sum_{p \mid n} \frac{1}{(p-1)^2} \prod_{\substack{p_0 \mid n\\ p_0 \neq p}} \left(1 - \frac{1}{(p_0-1)^2}\right) \prod_{p_0 \nmid n}\left(1 + \frac{1}{(p_0-1)^3}\right)$$

$$= \prod_{2 < p_0 \mid n}\left(1 - \frac{1}{(p_0-1)^2}\right) \prod_{p_0 \nmid n}\left(1 + \frac{1}{(p_0-1)^3}\right),$$

also wie bei (134)

$$(135)\qquad \mathfrak{S}_1(n) \geqq \frac{6}{\pi^2} > 0 \text{ für } n \equiv 0 \pmod 2.$$

Aus (130) und (133) bis (135) erkennen wir, daß für jedes hinreichend große n die Lösungsanzahl $\gamma(n) > 0$ ist, und wir haben insgesamt den

Satz 2. *Es gibt eine Zahl n_0, so daß für jedes (ungerade oder gerade) $n \geqq n_0$ die Gleichung*

$$(136)\qquad p_1 + p_2 + p_3 p_4 = n$$

in Primzahlen p_i, $i = 1, 2, 3, 4$, $p_3 < p_4$, lösbar ist. Bezeichnet $\gamma(n)$ die Lösungsanzahl von (136), so gilt

$$\gamma(n) = \frac{n^2}{2 \log^3 n}\left((\log\log n + B)\,\mathfrak{S}(n) + \mathfrak{S}_1(n)\right) + O\left(\frac{n^2 \log\log n}{\log^4 n}\right).$$

Dabei sind $\mathfrak{S}(n)$ für $n \equiv 1 \pmod 2$ und $\mathfrak{S}_1(n)$ für $n \equiv 0 \pmod 2$ gleichmäßig in n positiv, während $\mathfrak{S}(n) = 0$ für $n \equiv 0 \pmod 2$ ist, und $B (= 0{,}26\ldots)$ bezeichnet die sog. Mertenssche Konstante aus der Entwicklung (57).

Eingegangen 12. Dezember 1952.

Zur integrallosen Darstellung reeller isotroper Kurven.

Von *Rahmat Ara* und *M. Pinl* in Dacca (Pakistan).

Die quadratische Maßbestimmung

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2 \tag{1}$$

des n-dimensionalen euklidischen Raumes R_n ist positiv definit (ihr Trägheitsindex τ hat den Wert $\tau = 0$). Die isotropen Kurven des euklidischen R_n, d. h. die Nullinien der Maßbestimmung (1) sind daher notwendig alle imaginär. Demgegenüber gibt es in pseudoeuklidischen Räumen mit indefiniter Maßbestimmung ($\tau = 1, 2, \ldots, n-1$) auch reelle isotrope Kurven. Jede dieser indefiniten Maßbestimmungen geht aus (1) durch eine passende imaginäre Kollineation der kartesischen Punktkoordinaten hervor. Man sollte erwarten, daß durch solche Kollineationen auch die bekannten expliziten Darstellungen der isotropen imaginären Kurven in solche entsprechender reeller isotroper Kurven übergehen. Demgegenüber gibt es jedoch spezifisch imaginäre explizite Darstellungen, die auch in pseudoeuklidischen Räumen wieder auf imaginäre isotrope Kurven führen. Wir untersuchen im folgenden die Fälle $n = 3$, $\tau = 1$; $n = 4$, $\tau = 1$ und $n = 4$, $\tau = 2$. Im letzten dieser Fälle lassen sich zwei explizite Darstellungen reeller isotroper Kurven gewinnen, deren eine durch die Lösung eines dem Mongeschen äquivalenten Pfaffschen Problems gewonnen wird.

§ 1. $n = 3$, $\tau = 1$.

Wir wählen eine beliebige reelle Funktion $f(t)$ des reellen Parameters t, deren dritte Ableitung $f'''(t)$ nicht identisch verschwindet und setzen:

$$\boxed{x_1 = f - tf' - \frac{1-t^2}{2} f'', \quad x_2 = -f' + tf'', \quad x_3 = f - tf' + \frac{1+t^2}{2} f''} . \tag{2}$$

Dann gilt:

$$x_1' = -\frac{1-t^2}{2} f''', \quad x_2' = tf''', \quad x_3' = \frac{1+t^2}{2} f''' ; \quad x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 = 0 \; \{t, f\}.$$

Die Gleichungen (2) sind also eine integrallose Darstellung der reellen isotropen Kurven des pseudoeuklidischen Raumes R_3 und erfassen alle reellen Integralkurven des Mongeschen Problems

$$dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2 = 0 \tag{3}$$

mit Ausnahme der diskriminierenden Lösungen[1]) des Problems. Durch die imaginäre Kollineation

$$y_1 = ix_1, \quad y_2 = x_3, \quad y_3 = ix_2, \quad i = \sqrt{-1}$$

[1]) Vgl. *D. Hilbert*, Math. Ann. **73** (1913), 95–108; *W. Gross*, Math. Ann. **73** (1913), 109–172; **76** (1915), 244–283.

geht die explizite Darstellung (2) unmittelbar in die bekannte integrallose Darstellung der isotropen Kurven des euklidischen R_3 über[2]). Die Formeln (2) können jedoch auch im euklidischen R_3 gedeutet werden. Zu diesem Zweck betrachten wir im R_3 den festen Einheitsvektor $\mathfrak{e}$ und den Winkel ϑ zwischen $\mathfrak{e}$ und dem Tangentenvektor $\mathfrak{x}'(t)$ einer Kurve $\mathfrak{x}(t)$. Ist $\mathfrak{x}(t)$ Lösung von (3), jedoch $\tau = 0$, so ist $\mathfrak{x}$ keine isotrope Kurve und ihre Tangentenvektoren können als Einheitsvektoren $\mathfrak{t}$ angesehen werden. Nun sei ϑ fest und $\mathfrak{e}$ ein Einheitsvektor in der positiven x_3-Achse. Dann gilt

$$\mathfrak{e}\mathfrak{t} = \frac{x_3'}{\sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2}} = \cos\vartheta, \quad x_1'^2 + x_2'^2 = \operatorname{tg}^2\vartheta \cdot x_3'^2.$$

Für $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ erhalten wir wieder $x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 = 0$. Damit ist gezeigt:

Die reellen isotropen Kurven (2) *des pseudoeuklidischen* R_3 ($\tau = 1$) *sind identisch mit den Böschungslinien der Steigung* $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ *des gewöhnlichen euklidischen* R_3 ($\tau = 0$).

§ 2. $n = 4, \tau = 1$.

Beschränkt man sich auf die integrallose Darstellung der isotropen Kurven des euklidischen R_4 als Gratlinien geeigneter einparametriger Scharen linearer Unterräume des R_4, so ergeben sich zwei verschiedene Typen, je nachdem, ob es sich um die Gratlinie einer einparametrigen R_3-Schar oder um die Gratlinie einer einparametrigen R_2-Schar handelt[3]). Die Gratlinien ergeben sich durch Auflösung der in x_1, x_2, x_3, x_4 linearen inhomogenen Systeme

$$(4) \quad \mathfrak{e}(t)\,\mathfrak{x} + f(t) = 0, \quad \mathfrak{e}'(t)\,\mathfrak{x} + f'(t) = 0, \quad \mathfrak{e}''(t)\,\mathfrak{x} + f''(t) = 0, \quad \mathfrak{e}'''(t)\,\mathfrak{x} + f'''(t) = 0$$

bzw.

$$(5) \quad \mathfrak{e}_1(t)\,\mathfrak{x} + f(t) = 0, \quad \mathfrak{e}_2(t)\,\mathfrak{x} + g(t) = 0, \quad \mathfrak{e}_1'(t)\,\mathfrak{x} + f'(t) = 0, \quad \mathfrak{e}_2'(t)\,\mathfrak{x} + g'(t) = 0.$$

Dabei bedeuten $\mathfrak{x}(t)$ den Kurvenortsvektor, $\mathfrak{e}_1(t), \mathfrak{e}_2(t)$ die Stellungsvektoren der einparametrigen Ebenenschar, $\mathfrak{e}(t)$ den Stellungsvektor der einparametrigen R_3-Schar, $f(t)$ und $g(t)$ analytische Funktionen des komplexen Parameters t. Für das System (4) muß $(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}', \mathfrak{e}'', \mathfrak{e}''') \neq 0$ vorausgesetzt werden, für (5) entsprechend $(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_1', \mathfrak{e}_2') \neq 0$. Damit die aus (4) bzw. (5) hervorgehenden Gratlinien isotrope Kurven sind, ist notwendig und hinreichend[4])

$$(6) \quad [\mathfrak{e}, \mathfrak{e}', \mathfrak{e}'']^2 = 0, \ (\mathfrak{e}, \mathfrak{e}', \mathfrak{e}'', \mathfrak{e}''') \not\equiv 0, \ \mathfrak{e}'^2 \not\equiv 0, \ \{t\}, \qquad (\text{Typus } (3, 3)),$$

$$(7) \quad \mathfrak{e}_1^2 = \mathfrak{e}_2^2 = \mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2 = 0, \ (\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_1', \mathfrak{e}_2') \not\equiv 0, \ \{t\}, \qquad (\text{Typus } (2, 1)).$$

Versuchen wir jetzt diese Methoden expliziter Integration (3, 3) und (2, 1) auf den einfach pseudoeuklidischen $R_4(\tau = 1)$ zu übertragen, um insbesondere in diesem reelle isotrope Kurven zu gewinnen! Wir beginnen mit (3, 3) und setzen:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{e} &= \{\ \cos t, \ \sin t, \operatorname{Cos} t, \operatorname{Sin} t\}, & \mathfrak{e}^2 &= \cos^2 t + \sin^2 t + \operatorname{Cos}^2 t - \operatorname{Sin}^2 t = 2,\\
\mathfrak{e}' &= \{-\sin t, \ \cos t, \operatorname{Sin} t, \operatorname{Cos} t\}, & \mathfrak{e}'^2 &= \sin^2 t + \cos^2 t + \operatorname{Sin}^2 t - \operatorname{Cos}^2 t = 0,\\
\mathfrak{e}'' &= \{-\cos t, -\sin t, \operatorname{Cos} t, \operatorname{Sin} t\}, & \mathfrak{e}''^2 &= \cos^2 t + \sin^2 t + \operatorname{Cos}^2 t - \operatorname{Sin}^2 t = 2;
\end{aligned}$$

$$[\mathfrak{e}, \mathfrak{e}', \mathfrak{e}'']^2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \mathfrak{e}''' = \{\sin t, -\cos t, \operatorname{Sin} t, \operatorname{Cos} t\}, \quad (\mathfrak{e}, \mathfrak{e}', \mathfrak{e}'', \mathfrak{e}''') = 4.$$

---

[2]) Vgl. *W. Blaschke*, Differentialgeometrie I, §§ 22, 23, Berlin Springer 1930.

[3]) Vgl. *M. Pinl*, Monatshefte für Mathematik **49** (1940), 261–278; Math. Ann. **121** (1949), 1–20

[4]) Vgl. [3]), Math. Ann. **121** (1949), S. 9–11.

Damit sind die Bedingungen (6) erfüllt und die Auflösung des Systems (4) ergibt:

$$(8)\quad \boxed{\begin{aligned} x_1 &= -\tfrac{1}{2}[(f-f'')\cos t-(f'-f''')\sin t], & x_2 &= -\tfrac{1}{2}[(f'-f''')\cos t+(f-f'')\sin t],\\ x_3 &= -\tfrac{1}{2}[(f+f'')\operatorname{Cos} t-(f'+f''')\operatorname{Sin} t], & x_4 &= -\tfrac{1}{2}[(f'+f''')\operatorname{Cos} t-(f+f'')\operatorname{Sin} t]. \end{aligned}}$$

Die Formeln (8) *geben eine integrallose Darstellung einer Klasse reeller isotroper Kurven des vierdimensionalen einfach pseudoeuklidischen Raumes, die von einer zum mindesten viermal differenzierbaren, mit f^{IV} nicht identischen, sonst willkürlichen reellen Funktion $f(t)$ des Kurvenparameters t abhängt. Diese Kurven sind identisch mit reellen Böschungslinien der Steigung $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ des gewöhnlichen vierdimensionalen euklidischen Raumes.*

Indessen sind die Kurven (8) nicht die allgemeinsten Integralkurven des Mongeschen Problems

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2 = 0,$$

da dieses zweifach unterbestimmt ist und seine allgemeinen Lösungen daher von zwei willkürlichen Funktionen abhängen. Offensichtlich wird eine dieser willkürlichen Funktionen durch den im vorhergehenden verwendeten Ansatz $\mathfrak{e} = \{\cos t, \sin t, \operatorname{Cos} t, \operatorname{Sin} t\}$ verschluckt. Um dies zu vermeiden, muß die Bedingung $[\mathfrak{e}, \mathfrak{e}', \mathfrak{e}'']^2 = 0$ aus (6) selbst als Mongesches Problem aufgefaßt und mit mindestens einer willkürlich bleibenden Funktion gelöst werden. Damit ist man aber auf ein komplizierteres Problem geführt worden als von Anfang an vorliegt.

Wenden wir uns jetzt zum Typus (2, 1) der integrallosen Darstellungen im R_4. Die einparametrige Ebenenschar der Darstellung (5) besteht für jeden Wert des Trägheitsindex τ aus totalisotropen Ebenen. Ihre uneigentlichen Spuren liegen auf den uneigentlichen quadratischen Maßflächen der entsprechenden euklidischen und pseudoeuklidischen R_4. Sind $x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ homogene kartesische Koordinaten, so sind diese absoluten Maßflächen durch:

$$\begin{aligned} &(a) && x_0 = 0,\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0,\ \tau = 0,\\ &(b) && x_0 = 0,\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0,\ \tau = 1,\\ &(c) && x_0 = 0,\ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0,\ \tau = 2, \end{aligned}$$

gegeben. Im Falle (a) sind die uneigentlichen Spuren der totalisotropen Ebenenschar die Erzeugenden einer nullteiligen Fläche zweiter Ordnung, im Falle (b) die einer ovalen Fläche zweiter Ordnung und im Falle (c) die einer ringförmigen Fläche zweiter Ordnung. Nur in diesem letzten Falle erhält man reelle Erzeugende, und daher mißlingt der Versuch aus der für $\tau = 0$ bekannten integrallosen Darstellung (5) durch imaginäre Kollineation eine Darstellung reeller isotroper Kurven für den Fall $\tau = 1$ zu gewinnen, wie das im R_3 möglich ist.

§ 3. $n = 4$, $\tau = 2$; erste Methode.

Nach den Ergebnissen des vorhergehenden Paragraphen kann man erwarten, daß die integrallose Darstellung vom Typus (2, 1) im Falle $\tau = 2$ auf die Darstellung reeller Kurven führt. Gehen wir etwa von der rationalen im Typus (2, 1) enthaltenen Darstellung

$$(9)\quad \begin{cases} x_1^* = -\dfrac{i}{2}(t^2-1)\,\varphi^{*\prime} + \dfrac{1}{2}(t^2+1)\,\psi^{*\prime}, & x_2^* = -\dfrac{1}{2}(t^2+1)\,\varphi^{*\prime} - \dfrac{i}{2}(t^2-1)\,\psi^{*\prime},\\ x_3^* = \varphi^* + it\psi^{*\prime} & ,\ x_4^* = -it\varphi^{*\prime} + \psi^*,\ i = \sqrt{-1} \end{cases}$$

der isotropen Kurven des gewöhnlichen euklidischen R_4 aus $(\tau = 0)$[5]), so verwandelt die imaginäre Kollineation

$$x_1 = x_3^*,\ x_2 = x_2^*,\ x_3 = i x_1^*,\ x_4 = i x_4^*\ \ (\varphi^* = \varphi,\ \psi^* = i\psi)$$

die Darstellung (9) in die Darstellung

$$(10)\quad \boxed{\begin{array}{ll} x_1 = \varphi - t\psi' & ,\ x_2 = -\tfrac{1}{2}(t^2+1)\varphi' + \tfrac{1}{2}(t^2-1)\psi' \\ x_3 = \tfrac{1}{2}(t^2-1)\varphi' - \tfrac{1}{2}(t^2+1)\psi',\ x_4 = t\varphi' - \psi. & \end{array}}$$

Die Funktionen (10) genügen der Mongeschen Differentialgleichung

$$x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 - x_4'^2 = 0$$

identisch in t, φ und ψ. Das bedeutet:

Die Formeln (10) *sind eine integrallose Darstellung der reellen isotropen Kurven des vierdimensionalen zweifach pseudoeuklidischen Raumes, die von zwei zum mindesten zweimal differenzierbaren sonst willkürlichen Funktionen φ und ψ des reellen Kurvenparameters t abhängt. Die Formeln* (10) *können auch als eine explizite Darstellung der Böschungslinien der Steigung $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ in einem einfach pseudoeuklidischen vierdimensionalen Raum gedeutet werden.*

§ 4. $n = 4$, $\tau = 2$; zweite Methode.

Wir betrachten die vier Pfaffschen Formen:

$$\Phi = dx_1 + dx_3,\ \Psi = dx_1 - dx_3,\ X = -(dx_2 + dx_4),\ \Omega = dx_2 - dx_4$$

und die Mongesche Gleichung

$$(11)\qquad dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2 - dx_4^2 = \Phi\Psi - X\Omega = \begin{vmatrix} \Phi & X \\ \Omega & \Psi \end{vmatrix} = 0.$$

Die Determinante (11) verschwindet für proportionale Zeilen und Kolonnen. Damit ergibt sich das zu (11) äquivalente Pfaffsche System[6]) S:

$$(12)\qquad S:\ \boxed{\begin{array}{l} \omega_1 = \quad \Phi - \varrho\Omega = dx_1 + dx_3 - \varrho(dx_2 - dx_4) = 0, \\ \omega_2 = -X + \varrho\Psi = dx_2 + dx_4 + \varrho(dx_1 - dx_3) = 0. \end{array}}$$

Je nach der Beschaffenheit des Proportionalitätsfaktors $\varrho = \varrho(x_1, x_2, x_3, x_4)$ kann das System S in neuen Veränderlichen z_1, z_2, z_3, z_4 auf eine der folgenden drei kanonischen Formen gebracht werden[7]):

(I) $dz_2 - z_3 dz_1 = 0,\ dz_3 - z_4 dz_1 = 0$; (II) $dz_1 = 0,\ dz_3 - z_4 dz_2 = 0$; (III) $dz_1 = 0,\ dz_2 = 0$.

Die letzte dieser drei kanonischen Formen entspricht dem sogenannten vollständig integrablen Fall[8]), dessen Lösungen durch die Integralflächen $z_1 = \text{const.}$, $z_2 = \text{const.}$ gegeben sind. Dieser Fall tritt offenbar ein, wenn $\varrho = \text{const.}\ (\neq 0)$ ist, wie die Relationen

$$(13)\quad d(x_1 + x_3 - \varrho x_2 + \varrho x_4) = dz_1 = 0,\ d(x_2 + x_4 + \varrho x_1 - \varrho x_3) = dz_2 = 0$$

unmittelbar erkennen lassen. Aber diese Bedingung ist auch notwendig. Denn ist das Funktionenpaar $x_3(x_1, x_2)$, $x_4(x_1, x_2)$ eine Lösung des Pfaffschen Systems (12), so ver-

---

[5]) Vgl. [3]), Monatshefte **49** (1940), S. 266.

[6]) Vgl. *J. Lense*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung **35** (1926), 280–294.

[7]) Vgl. *E. Goursat*, Leçons sur le problème de Pfaff, Paris J. Hermann, 1922, 307–310.

[8]) Vgl. [6]), S. 287.

schwinden dessen linke Seiten identisch in dx_1 und dx_2, wenn diese Funktionen in S eingetragen werden. Das führt auf vier Bedingungen für die Ableitungen $\frac{\partial x_3}{\partial x_1}, \frac{\partial x_3}{\partial x_2}, \frac{\partial x_4}{\partial x_1}, \frac{\partial x_4}{\partial x_2}$. Werden diese Ableitungen durch die Integrabilitätsbedingungen $\frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_2 \partial x_1}$ und $\frac{\partial^2 x_4}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 x_4}{\partial x_2 \partial x_1}$ eliminiert, so ergeben sich zwei lineare homogene Bedingungen mit nichtverschwindender Determinante für die partiellen Ableitungen ϱ_{x_1} und ϱ_{x_2} und daher $\varrho_{x_1} = \varrho_{x_2} = 0$. Da nun S vollständig integrabel sein soll, müssen die bilinearen Kovarianten des Systems S für alle Integrallinienelemente verschwinden[9]). Damit ergeben sich aber zwei weitere lineare homogene Bedingungen für die Ableitungen ϱ_{x_3} und ϱ_{x_4}, deren Determinante Δ eine Funktion von ϱ allein ist, $\Delta = \Delta(\varrho)$. Für $\Delta(\varrho) = 0$ ergibt sich $\varrho = \text{const.} \neq 0$. Ist aber $\Delta(\varrho) \neq 0$, so ist notwendig $\varrho_{x_3} = \varrho_{x_4} = 0$ und also wegen $\varrho_{x_1} = \varrho_{x_2} = 0$ wiederum $\varrho = \text{const.}$ Aus (13) ergeben sich mit reellen Konstanten ϱ, c_1, c_2 die totalisotropen reellen Ebenen

$$x_1 + x_3 - \varrho x_2 - \varrho x_4 = c_1, \quad x_2 + x_4 - \varrho x_1 - \varrho x_3 = 0$$

des zweifach pseudoeuklidischen R_4, die man auch als Böschungsebenen eines einfach pseudoeuklidischen R_4 ansehen kann. Da jede Kurve auf diesen Ebenen Integralkurve unseres Problems ist, gilt:

Der zweifach pseudoeuklidische vierdimensionale Raum enthält geschlossene reelle isotrope Kurven, die auch als geschlossene Böschungslinien der Steigung $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ eines einfach pseudoeuklidischen R_4 aufgefaßt werden können.

In den kanonischen Fällen (I) und (II) sind die Integrale des Pfaffschen Systems S Kurven. Für (I) ergibt sich die explizite Darstellung

$$z_1 = t, \; z_2 = f(t), \; z_3 = f'(t), \; z_4 = f''(t).$$

Für (II) ergibt sich

$$z_1 = C, \; z_2 = t, \; z_3 = f(t), \; z_4 = f'(t)$$

mit einer mindestens drei- bzw. zweimal differenzierbaren, sonst willkürlichen reellen Funktion $f(t)$ des reellen Kurvenparameters t. Um für beide Fälle Beispiele zu gewinnen, empfiehlt sich die Transformation

$$y_1 = x_1 + x_3, \; y_2 = x_1 - x_3, \; y_3 = x_2 + x_4, \; y_4 = x_2 - x_4, \; \frac{\partial(y_1, y_2, y_3, y_4)}{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4)} = -4 \neq 0.$$

In den Veränderlichen y_1, y_2, y_3, y_4 entsteht aus dem Pfaffschen System (12) das neue Pfaffsche System

$$dy_3 + \varrho\, dy_2 = 0, \; dy_4 - \frac{1}{\varrho}\, dy_1 = 0. \tag{14}$$

Nun wählen wir $\varrho = \frac{-y_3}{y_1 + y_2}$ und erhalten aus (14) durch die weitere Transformation

$$y_1 = z_3, \; y_2 = z_1 z_4 - z_3, \; y_3 = z_4, \; y_4 = -z_1 z_3 + z_2, \; \frac{\partial(y_1, y_2, y_3, y_4)}{\partial(z_1, z_2, z_3, z_4)} = -z_4 \neq 0$$

das kanonische System (I) und damit (nach zweimaliger Rücktransformation) die integrallose Darstellung:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= \frac{t}{2} f'' \quad , & x_2 &= \frac{1}{2}(f - tf' + f'') \\ x_3 &= \frac{1}{2}(2f' - tf''), & x_4 &= \frac{1}{2}(f'' + tf' - f) \end{aligned}}, \quad x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 - x_4'^2 = 0 \; \{t, f\}.$$

[9]) Vgl. [7]), S. 267.

Wählen wir jedoch $\varrho = -y_1$, so entsteht aus (14) durch die Transformation

$$y_1^* = \lg y_1,\ y_2^* = y_2,\ y_3^* = y_3,\ y_4^* = y_4,\ \frac{\partial(y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*)}{\partial(y_1, y_2, y_3, y_4)} = \frac{1}{y_1} \neq 0$$

das Pfaffsche System

$$dy_3^* - e^{y_1^*} dy_2^* = 0,\quad dy_4^* + dy_1^* = 0$$

und aus diesem durch die weitere Transformation

$$z_1 = y_1^* + y_4^*,\ z_2 = y_2^*,\ z_3 = y_3^*,\ z_4 = e^{y_1^*},\ \frac{\partial(z_1, z_2, z_3, z_4)}{\partial(y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*)} = -e^{y_1^*} \neq 0$$

das kanonische System (II) und damit (nach dreimaliger Rücktransformation) die integrallose Darstellung:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{2}(t + f'),\ x_2 = \frac{1}{2}(C + f - \lg f') \\ x_3 = \frac{1}{2}(f' - t),\ x_4 = \frac{1}{2}(f - C + \lg f') \end{array}},\quad x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 - x_4'^2 = 0\ \{t, f\}.$$

Wie aus dem Vorhergehenden ersichtlich ist, führt die Integration des dem Mongeschen Problem zugeordneten Pfaffschen Systems nur im Falle $\tau = 2$ zu reellen Integralkurven. Die Verhältnisse liegen in dieser Hinsicht ähnlich wie für den Darstellungstypus (2, 1) in § 3. Die allgemeinen Lösungen hängen für die kanonischen Fälle (I) und (II) wiederum von zwei willkürlichen reellen Funktionen ab, da ja außer Differenzierbarkeitsannahmen hinsichtlich $f(t)$ auch von ϱ nur $\varrho \neq 0$ verlangt wird.

Dacca, Pakistan, im November 1952.

Eingegangen 27. Dezember 1952.

Über die Darstellung natürlicher Zahlen als Summen von Primzahlen aus gegebenen Restklassen und Quadraten mit gegebenen Koeffizienten. I.

Resultate für genügend große Zahlen.

Von *Achim Zulauf* in Mainz.

Vorwort.

Gegenstand der folgenden Untersuchungen ist die Frage, ob und, wenn ja, auf wieviele Arten eine natürliche Zahl n in der Form

$$n = p_1 + p_2 + \cdots + p_s + b_1 g_1^2 + b_2 g_2^2 + \cdots + b_t g_t^2$$
$$\text{mit } p_\sigma \equiv a_\sigma \pmod{K_\sigma}$$

dargestellt werden kann. Dabei bedeuten die p_σ ungerade Primzahlen und die g_τ ganze Zahlen. s, t sind beliebig aber fest vorgegebene nicht-negative ganze Zahlen, sowie die a_σ, K_σ, b_τ beliebig aber fest vorgegebene natürliche Zahlen, a_σ jeweils prim zu K_σ.

In der vorliegenden Abhandlung wird (Hauptsatz 1) die Beantwortung der gestellten Frage im Falle $s + \frac{t}{2} > 2$ auf die Diskussion einer sog. singulären Reihe zurückgeführt, die in Teil II dieser Untersuchungen ausführlich behandelt wird. Das im Spezialfall $K_1 = \cdots = K_s = b_1 = \cdots = b_t = 1$ aus dem Hauptsatz folgende Resultat (Satz 2) ist bereits bekannt. Neu ist indessen (neben der Verallgemeinerung auf beliebige K_σ, a_σ, b_τ) für das betrachtete Problem die Verwendung der klassischen Beweismethode mit den Hilfsmitteln von Ju. V. Linnik.

Einleitung.

Zur Erläuterung der Schlußbemerkung im Vorwort soll im folgenden ein kurzer Überblick über die bisherige Entwicklung des Problems gegeben werden.

Der Fall $s + \frac{t}{2} \leqq 2$ muß leider immer noch eine Sonderstellung einnehmen; es wird daher hier nur $s + \frac{t}{2} > 2$ betrachtet, während der Sonderfall erst in Teil III dieser Untersuchungen in Angriff genommen wird. Ferner soll $s > 0$ und (wenigstens in der Einleitung) $t > 0$ vorausgesetzt werden; denn der Fall $s = 0$ ist durch die Arbeiten von Hardy [11] und Kloosterman [5] vollständig behandelt, und zum Falle $t = 0$ ist in der Einleitung zu meiner Abhandlung [3] schon das Nötige gesagt.

Die Bestimmung der Lösungsanzahl $\mathsf{N}^*_{s,t}(n)$ von

$$n = p_1 + \cdots + p_s + g_t^2 + \cdots + g_t^2 \left(s + \frac{t}{2} > 2;\ s > 0;\ t > 0\right)$$

(das ist der im Vorwort genannte Spezialfall) wurde zuerst 1929 von Frl. Stanley [8] durchgeführt, deren Resultat jedoch von einer noch heute unbewiesenen Hypothese über die Nullstellenverteilung der Dirichletschen L-Funktionen (erweiterte Riemannsche Vermutung) abhängt. Frl. Stanley ging nach der klassischen Methode von Hardy und Littlewood vor (siehe [12] und die dort angegebene Literatur), die nur die analytischen Hilfsmittel der klassischen Riemann-Hadamardschen Primzahltheorie (L-Funktionen und Konturintegration) und der klassischen Theorie der elliptischen Funktionen benutzt.

Die Stanleyschen Resultate wurden inzwischen 1941 von Halberstam [13] auf gesicherter Grundlage bewiesen und zwar nach der neuen Vinogradovschen Methode (vgl. [14]), die mit endlichen Exponentialsummen arbeitet. Halberstams Abhandlung basiert auf den Arbeiten von Vinogradov[1]) und (vor allem) von Estermann[2]). Vor Halberstam hatte bereits Walfisz ([18] und [19]) den weniger interessanten Fall $s \geqq 1$, $t \geqq 5$ durch Induktion nach s von dem Hardyschen Resultat [11] für $\mathsf{N}^*_{0,t}$ ausgehend gelöst, während $\mathsf{N}^*_{1,4}$ von Chowla [20] behandelt worden war.

Die Arbeiten von Halberstam, Vinogradov, Chowla und Walfisz stützen sich auf Sätze, in denen die Anzahlfunktion $\pi(x; k, l)$ der Primzahlen $p \leqq x$, $p \equiv l \pmod{k}$ gleichmäßig in x und k approximiert wird; der schärfste derartige Satz, der auch zugleich das beste Restglied liefert, ist der von Page-Siegel-Walfisz (siehe [19]).

Die klassische Methode vermeidet den Umweg über explizite Aussagen für $\pi(x; k, l)$ und führt die Untersuchung von $\mathsf{N}^*_{s,t}$, soweit sie die Primzahlsummanden betrifft, direkt auf die Theorie der Nullstellenverteilung der L-Funktionen zurück, auf der ja auch die Primzahlsätze basieren. Zudem ist diese Methode einheitlicher in der Natur ihrer Hilfsmittel als die Vinogradovsche. Es scheint mir daher ein Fortschritt zu sein, daß die Untersuchungen Linniks es ermöglichen, auch ohne die erweiterte Riemannsche Vermutung mit der klassischen Methode ans Ziel zu kommen. Linnik bemerkte nämlich (vgl. [21]), daß für viele mit jener Vermutung in Zusammenhang gebrachte Primzahlprobleme eine Aussage über die Nullstellendichte der L-Funktionen im kritischen Streifen ausreicht, die er inzwischen beweisen konnte [22]. Auf diese Weise wurde u. a. von Linnik [23] und Čudakov [24] der Goldbach-Vinogradovsche Satz neu bewiesen.

Die folgende Abhandlung enthält einen neuen Beweis des Satzes von Halberstam [13] nach dieser Linnikschen Variante der klassischen Methode und zugleich die im Vorwort genannte Verallgemeinerung. Die Untersuchungen Linniks sind dabei in einem Hilfssatz verarbeitet, den ich in einer früheren Arbeit [3] bewiesen habe und von dort übernehme.

§ 1. Voraussetzungen und Bezeichnungen.

1. 1. Es seien $s \geqq 1$ und $t \geqq 0$ zwei beliebig aber fest vorgegebene ganze Zahlen, die der Bedingung

$$\omega = s + \frac{t}{2} > 2 \tag{1. 1. 1}$$

genügen.

[1]) Satz von Goldbach-Vinogradov über $\mathsf{N}^*_{3,0}$, siehe [15] und [16].

[2]) Bestimmung von $\mathsf{N}^*_{2,1}$, siehe [17].

1. 2. Es seien $K_1, \ldots, K_s$ s beliebig aber fest vorgegebene natürliche Zahlen. Es seien $a_1, \ldots, a_s$ beliebig aber fest vorgegebene prime Reste beziehentlich modulo $K_1, \ldots, K_s$; also $(a_\sigma, K_\sigma) = 1$. Es seien $b_1, \ldots, b_t$ t beliebig aber fest vorgegebene natürliche Zahlen.

1. 3. Es bedeuten stets $p_1, \ldots, p_s$ ungerade Primzahlen, die beziehentlich $\equiv a_1 \pmod{K_1}, \ldots, \equiv a_s \pmod{K_s}$ sind. Es bedeuten stets $g_1, \ldots, g_t$ ganze Zahlen.

Es bedeutet stets n eine beliebige genügend große natürliche Zahl.

1. 4. Summen und Produkte über σ bzw. τ sind, wo nicht andere Grenzen angegeben, stets von 1 bis s bzw. t zu erstrecken.

Summen über p_σ sind stets über alle ungeraden Primzahlen zu erstrecken, die $\equiv a_\sigma \pmod{K_\sigma}$ sind.

In $\overset{(n)}{\sum}$ ist stets über alle verschiedenen Wertesätze $p_1, \ldots, p_s, g_1, \ldots, g_t$ zu summieren, die der Gleichung

$$n = \sum_\sigma p_\sigma + \sum_\tau b_\tau g_\tau^2 \tag{1. 4. 1}$$

genügen.

1. 5. Es sei $\mathsf{N}(n)$ die Lösungsanzahl von (**1. 4.** 1), also

$$\mathsf{N}(n) = \overset{(n)}{\sum} 1.$$

Ferner sei

$$\nu(n) = \overset{(n)}{\sum} \prod_\sigma \log p_\sigma.$$

1. 6. Es sei

$$F_\sigma(w) = \varphi(K_\sigma) \sum_{p_\sigma} (\log p_\sigma)\, w^{p_\sigma} \qquad (|w| < 1).$$

Es sei $\vartheta_3(v \mid \eta)$ die aus der Theorie der elliptischen Funktionen bekannte Funktion, die für $\mathfrak{Im}\, \eta > 0$ durch die absolut konvergenten Reihen

$$\vartheta_3(v \mid \eta) = \sum_{g=-\infty}^{+\infty} \exp(\pi i \eta g^2) \exp(2\pi i v g) = 1 + 2 \sum_{g=1}^{\infty} \exp(\pi i \eta g^2) \cos(2\pi v g)$$

dargestellt wird[3]). Alsdann sei

$$\vartheta_\tau(w) = \left(\frac{b_\tau}{\pi}\right)^{1/2} \cdot \vartheta_3\left(0 \,\middle|\, \frac{b_\tau}{\pi i} \log w\right) = \left(\frac{b_\tau}{\pi}\right)^{1/2} \cdot \sum_{g_\tau=-\infty}^{+\infty} w^{b_\tau g_\tau^2} \qquad (|w| < 1).$$

1. 7. Es sei A' eine beliebig aber fest vorgegebene positive Zahl. Es sei $A = 2A' + 4(s+2)$; $A_1 = 4A + 38$ (A, A_1 also fest vorgegeben).

1. 8. Es sei $r = r(n) = \exp\left(-\frac{1}{n}\right)$; $T = T(n)$ eine vorgegebene Funktion von n mit $\log^{A_1} n \leqq T(n) \leqq \sqrt{n}$.

1. 9. Es sei $\mathfrak{C}_r$ der (einmal positiv zu durchlaufende) Kreis

$$w = r \cdot \exp(i\alpha).$$

1. 10. Es bedeuten vorerst k und l zwei natürliche Zahlen, die den Bedingungen

$$1 \leqq k \leqq T; \quad 1 \leqq l \leqq k; \quad (l, k) = 1$$

genügen. Von Nr. **4. 5** ab bedeutet k eine beliebige natürliche Zahl. Es werde (eineindeutig) gesetzt $\varrho = \varrho(k, l) = \exp\left(2\pi i \frac{l}{k}\right)$.

---

[3]) Dies ist die Bezeichnung von *Tannery* und *Molk* ([1], No. 160/1).

1. 11. Wenn nichts anderes gesagt, steht

$$\sum_k \text{ für } \sum_{k=1}^{[T]}; \quad \sum_l \text{ für } \sum_{\substack{l=1\\(l,k)=1}}^{k}; \quad \sum_\varrho \text{ für } \sum_k \sum_l .$$

1. 12. Es seien $\alpha_{\varrho 1}$ und $\alpha_{\varrho 2}$ gleich dem 2π-fachen der unteren bzw. oberen Mediante von $\frac{l}{k}$ in der Fareyreihe der Ordnung T. Ferner sei

$$\beta_{\varrho 1} = \alpha_{\varrho 1} - 2\pi \frac{l}{k}; \quad \beta_{\varrho 2} = \alpha_{\varrho 2} - 2\pi \frac{l}{k}.$$

Nach der Theorie der Fareybrüche ([2], S. 98—100) gilt alsdann

$$\text{(1. 12. 1)} \qquad \frac{-2\pi}{kT} \leqq \beta_{\varrho 1} \leqq \frac{-\pi}{kT}; \quad \frac{\pi}{kT} \leqq \beta_{\varrho 2} \leqq \frac{2\pi}{kT}.$$

1. 13. Es sei $\mathfrak{C}_{r\varrho}$ der Fareybogen $w = r \cdot \exp(i\alpha)$; $\alpha_{\varrho 1} \leqq \alpha < \alpha_{\varrho 2}$. Dann liegt (Fareyzerschneidung) jeder Punkt von $\mathfrak{C}_r$ in genau einem $\mathfrak{C}_{r\varrho}$.

1. 14. Für $w \in \mathfrak{C}_r$ werde gesetzt $\xi = \xi_\varrho(w) = \log(w^{-1}\varrho)$, so daß

$$e^{-\xi} = w\varrho^{-1} \text{ und } \xi = \frac{1}{n} - i\beta; \quad \beta = \alpha - 2\pi \frac{l}{k}.$$

Auf $\mathfrak{C}_{r\varrho}$ gilt dann $\beta_{\varrho 1} \leqq \beta = -\mathfrak{Im}\, \xi < \beta_{\varrho 2}$, also nach **(1. 12.** 1)

$$\text{(1. 14. 1)} \qquad |\beta| \leqq \frac{2\pi}{kT} \text{ für } w \in \mathfrak{C}_{r\varrho}.$$

1. 15. Es bedeutet stets ε eine beliebig aber fest vorgegebene positive Zahl.

1. 16. Es bedeuten stets $C, C_1, C_2, \ldots$ positive Konstanten, die von nichts außer den als beliebig aber fest vorgegebenen Größen $(s, t, a_\sigma, K_\sigma, b_r, A', A, A_1, \varepsilon)$ abhängen.

1. 17. Die Schreibweise

$$h(x) \ll H(x) \text{ (lies: } h(x) \text{ klein gegen } H(x)\text{) bedeutet } |h(x)| \leqq C \cdot H(x)$$

für jedes x des gemeinsamen Definitionsbereiches.

Die Schreibweise

$$h(x) = h_1(x) + O(H(x)) \text{ bedeutet } h(x) - h_1(x) \ll H(x).$$

1. 18. $\mu(m)$ und $\varphi(m)$ bezeichnen die Möbiussche bzw. Eulersche zahlentheoretische Funktion. $\exp(z)$ bezeichnet die Exponentialfunktion e^z.

§ 2. Vorbereitungen und Hilfssätze.

2. 1. 1. Es sei

$d_\sigma = d_\sigma(k) = (K_\sigma, k)$;

$Q_\sigma = Q_\sigma(k) \bmod d_\sigma$ so bestimmt, daß $\frac{k}{d_\sigma} Q_\sigma \equiv 1 \pmod{d_\sigma}$;

$R_\sigma = R_\sigma(k) = \frac{kQ_\sigma}{d_\sigma}$ (also mod k bestimmt und $\equiv 1 \pmod{d_\sigma}$);

$N_\sigma = N_\sigma(k) = 1$ oder 0, je nachdem $\left(\frac{k}{d_\sigma}, d_\sigma\right) = \left(\frac{k}{d_\sigma}, K_\sigma\right) = 1$ oder > 1;

$\Psi_{\varrho\sigma} = \Psi_{\varrho\sigma}(w) = N_\sigma(k) \frac{\mu}{\varphi}\left(\frac{k}{d_\sigma(k)}\right) \cdot \varrho^{R_\sigma(k)a_\sigma} \xi_\varrho^{-1}(w)$.

2. 1. 2. Mit den Bezeichnungen **2. 1.** 1 gilt

Hilfssatz 1. *Wird $T = T(n) = \log^{A_1} n$ gewählt, so ist für $w \in \mathfrak{C}_{r\varrho}$:*

$$\Psi^*_{\varrho\sigma} = \Psi^*_{\varrho\sigma}(w) = F_\sigma(w) - \Psi_{\varrho\sigma}(w) \ll n \log^{-A} n \qquad (n = -\log^{-1}|w|).$$

Beweis. Da nach (1. 14. 1) für genügend großes n

$$(2.\,1.\,2.\,1)\qquad |\xi| = \left|\frac{1}{n} - i\beta\right| \leqq \frac{1}{n} + \frac{2\pi}{\log^{A_1} n} < 1$$

ist, und da ferner

$$\frac{1}{\xi} - \frac{1}{1 - w\varrho^{-1}} = \frac{1}{\xi} - \frac{1}{1 - e^{-\xi}}$$

für $|\xi| \leqq 2\pi - \varepsilon$ regulär, also $\ll 1$ ist, gilt

$$\xi_\varrho^{-1} = \frac{1}{1 - w\varrho^{-1}} + O(1);$$

$$\Psi_{\varrho\sigma} = N_\sigma \frac{\mu}{\varphi}\left(\frac{k}{d_\sigma}\right) \varrho^{R_\sigma a_\sigma}\left(\frac{1}{1 - w\varrho^{-1}}\right) + O(1),$$

und die Behauptung folgt aus einem früher bewiesenen Satz ([3], Satz 7), wenn man dort $r = \exp\left(-\frac{1}{n}\right)$, also $M = n$ setzt.

2. 1. 3. **Hilfssatz 2.** *Für $w \in \mathfrak{C}_r$ gilt:*

$$(2.\,1.\,3.\,1)\qquad F_\sigma(w) \ll n \log^2 n,$$

$$(2.\,1.\,3.\,2)\qquad \Psi_{\varrho\sigma}(w) \ll \frac{\log\log(k+2)}{k} \left|\xi_\varrho^{-1}(w)\right|.$$

Beweis. Die erste Behauptung ist bekanntlich wahr ([3], § 7 (i)). Für $N_\sigma = 0$ ist die zweite Behauptung trivial, für $N_\sigma \neq 0$ ist

$$\varphi(k) = \varphi\left(\frac{k}{d_\sigma}\right) \cdot \varphi(d_\sigma); \qquad \frac{1}{\varphi\left(\frac{k}{d_\sigma}\right)} = \frac{\varphi(d_\sigma)}{\varphi(k)} \ll \frac{1}{\varphi(k)}$$

wegen $\varphi(d_\sigma) \leqq d_\sigma \leqq K_\sigma \ll 1$.

Die bekannte Abschätzung ([4], § 59)

$$\frac{1}{\varphi(k)} \ll \frac{\log\log(k+2)}{k}$$

zeigt alsdann im Verein mit $|N| \leqq 1$, $|\mu| \leqq 1$

$$(2.\,1.\,3.\,3)\qquad N_\sigma(k) \frac{\mu}{\varphi}\left(\frac{k}{d_\sigma(k)}\right) \ll \frac{\log\log(k+2)}{k},$$

und die Behauptung folgt wegen $|\varrho| = 1$ sofort aus der Definition von $\Psi_{\varrho\sigma}$.

2. 1. 4. **Hilfssatz 3.** *Bei $\log^{A_1} n \leqq T(n) \leqq \sqrt{n}$ gilt*

$$(2.\,1.\,4.\,1)\qquad |\xi_\varrho^{-1}(w)| \leqq n \text{ für } w \in \mathfrak{C}_r;$$

$$(2.\,1.\,4.\,2)\qquad \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |\xi_\varrho^{-u}(w)|\, d(\operatorname{arc} w) \ll \begin{Bmatrix} n^{u-1} & \text{für } u > 1 \\ \log n & \text{für } u = 1 \\ (kT)^{-1/2} & \text{für } u = \frac{1}{2} \end{Bmatrix}.$$

Beweis. Es ist für $w \in \mathfrak{C}_r$

$$|\xi^{-1}| = \frac{1}{\sqrt{1/n^2 + \beta^2}} = \frac{n}{\sqrt{1 + n^2\beta^2}} \leqq n.$$

Ferner ist

$$J_u = \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |\xi_\varrho^{-u}(w)|\, d(\operatorname{arc} w) = n^u \int_{\beta_{\varrho 1}}^{\beta_{\varrho 2}} \frac{d\beta}{(1 + n^2\beta^2)^{u/2}} = n^{u-1} \int_{n\beta_{\varrho 1}}^{n\beta_{\varrho 2}} \frac{d\psi}{(1 + \psi^2)^{u/2}}$$

$$\leqq 2\, n^{u-1} \int_0^{\frac{2\pi n}{kT}} \frac{d\psi}{(1 + \psi^2)^{u/2}},$$

letzteres nach (1. 14. 1). Für $u > 1$ folgt

$$J_u \ll n^{u-1} \int_0^\infty \frac{d\psi}{(1+\psi^2)^{u/2}} \ll n^{u-1},$$

da das uneigentliche Integral existiert. Für $u = 1$ wird

$$J_1 \ll \int_0^{\frac{2\pi n}{kT}} \frac{d\psi}{\sqrt{1+\psi^2}} = \log\left(\frac{2\pi n}{kT} + \sqrt{1+\left(\frac{2\pi n}{kT}\right)^2}\right) \ll \log n.$$

Für $u = \frac{1}{2}$ schließlich wird

$$J_{1/2} \ll n^{-1/2} \int_0^{\frac{2\pi n}{kT}} \frac{d\psi}{\sqrt[4]{1+\psi^2}} \ll n^{-1/2} \int_0^1 d\psi + n^{-1/2} \int_1^{\frac{2\pi n}{kT}} \psi^{-1/2}\, d\psi$$

$$\leqq n^{-1/2} + n^{-1/2} \cdot 2\left(\frac{2\pi n}{kT}\right)^{1/2} \ll n^{-1/2} + (kT)^{-1/2} \ll (kT)^{-1/2},$$

letzteres wegen $kT \leqq T^2 \leqq n$.

2. 1. 5. Hilfssatz 4. *Es ist für* $1 \leqq x \leqq T (\leqq \sqrt{n})$

$$\sum_{\substack{\varrho \\ k \leqq x}} k^{-\gamma} \ll \begin{Bmatrix} \log n \text{ für } \gamma \geqq 2 \\ x^{2-\gamma} \text{ für } \gamma \leqq 3/2 \end{Bmatrix} \text{ und } \sum_{\substack{\varrho \\ k > x}} k^{-\gamma} \ll x^{2-\gamma} \text{ für } \gamma \geqq 5/2$$

Beweis. Man beachte $\sum_\varrho k^{-\gamma} \leqq \sum_k k^{1-\gamma}$ und schätze die Summen durch Integrale ab.

2. 1. 6. Hilfssatz 5. *Es ist*

(2. 1. 6. 1) $$\int_{\mathfrak{C}_r} |F_\sigma^2(w)|\, d(\operatorname{arc} w) \ll n \log^2 n$$

und für $T(n) = \log^{4} n$

(2. 1. 6. 2) $$\sum_\varrho \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |\Psi_{\varrho\sigma}^2(w)|\, d(\operatorname{arc} w) \ll n \log^2 n;$$

(2. 1. 6. 3) $$\sum_\varrho \int_{\mathfrak{C}_{r\sigma}} |\Psi_{\varrho\sigma}^{*2}(w)|\, d(\operatorname{arc} w) \ll n \log^2 n.$$

Beweis. Die erste Behauptung ist bekanntlich richtig ([3], § 7 (i)). Ferner ist nach (2. 1. 3. 2), (2. 1. 4. 2) und 2. 1. 5

$$\sum_\varrho \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |\Psi_{\varrho\sigma}^2(w)|\, d(\operatorname{arc} w) \ll \sum_\varrho \frac{\log^2 \log(k+2)}{k^2} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |\xi_\varrho^{-2}(w)|\, d(\operatorname{arc} w)$$

$$\ll n \cdot \log^2 \log(T+2) \sum_\varrho k^{-2} \ll n \log^2 n.$$

Schließlich ist wegen

$$|\Psi_{\varrho\sigma}^*|^2 = |F_\sigma - \Psi_{\varrho\sigma}|^2 \leqq 2(|F_\sigma|^2 + |\Psi_{\varrho\sigma}|^2)$$

nach (2. 1. 6. 1) und (2. 1. 6. 2):

$$\sum_\varrho \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |\Psi_{\varrho\sigma}^{*2}(w)|\, d(\operatorname{arc} w) \ll n \log^2 n.$$

2. 2. 1. Es sei (Gaußsche Summe) für natürliche Zahlen K, L

$$S_{K,L} = \sum_{j=1}^{K} \exp\left(2\pi i \frac{L}{K} j^2\right).$$

Ferner sei

$$\theta_{\varrho\tau} = \theta_{\varrho\tau}(w) = \frac{1}{k} \cdot S_{k, b_\tau l} \cdot \xi_\varrho^{-1/2}(w).$$

Dann gilt

2. 2. 2. Hilfssatz 6. *Bei* $\log^{4_1} n \leqq T(n) \leqq \sqrt{n}$ *gilt für* $w \in \mathfrak{C}_{\tau\varrho}$:

$$\theta^*_{\varrho\tau} = \theta^*_{\varrho\tau}(w) = \vartheta_\tau(w) - \theta_{\varrho\tau}(w) \ll n^{1/2} T^{-1/2}.$$

Beweis. Für den Moment werde $w\varrho^{-1} = z$ gesetzt. Es ist

$$\left(\frac{\pi}{b_\tau}\right)^{1/2} \vartheta_\tau(w) = \sum_{g_\tau=-\infty}^{+\infty} w^{b_\tau g_\tau^2} = \sum_{g_\tau=-\infty}^{+\infty} \exp\left(2\pi i \frac{l}{k} b_\tau g_\tau^2\right) z^{b_\tau g_\tau^2}$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \exp\left(2\pi i \frac{l}{k} b_\tau j^2\right) \sum_{h=-\infty}^{+\infty} z^{b_\tau (j+hk)^2}$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \exp\left(2\pi i \frac{l}{k} b_\tau j^2\right) z^{b_\tau j^2} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} z^{b_\tau (k^2h^2+2kjh)}$$

Mit der Abkürzung (beachte **1. 14**)

$$v = \frac{-j}{k}; \quad \eta = \frac{-\pi i}{(\log z) b_\tau k^2} = \frac{\pi i}{\xi b_\tau k^2}$$

wird nach einer bekannten Formel ([1], Nr. 181; XLIII_7)

$$\sum_{h=-\infty}^{+\infty} z^{b_\tau (k^2h^2+2kjh)} = \vartheta_3\left(\frac{v}{\eta} \,\middle|\, \frac{-1}{\eta}\right) = \sqrt{\frac{\eta}{i}} \exp\left(\pi i \frac{v^2}{\eta}\right) \vartheta_3(v \mid \eta),$$

wo für die Wurzel der Wert mit positivem Realteil zu nehmen ist. Da ferner $\vartheta_3(v \mid \eta)$ eine gerade Funktion von v ist, kommt, wenn man die Werte von v und η wieder einsetzt,

$$\sum_{h=-\infty}^{+\infty} z^{b_\tau (k^2h^2+2kjh)} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\pi}{b_\tau}}\, \xi^{-1/2} \exp(\xi b_\tau j^2)\, \vartheta_3(-v \mid \eta)$$

$$= \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\pi}{b_\tau}}\, \xi^{-1/2} z^{-b_\tau j^2} \left\{1 + 2 \sum_{h=1}^{\infty} \exp\left(\frac{-\pi^2 h^2}{\xi b_\tau k^2}\right) \cos\left(2\pi \frac{j}{k} h\right)\right\};$$

also

$$\vartheta_\tau(w) = \frac{1}{k} \xi^{-1/2} \sum_{j=1}^{k} \exp\left(2\pi i \frac{l}{k} b_\tau j^2\right)$$

$$+ \frac{2}{k} \xi^{-1/2} \sum_{h=1}^{\infty} \left\{\exp\left(\frac{-\pi^2 h^2}{\xi b_\tau k^2}\right) \sum_{j=1}^{k} \exp\left(2\pi i \frac{l}{k} b_\tau j^2\right) \cos\left(2\pi \frac{h}{k} j\right)\right\}$$

$$= \theta_{\varrho\tau}(w) + \theta^*_{\varrho\tau}(w).$$

Schreibt man nun für ganze Zahlen K, L, h

$$S_{K, L, h} = \sum_{j=1}^{k} \exp\left(2\pi i \frac{L}{K} j^2\right) \cos\left(2\pi \frac{h}{K} j\right),$$

so ist nach Kloosterman ([5], (18. 2))

$$|S_{k, b_\tau l, h}| \leqq \sqrt{k(2b_\tau, k)} \ll k^{1/2}; \tag{2. 2. 2. 1}$$

wegen

$$\mathfrak{Re}\left(\frac{-\pi^2 h^2}{\xi b_\tau k^2}\right) = \frac{-\pi^2 h^2}{b_\tau k^2}\, \mathfrak{Re}\left(\frac{1}{1/n - i\beta}\right) = \frac{-\pi^2 n h^2}{b_\tau k^2 (1 + n^2 \beta^2)}$$

ist daher

$$\theta^*_{\varrho\tau}(w) = \frac{2}{k} \xi^{-1/2} \sum_{h=1}^{\infty} \exp\left(\frac{-\pi^2 h^2}{\xi b_\tau k^2}\right) S_{k, b_\tau l, h} \ll (k\,|\xi|)^{-1/2} \sum_{h=1}^{\infty} \exp\left(\frac{-\pi^2 n h^2}{b_\tau k^2 (1 + n^2 \beta^2)}\right).$$

Wird für den Moment

$$m = m_{\varrho\tau}(n) = \frac{\pi^2 n}{b_\tau k^2 (1 + n^2 \beta^2)}$$

gesetzt, so ist $m > 0$ und

$$\theta^*_{\varrho\tau}(w) \ll (k\,|\,\xi\,|)^{-1/2} \sum_{h=1}^{\infty} \exp(-mh^2) \leqq (k\,|\,\xi\,|)^{-1/2} \int_0^\infty \exp(-mh^2)\,dh$$

$$= (mk\,|\,\xi\,|)^{-1/2} \int_0^\infty \exp(-x^2)\,dx \ll (mk\,|\,\xi\,|)^{-1/2};$$

also (man setze m und $|\,\xi\,|$ ein)

$$\theta^*_{\varrho\tau}(w) \ll \left(\frac{\pi^2 n}{b_\tau k^2 (1 + n^2\beta^2)}\, k\, \frac{(1 + n^2\beta^2)^{1/2}}{n}\right)^{-1/2} = \sqrt{\frac{b_\tau}{\pi^2}}\, k^{1/2} (1 + n^2\beta^2)^{1/4} \ll k^{1/2}(1 + n^2\beta^2)^{1/4}$$

$$\ll k^{1/2} + (kn\,|\,\beta\,|)^{1/2} \leqq T^{1/2} + \left(\frac{2\pi n}{T}\right)^{1/2} \ll T^{1/2} + n^{1/2} T^{-1/2} \ll n^{1/2} \cdot T^{-1/2},$$

drittletzteres nach (1. 14. 1), letzteres wegen $T \leqq \sqrt{n}$. Damit ist Hilfssatz 6 bewiesen.

2. 2. 3. **Hilfssatz 7.** *Für $w \in \mathfrak{C}_\tau$ gilt*

(2. 2. 3. 1) $$\vartheta_\tau(w) \ll n^{1/2};$$

(2. 2. 3. 2) $$\theta_{\varrho\tau}(w) \ll k^{-1/2}\,|\,\xi_\varrho^{-1/2}(w)\,|.$$

Beweis. Es ist für $|\,w\,| = r = \exp\left(-\frac{1}{n}\right)$

$$\vartheta_\tau(w) = \left(\frac{\pi}{b_\tau}\right)^{1/2} \sum_{g=-\infty}^{+\infty} w^{b_\tau g^2} \ll \sum_{g=-\infty}^{+\infty} r^{b_\tau g^2} = 1 + 2\sum_{g=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{n}\, b_\tau g^2\right)$$

$$\ll 1 + \int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{n}\, b_\tau g^2\right) dg = 1 + \sqrt{\frac{n}{b_\tau}} \int_0^\infty \exp(-y^2)\,dy \ll n^{1/2}.$$

Ferner ist nach (2. 2. 2. 1)

(2. 2. 3. 3) $$S_{k, b_\tau l} = S_{k, b_\tau l, 0} \ll k^{1/2},$$

woraus die zweite Behauptung nach Definition von $\theta_{\varrho\tau}$ sofort folgt.

2. 3. **Hilfssatz 8.** *Es ist*

$$\int_{\mathfrak{C}_r} |\,\vartheta_\tau(w)\,\vartheta_{\tau'}(w)\,|^2\, d(\operatorname{arc} w) \ll n \log n.$$

Beweis. Man zerlege $\mathfrak{C}_r$ in Fareybogen[4]) $\mathfrak{C}_{rP}$ der Ordnung $T = \sqrt{n}$ und stelle gemäß 2. 2. 2 jedes ϑ in der Form $\theta_P + \theta^*_P$ dar. Ausmultiplizieren des Integranden liefert alsdann, da trivialerweise $|\,\theta_P + \theta^*_P\,|^2 \leqq 2\,(|\,\theta_P\,|^2 + |\,\theta^*_P\,|^2)$ ist,

$$\int_{\mathfrak{C}_r} |\,\vartheta_\tau \vartheta_{\tau'}\,|^2\, d(\operatorname{arc} w) \ll \sum_P \int_{\mathfrak{C}_{rP}} |\,\theta_{P\tau}\,\theta_{P\tau'}\,|^2\, d(\operatorname{arc} w) + \sum_P \int_{\mathfrak{C}_{rP}} \{|\,\theta_{P\tau}\,\theta^*_{P\tau'}\,|^2 + |\,\theta^*_{P\tau}\,\theta_{P\tau'}\,|^2\}\, d(\operatorname{arc} w)$$

(2. 3. 1) $$+ \sum_P \int_{\mathfrak{C}_{rP}} |\,\theta^*_{P\tau}\,\theta^*_{P\tau'}\,|^2 d(\operatorname{arc} w) = \Sigma_0 + \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Nach (2. 2. 3. 2), (2. 1. 4. 2) und 2. 1. 5 ist nun

(2. 3. 2) $$\Sigma_0 = \sum_P \int_{\mathfrak{C}_{rP}} |\,\theta_{P\tau}\,\theta_{P\tau'}\,|^2\, d(\operatorname{arc} w)$$

$$\ll \sum_P k^{-2} \int_{\mathfrak{C}_{rP}} |\,\xi_P^{-2}\,|\, d(\operatorname{arc} w) \ll n \sum_P k^{-2} \ll n \log n.$$

---

[4]) Abschnitt 2. 3 ist die einzige Gelegenheit, wo $T(n) = \sqrt{n}$ gesetzt wird, während später stets $T(n) = \log^{A_1} n$ sein wird. Um dies hervorzuheben, wird hier P statt ϱ geschrieben.

Nach **2. 2.** 2, (**2. 2.** 3. 2), (**2. 1.** 4. 2) und **2. 1.** 5 ist ferner

$$\left.\begin{aligned}\sum_P \int_{\mathfrak{C}_{rP}} |\theta_{Pr}\,\theta^*_{Pr'}|^2\, d(\operatorname{arc} w) \ll \\ \sum_P \int_{\mathfrak{C}_{rP}} |\theta^*_{Pr}\,\theta_{Pr'}|^2\, d(\operatorname{arc} w) \ll\end{aligned}\right\} nT^{-1}\sum_P k^{-1}\int_{\mathfrak{C}_{rP}} |\xi_P^{-1}|\, d(\operatorname{arc} w) \ll nT^{-1}\log n \sum_P k^{-1} \ll n\log n\,;$$

(**2. 3.** 3) $$\Sigma_1 \ll n\log n.$$

Schließlich ergibt sich aus **2. 2.** 2

(**2. 3.** 4) $$\Sigma_2 = \sum_P \int_{\mathfrak{C}_{rP}} |\theta^*_{Pr}\,\theta^*_{Pr'}|^2\, d(\operatorname{arc} w) \ll n^2 T^{-2} \sum_P \int_{\mathfrak{C}_{rP}} d(\operatorname{arc} w) \ll n^2 T^{-2} = n.$$

Die Abschätzungen (**2. 3.** 1) bis (**2. 3.** 4) vollenden den Beweis des Hilfssatzes 8.

2. 4. Ansatz. Es ist mit der Abkürzung

(**2. 4.** 1) $$P = \pi^{-t/2} \prod_\sigma \varphi(K_\sigma) \times \prod_\tau b_\tau^{1/2}$$

$$P\cdot \nu(n) = \sum_\varrho \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} \prod_\sigma F_\sigma(w) \times \prod_\tau \vartheta_\tau(w)\, \frac{dw}{w^{n+1}}\,;$$

denn in der Potenzreihenentwicklung von $\prod_\varrho F_\varrho(w) \times \prod_\tau \vartheta_\tau(w)$ hat w^n nach **1. 6** offenbar den Koeffizienten $P\cdot\nu(n)$, woraus nach der Cauchyschen Koeffizientenformel zunächst

$$P\cdot\nu(n) = \int_{\mathfrak{C}_r} \prod_\sigma F_\sigma(w) \times \prod_\tau \vartheta_\tau(w)\, \frac{dw}{w^{n+1}}$$

und dann nach der in **1. 9** bis **1. 13** erklärten Fareyzerschneidung die Behauptung folgt.

2. 5. Zur Zerlegung des Integranden in 2. 4. Auf jedem Fareybogen $\mathfrak{C}_{r\varrho}$ stellt sich dar[5]):

(**2. 5.** 1) $$\prod_\sigma F_\sigma(w) \times \prod_\tau \vartheta_\tau(w) = U_\varrho^{\langle 0\rangle}(w) + \sum_{\lambda=1}^{s} U_\varrho^{\langle\lambda\rangle}(w) + \sum_{\lambda'=1}^{t} V_\varrho^{\langle\lambda'\rangle}(w)$$

mit

$$U_\varrho^{\langle 0\rangle} = \prod_\sigma \Psi_{\sigma\varrho} \times \prod_\tau \theta_{\varrho\tau}\,;$$

$$U_\varrho^{\langle\lambda\rangle} = \prod_{\sigma=1}^{s-\lambda} \Psi_{\varrho\sigma} \times \Psi^*_{\varrho(s-\lambda+1)} \times \prod_{\sigma'=s-\lambda+2}^{s} F_{\sigma'} \times \prod_{\tau=1}^{t} \theta_{\varrho\tau} \qquad (\lambda = 1, \ldots, s);$$

$$V_\varrho^{\langle\lambda'\rangle} = \prod_{\sigma=1}^{s} F_\sigma \times \prod_{\tau=1}^{t-\lambda'} \theta_{\varrho\tau} \times \theta^*_{\varrho(t-\lambda'+1)} \times \prod_{\tau'=t-\lambda'+2}^{t} \vartheta_\tau \qquad (\lambda' = 1, \ldots, t).$$

Zum Beweis braucht man nur $\Psi^* = F - \Psi$ und $\theta^* = \vartheta - \theta$ einzusetzen. Auf der rechten Seite von (**2. 5.** 1) entstehen dann $(1 + 2s + 2t)$ Glieder mit alternierenden Vorzeichen, die sich paarweise wegheben bis auf eines (das letzte), welches gleich der linken Seite ist.

2. 6. Ausgangsformel. Setzt man

$$\mathbf{S}_\lambda = \sum_\varrho \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} U_\varrho^{\langle\lambda\rangle}(w)\, \frac{dw}{w^{n+1}} \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, s);$$

$$\mathbf{T}_{\lambda'} = \sum_\varrho \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} V_\varrho^{\langle\lambda'\rangle}(w)\, \frac{dw}{w^{n+1}} \qquad (\lambda' = 1, 2, \ldots, t),$$

---

[5]) Summen und Produkte, in denen die obere Grenze kleiner als die untere ist, bedeuten 0 bzw. 1.

so ist nach **2. 4** und **2. 5** offenbar

$$P \cdot \nu(n) = \mathbf{S}_0 + \sum_{\lambda=1}^{s} \mathbf{S}_\lambda + \sum_{\lambda'=1}^{t} \mathbf{T}_{\lambda'}.$$

$\mathbf{S}_0$ ist das sog. Hauptglied, das in § 4 ausgewertet wird. Die übrigen, sog. Nebenglieder werden in § 3 nach oben abgeschätzt.

2. 7. Ist $\mathfrak{C}$ ein positiv zu durchlaufendes Stück von $\mathfrak{C}_r$ oder dieser Kreis selbst, so gilt für jeden Integranden $I(w)$

$$\int_{\mathfrak{C}} I(w) \frac{dw}{w^{n+1}} \ll \int_{\mathfrak{C}} |I(w)|\, d(\operatorname{arc} w);$$

denn auf $\mathfrak{C}_r$ ist $w = r \exp(i\alpha)$ und $r = \exp\left(-\frac{1}{n}\right)$; also

$$dw = r \cdot i \cdot \exp(i\alpha) \cdot d\alpha = i \cdot w \cdot d(\operatorname{arc} w)$$

und es ist

$$|I(w) \cdot i \cdot w^{-n}| = |I(w)| \cdot r^{-n} = |I(w)| \cdot e \ll |I(w)|.$$

§ 3. Abschätzung der Nebenglieder.

3. 1. Von nun an sei durchweg die Ordnung der Fareyzerschneidung

$$T = T(n) = \log^{A_1} n = \log^{4A+38} n.$$

3. 2. Abschätzung von $\mathbf{S}_1$. Nach (**2. 1.** 3. 2), (**2. 2.** 3. 2) und **2. 7** wird

$$\mathbf{S}_1 = \sum_{\varrho} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} \prod_{\tau=1}^{s-1} \Psi_{\varrho\sigma} \times \Psi^*_{\varrho s} \times \prod_{\tau=1}^{t} \theta_{\varrho\tau} \frac{dw}{w^{n+1}}$$

$$\ll \sum_{\varrho} k^{-(s-1+t/2)} \log^{s-1} \log(k+2) \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |\Psi^*_{\varrho s}|\, |\xi_\varrho^{-(s-1+t/2)}|\, d(\operatorname{arc} w).$$

Wegen $\log^{s-1} \log(k+2) \leqq \log^{s-1}(T+2) \ll \log n$ und (**2. 1.** 4. 1) kommt also

$$\mathbf{S}_1 \ll n^{s+t/2-3/2} \log n \sum_{\varrho} k^{-3/2} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |\Psi^*_{\varrho s}|\, |\xi_\varrho^{-3/2}|\, d(\operatorname{arc} w).$$

Nun ist erstens nach **2. 1.** 2, (**2. 1.** 4. 2), **2. 1.** 5

$$\sum_{\substack{\varrho \\ k \leqq \sqrt[4]{T}}} k^{-3/2} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |\Psi^*_{\varrho s}|\, |\xi_\varrho^{-3/2}|\, d(\operatorname{arc} w) \ll n \log^{-A} n \sum_{\substack{\varrho \\ k \leqq \sqrt[4]{T}}} k^{-3/2} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |\xi_\varrho^{-3/2}|\, d(\operatorname{arc} w)$$

$$\ll n^{3/2} \log^{-A} n \sum_{\substack{\varrho \\ k \leqq \sqrt[4]{T}}} k^{-3/2} \ll n^{3/2} \log^{-A} n \left(\sqrt[4]{T}\right)^{1/2} \leqq n^{3/2} \log^{5-A/2} n.$$

Zweitens ist [6])

$$\sum_{\substack{\varrho \\ k > \sqrt[4]{T}}} k^{-3/2} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |\Psi^*_{\varrho s}|\, |\xi_\varrho^{-3/2}|\, d(\operatorname{arc} w) \leqq \sum_{\substack{\varrho \\ k > \sqrt[4]{T}}} k^{-3/2} \sqrt{\int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |\Psi^*_{\varrho s}|^2\, d(\operatorname{arc} w)} \sqrt{\int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |\xi_\varrho^{-3/2}|^2\, d(\operatorname{arc} w)}$$

$$\leqq \Big(\sum_{\substack{\varrho \\ k > \sqrt[4]{T}}} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |\Psi^*_{\varrho s}|^2\, d(\operatorname{arc} w) \Big)^{1/2} \Big(\sum_{\substack{\varrho \\ k > \sqrt[4]{T}}} k^{-3} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |\xi_\varrho^{-3}|\, d(\operatorname{arc} w) \Big)^{1/2}$$

$$\ll (n \log^2 n)^{1/2} \Big(n^2 \sum_{\substack{\varrho \\ k > \sqrt[4]{T}}} k^{-3}\Big)^{1/2} \ll n^{3/2} \log n \left(\sqrt[4]{T}\right)^{-1/2} \leqq n^{3/2} \log^{5-A/2} n,$$

wobei noch (**2. 1.** 6. 3), (**2. 1.** 4. 2) und **2. 1.** 5 herangezogen wurden.

[6]) Dies folgt, wenn man die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung erst auf das Integral, dann auf die Summe anwendet. (Diese Schlußkette wird später noch mehrmals angewendet. An den entsprechenden Stellen wird auf diese Fußnote verwiesen.) Man beachte ferner: Wenn der Integrand von ϱ nicht abhängt, darf $\sum_{\varrho} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}}$ durch $\int_{\mathfrak{C}_r}$ ersetzt werden.

Insgesamt hat man mithin

$$\mathfrak{S}_1 \ll n^{s+t/2-5/2} \log n \Big(\sum_{\substack{\varrho \\ k \leq \sqrt[4]{T}}} + \sum_{\substack{\varrho \\ k > \sqrt[4]{T}}}\Big) \ll n^{\omega-1} \log^{6-A/2} n \leqq n^{\omega-1} \log^{-A'} n.$$

3. 3. Abschätzung von $\mathfrak{S}_\lambda (2 \leqq \lambda \leqq s-1)$. Solche Glieder treten nur für $s \geqq 3$ auf, und es kommt nach (2. 1. 3. 2) und (2. 2. 3. 2) in Verbindung mit (2. 1. 4. 1), sowie nach 2. 1. 2, (2. 1. 3. 1), 2. 7

$$\mathfrak{S}_\lambda = \sum_\varrho \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} \prod_{\sigma=1}^{s-\lambda} \Psi_{\varrho\sigma} \times \Psi^*_{\varrho(s-\lambda+1)} \times \prod_{\sigma'=s-\lambda+2}^{s} F_{\sigma'} \times \prod_{\tau=1}^{t} \theta_{\varrho\tau} \frac{dw}{w^{n+1}}$$

$$\ll n^{s-\lambda-1} \cdot n \log^{-A} n \cdot (n \log^2 n)^{s-(s-\lambda+2)} \cdot n^{t/2} \cdot \sum_\varrho \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |\Psi_{\varrho 1}| \, |F_s| \, d(\operatorname{arc} w);$$

also wird [6])

$$\mathfrak{S}_\lambda \ll n^{\omega-2} \log^{2(\lambda-2)-A} n \sum_\varrho \sqrt{\int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |\Psi^2_{\varrho 1}| \, d(\operatorname{arc} w)} \sqrt{\int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |F^2_s| \, d(\operatorname{arc} w)}$$

$$\leqq n^{\omega-2} \log^{2(\lambda-2)-A} n \Big(\sum_\varrho \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |\Psi^2_{\varrho 1}| \, d(\operatorname{arc} w)\Big)^{1/2} \Big(\sum_\varrho \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |F^2_s| \, d(\operatorname{arc} w)\Big)^{1/2}$$

$$\ll n^{\omega-2} \log^{2(\lambda-2)-A} n (n \log^2 n)^{1/2} (n \log^2 n)^{1/2}$$

$$\leqq n^{\omega-1} \log^{-A'} n,$$

wobei noch (2. 1. 6. 1) und (2. 1. 6. 2) benutzt wurden.

3. 4. Abschätzung von $\mathfrak{S}_s$. Wegen 3. 2 darf $s \geqq 2$ vorausgesetzt werden.

3. 4. 1. Sei zuerst $s \geqq 3$. Dann ist nach 2. 1. 2, (2. 1. 3. 1), (2. 2. 3. 1) in Verbindung mit (2. 1. 4. 1), sowie nach 2. 7

$$\mathfrak{S}_s = \sum_\varrho \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} \Psi^*_{\varrho 1} \times \prod_{\sigma=2}^{s} F_\sigma \times \prod_{\tau=1}^{t} \theta_{\varrho\tau} \frac{dw}{w^{n+1}}$$

$$\ll n \log^{-A} n \cdot (n \log^2 n)^{s-3} \cdot n^{t/2} \sum_\varrho \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |F_2| \, |F_3| \, d \operatorname{arc} w;$$

also wird [6])

$$\mathfrak{S}_s \ll n^{\omega-2} \log^{2(s-3)-A} n \cdot \sum_\varrho \sqrt{\int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |F^2_2| \, d(\operatorname{arc} w)} \sqrt{\int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |F^2_3| \, d(\operatorname{arc} w)}$$

$$\leqq n^{\omega-2} \log^{2(s-3)-A} n \Big(\sum_\varrho \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |F^2_2| \, d(\operatorname{arc} w)\Big)^{1/2} \Big(\sum_\varrho \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |F^2_3| \, d(\operatorname{arc} w)\Big)^{1/2}$$

$$\ll n^{\omega-2} \log^{2(s-3)-A} n (n \log^2 n)^{1/2} (n \log^2 n)^{1/2}$$

$$\leqq n^{\omega-1} \log^{-A'} n,$$

wobei zweimal (2. 1. 6. 1) verwandt wurde.

3. 4. 2. Sei jetzt $s = 2$, also $t \geqq 1$. Dann ist nach (2. 2. 3. 2), (2. 1. 4. 1) und 2. 7

$$\mathfrak{S}_s = \sum_\varrho \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} \Psi^*_{\varrho 1} \times F_2 \times \prod_{\tau=1}^{t} \theta_{\varrho\tau} \frac{dw}{w^{n+1}}$$

$$\ll \sum_\varrho k^{-t/2} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |\Psi^*_{\varrho 1}| \, |F_2| \, |\xi_\varrho^{-t/2}| \, d(\operatorname{arc} w)$$

$$\ll n^{(t-1)/2} \sum_\varrho k^{-1/2} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |\Psi^*_{\varrho 1}| \, |F_2| \, |\xi_\varrho^{-1/2}| \, d(\operatorname{arc} w).$$

Nun ist erstens nach **2. 1. 2**

$$\sum_{\substack{\varrho \\ k \leq \sqrt[4]{T}}} k^{-1/2} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |\Psi_{\varrho 1}^*| \, |F_2| \, |\xi_\varrho^{-1/2}| \, d(\operatorname{arc} w)$$

$$\ll n \log^{-A} n \sum_{\substack{\varrho \\ k \geq \sqrt[4]{T}}} k^{-1/2} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |F_2| \, |\xi_\varrho^{-1/2}| \, d(\operatorname{arc} w),$$

woraus weiter folgt[6])

$$\sum_{\substack{\varrho \\ k \leq \sqrt[4]{T}}} \ll n \log^{-A} n \sum_{\substack{\varrho \\ k \leq \sqrt[4]{T}}} k^{-1/2} \sqrt{\int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |F_2^2| \, d(\operatorname{arc} w)} \sqrt{\int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |\xi_\varrho^{-1}| \, d(\operatorname{arc} w)}$$

$$\leq n \log^{-A} n \Big(\sum_{\substack{\varrho \\ k \leq \sqrt[4]{T}}} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |F_2^2| \, d(\operatorname{arc} w) \Big)^{1/2} \Big(\sum_{\substack{\varrho \\ k \leq \sqrt[4]{T}}} k^{-1} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |\xi_\varrho^{-1}| \, d(\operatorname{arc} w) \Big)^{1/2}$$

$$\ll n \log^{-A} n (n \log^2 n)^{1/2} (\log n \sum_{\substack{\varrho \\ k \leq \sqrt[4]{T}}} k^{-1})^{1/2} \ll n^{3/2} \cdot \log^{3/2 - A} n \cdot (\sqrt[4]{T})^{1/2}$$

$$\leq n^{3/2} \log^{-A'} n,$$

wobei noch (**2. 1. 6. 1**), (**2. 1. 4. 2**) und **2. 1. 5** benutzt wurden. Zweitens ist nach (**2. 1. 4. 1**)

$$\sum_{\substack{\varrho \\ k > \sqrt[4]{T}}} k^{-1/2} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |\Psi_{\varrho 1}^*| \, |F_2| \, |\xi_\varrho^{-1/2}| \, d(\operatorname{arc} w)$$

$$\ll n^{3/2} (\sqrt[4]{T})^{-1/2} \sum_{\substack{\varrho \\ k > \sqrt[4]{T}}} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |\Psi_{\varrho 1}^*| \, |F_2| \, d(\operatorname{arc} w);$$

also[6])

$$\sum_{\substack{\varrho \\ k > \sqrt[4]{T}}} \ll n^{1/2} T^{-1/8} \sum_{\varrho} \sqrt{\int_{\mathfrak{C}_{\varrho 1}} |\Psi_{\varrho 1}^*|^2 \, d(\operatorname{arc} w)} \sqrt{\int_{\mathfrak{C}_{\varrho 1}} |F_2^2| \, d(\operatorname{arc} w)}$$

$$\leq n^{1/2} T^{-1/8} \Big(\sum_{\varrho} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |\Psi_{\varrho 1}^*|^2 d(\operatorname{arc} w) \Big)^{1/2} \Big(\sum_{\varrho} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |F_2^2| \, d(\operatorname{arc} w) \Big)^{1/2}$$

$$\ll n^{1/2} T^{-1/8} (n \log^2 n)^{1/8} (n \log^2 n)^{1/2}$$

$$\leq n^{5/2} \log^{-A'} n,$$

wobei noch (**2. 1. 6. 1**) und (**2. 1. 6. 3**) herangezogen wurden.

Insgesamt hat man mithin für $s = 2$, $t \geq 1$

$$\mathbf{S}_s \ll n^{(t-1)/2} \Big\{ \sum_{\substack{\varrho \\ k \leq \sqrt[4]{T}}} + \sum_{\substack{\varrho \\ k > \sqrt[4]{T}}} \Big\} \ll n^{\omega - 1} \log^{-A'} n.$$

3. 4. 3. Nach **3. 4. 1** und **3. 4. 2** gilt also allgemein

$$\mathbf{S}_s \ll n^{\omega - 1} \log^{-A'} n.$$

3. 5. Abschätzung von $\mathbf{T}_1$. Dieses Glied tritt nur für $t \geq 1$ auf.

3. 5. 1. Sei zuerst $s \geq 2$. Dann ist nach (**2. 1.** 3. 1), (**2. 2.** 3. 2) in Verbindung mit (**2. 1.** 4. 1), sowie nach **2. 2. 2**, **2. 7**

$$\mathbf{T}_1 = \sum_{\varrho} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} \prod_{\sigma=1}^{s} F_\sigma \times \prod_{\tau=1}^{t-1} \theta_{\varrho\tau} \times \theta_{\varrho t}^* \frac{dw}{w^{n+1}}$$

$$\ll (n \log^2 n)^{s-2} \cdot n^{(t-1)/2} \cdot n^{1/2} T^{-1/2} \cdot \sum_{\varrho} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |F_1| \, |F_2| \, d(\operatorname{arc} w)$$

$$\ll n^{s+t/2-2} \cdot \log^{2(s-2)} n \cdot T^{-1/2} \cdot n \log^2 n \leq n^{\omega - 1} \log^{-A'} n.$$

Dabei fand folgende Überlegung statt:

3. 5. 2. Es ist[6]) wegen (**2. 1.** 6. 1)

$$\sum_{\varrho} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |F_1|\,|F_2|\,d(\operatorname{arc} w) \leqq \sum_{\varrho} \sqrt{\int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |F_1^2|\,d(\operatorname{arc} w)}\,\sqrt{\int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |F_2^2|\,d(\operatorname{arc} w)}$$
$$\leqq \Big(\sum_{\varrho} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |F_1^2|\,d(\operatorname{arc} w)\Big)^{1/2} \Big(\sum_{\varrho} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |F_2^2|\,d(\operatorname{arc} w)\Big)^{1/2} \ll n \log^2 n.$$

3. 5. 3. Jetzt sei $s = 1$, also $t \geqq 3$. Dann ist nach (**2. 2.** 3. 2), **2. 2.** 2 und **2. 7**

$$\mathbf{T}_1 = \sum_{\varrho} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} F_1 \times \prod_{\tau=1}^{t-1} \theta_{\varrho\tau} \times \theta^*_{\varrho t} \frac{dw}{w^{n+1}} \ll n^{1/2} T^{-1/2} \sum_{\varrho} k^{-(t-1)/2} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |F_1|\,|\xi_\varrho^{-(t-1)/2}|\,d(\operatorname{arc} w).$$

Daher wird[6])

$$\mathbf{T}_1 \ll n^{1/2} T^{-1/2} \sum_{\varrho} k^{-(t-1)/2} \sqrt{\int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |F_1^2|\,d(\operatorname{arc} w)}\,\sqrt{\int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |\xi^{-(t-1)}|\,d(\operatorname{arc} w)}$$
$$\leqq n^{1/2} T^{-1/2} \Big(\sum_{\varrho} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |F_1^2|\,d(\operatorname{arc} w)\Big)^{1/2} \Big(\sum_{\varrho} k^{-(t-1)} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |\xi_\varrho^{-(t-1)}|\,d(\operatorname{arc} w)\Big)^{1/2}$$
$$\ll n^{1/2} T^{-1/2} (n \log^2 n)^{1/2} \Big(n^{t-2} \sum_{\varrho} k^{-(t-1)}\Big)^{1/2} \ll n^{1/2} T^{-1/2} (n \log^2 n)^{1/2} (n^{t-2} \log n)^{1/2}$$
$$\leqq n^{\omega-1} \log^{-A'} n,$$

wobei noch (**2. 1.** 6. 1), (**2. 1.** 4. 2) und **2. 1.** 5 verwendet wurden.

3. 5. 4. In allen Fällen gilt also nach **3. 5.** 1 und **3. 5.** 3

$$\mathbf{T}_1 \ll n^{\omega-1} \log^{-A'} n.$$

3. 6. Abschätzung von $\mathbf{T}_{\lambda'}$ $(2 \leqq \lambda' \leqq t-1)$. Solche Glieder treten nur auf, falls $t \geqq 3$ ist. Es ist nach (**2. 1.** 3. 1), (**2. 2.** 3. 2) in Verbindung mit (**2. 1.** 4. 1), sowie nach (**2. 2.** 3. 1) und **2. 7**

$$\mathbf{T}_{\lambda'} = \sum_{\varrho} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} \prod_{\sigma=1}^{s} F_\sigma \times \prod_{\tau=1}^{t-\lambda'} \theta_{\varrho\tau} \times \theta^*_{\varrho(t-\lambda'+1)} \times \prod_{\tau'=t-\lambda'+2}^{t} \vartheta_{\tau'} \frac{dw}{w^{n+1}}$$
$$\ll (n \log^2 n)^{s-1} n^{(t-3)/2} \sum_{\varrho} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |F_1|\,|\theta_{\varrho 1}|\,|\theta^*_{\varrho(t-\lambda'+1)}|\,|\vartheta_t|\,d(\operatorname{arc} w).$$

3. 6. 1. Nun ist einerseits nach **2. 2.** 2 und (**2. 2.** 3. 2)

$$\sum_{\varrho} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |F_1|\,|\theta_{\varrho 1}|\,|\theta^*_{\varrho(t-\lambda'+1)}|\,|\theta_{\varrho t}|\,d(\operatorname{arc} w) \ll n^{1/2} T^{-1/2} \sum_{\varrho} k^{-1} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |F_1|\,|\xi_\varrho^{-1}|\,d(\operatorname{arc} w),$$

und dies ist[6])

$$\leqq n^{1/2} T^{-1/2} \sum_{\varrho} k^{-1} \sqrt{\int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |F_1^2|\,d(\operatorname{arc} w)}\,\sqrt{\int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |\xi_\varrho^{-2}|\,d(\operatorname{arc} w)}$$
$$\leqq n^{1/2} T^{-1/2} \Big(\sum_{\varrho} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |F_1^2|\,d(\operatorname{arc} w)\Big)^{1/2} \Big(\sum_{\varrho} k^{-2} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |\xi_\varrho^{-2}|\,d(\operatorname{arc} w)\Big)^{1/2}$$
$$\ll n^{1/2} T^{-1/2} (n \log^2 n)^{1/2} \Big(n \sum_{\varrho} k^{-2}\Big)^{1/2} \ll n^{3/2} T^{-1/2} \log^{3/2} n,$$

wozu (**2. 1.** 6. 1), (**2. 1.** 4. 2) und **2. 1.** 5 herangezogen wurden.

3. 6. 2. Andererseits ist nach **2. 2.** 2 und (**2. 2.** 3. 2)

$$\sum_{\varrho} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |F_1|\,|\theta_{\varrho 1}|\,|\theta^*_{\varrho(t-\lambda'+1)}|\,|\theta^*_{\varrho t}|\,d(\operatorname{arc} w) \ll n T^{-1} \sum_{\varrho} k^{-1/2} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |F_1|\,|\xi_\varrho^{-1/2}|\,d(\operatorname{arc} w),$$

und dies ist[6])

$$\leqq n T^{-1} \sum_{\varrho} k^{-1/2} \sqrt{\int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |F_1^2|\,d(\operatorname{arc} w)}\,\sqrt{\int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |\xi_\varrho^{-1}|\,d(\operatorname{arc} w)}$$
$$\leqq n T^{-1} \Big(\sum_{\varrho} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |F_1^2|\,d(\operatorname{arc} w)\Big)^{1/2} \Big(\sum_{\varrho} k^{-1} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |\xi_\varrho^{-1}|\,d(\operatorname{arc} w)\Big)^{1/2}$$
$$\ll n T^{-1} (n \log^2 n)^{1/2} \Big(\log n \sum_{\varrho} k^{-1}\Big)^{1/2} \ll n^{3/2} T^{-1} \log^{3/2} n\, T^{1/2} = n^{3/2} T^{-1/2} \log^{3/2} n,$$

wobei wieder (**2. 1.** 6. 1), (**2. 1.** 4. 2) und **2. 1.** 5 benutzt wurden.

3. 6. 3. Nach **3. 6.** 1 und **3. 6.** 2 und wegen

$$|\vartheta_t| = |\theta_{\varrho t} + \theta^*_{\varrho t}| \leqq |\theta_{\varrho t}| + |\theta^*_{\varrho t}|$$

ist also

$$\mathbf{T}_{\chi'} \ll (n \log^2 n)^{s-1} n^{(t-3)/2} n^{3/2} T^{-1/2} \log^{3/2} n \leqq n^{\omega-1} \log^{-A'} n.$$

3. 7. Abschätzung von $\mathbf{T}_t$. Hier darf $t \geqq 2$ vorausgesetzt werden.

3. 7. 1. Sei zuerst $s \geqq 2$. Dann ist nach (**2. 1.** 3. 1), **2. 2.** 2, (**2. 2.** 3. 2) in Verbindung mit (**2. 1.** 4. 1) und nach **2. 7**

$$\mathbf{T}_t = \sum_{\varrho} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} \prod_{\sigma=1}^{s} F_\sigma \times \theta^*_{\varrho 1} \times \prod_{\tau=2}^{t} \vartheta_\tau \frac{dw}{w^{n+1}}$$

$$\ll (n \log^2 n)^{s-2} n^{t/2} T^{-1/2} \sum_{\varrho} \int\limits_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |F_1|\,|F_2|\, d(\operatorname{arc} w)$$

$$\ll (n \log^2 n)^{s-1} n^{t/2} T^{-1/2} \leqq n^{\omega-1} \log^{-A'} n,$$

vorletzteres nach **3. 5.** 2.

3. 7. 2. Jetzt sei $s = 1$, also $t \geqq 3$. Dann wird nach **2. 2.** 2, (**2. 2.** 3. 2) in Verbindung mit (**2. 1.** 4. 1), sowie nach **2. 7**

$$\mathbf{T}_t = \sum_{\varrho} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} F_1 \times \theta^*_{\varrho 1} \times \prod_{\tau=2}^{t} \vartheta_\tau \frac{dw}{w^{n+1}} \ll n^{(t-2)/2} T^{-1/2} \sum_{\varrho} \int\limits_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |F_1|\,|\vartheta_2 \vartheta_3|\, d(\operatorname{arc} w).$$

Nun ist[6])

$$\sum_{\varrho} \int\limits_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |F_1|\,|\vartheta_2 \vartheta_3|\, d(\operatorname{arc} w) \leqq \sum_{\varrho} \sqrt{\int\limits_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |F_1^2|\, d(\operatorname{arc} w)} \sqrt{\int\limits_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |\vartheta_2 \vartheta_3|^2\, d(\operatorname{arc} w)}$$

$$\leqq \Big(\sum_{\varrho} \int\limits_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |F_1^2|\, d(\operatorname{arc} w)\Big)^{1/2} \Big(\sum_{\varrho} \int\limits_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} |\vartheta_2 \vartheta_3|^2\, d(\operatorname{arc} w)\Big)^{1/2} \ll (n \log^2 n)^{1/2} (n \log n)^{1/2} = n \log^{3/2} n,$$

wobei (**2. 1.** 6. 1) und **2. 3** zur Anwendung kamen. Insgesamt kommt mithin für $s = 1$

$$\mathbf{T}_t \ll n^{(t-2)/2} T^{-1/2} n \log^{3/2} n \leqq n^{\omega-1} \log^{-A'} n.$$

3. 7. 3. In allen Fällen ist also nach **3. 7.** 1 und **3. 7.** 2

$$\mathbf{T}_t \ll n^{\omega-1} \log^{-A'} n.$$

§ 4. Einführung der singulären Reihe.

4. 1. Nach den Ergebnissen **3. 2**, **3. 3**, **3. 4.** 3, **3. 5.** 4, **3. 6.** 3 und **3. 7.** 3 des vorigen Paragraphen und nach der Ausgangsformel **2. 6** ist das Zwischenresulat

$$P \cdot \nu(n) = \mathbf{S}_0 + O(n^{\omega-1} \log^{-A'} n) \tag{4. 1. 1}$$

gesichert. Das in (**4. 1.** 1) vorkommende sog. Hauptglied

$$\mathbf{S}_0 = \sum_{\varrho} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} \prod_{\sigma} \Psi_{\varrho\sigma} \times \prod_{\tau} \theta_{\varrho\tau} \frac{dw}{w^{n+1}}$$

soll nun in diesem Paragraphen mit einer sog. singulären Reihe (die alsbald in Erscheinung treten wird) verglichen werden.

Nach **2. 1.** 1 und **2. 2.** 1 kann das Hauptglied in der Form

$$\mathbf{S}_0 = \sum_{\varrho} \Pi_\varrho \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} \xi_\varrho^{-\omega}(w) \frac{dw}{w^{n+1}} \tag{4. 1. 2}$$

geschrieben werden mit

$$(4.\,1.\,3)\qquad \omega = s + \frac{t}{2};\ \Pi_\varrho = k^{-t}\varrho^{\sum_\sigma R_\sigma(k)a_\sigma} \prod_\sigma N_\sigma(k)\frac{\mu}{\varphi}\left(\frac{k}{d_\sigma(k)}\right) \times \prod_\tau S_{k,b_\tau l}\,,$$

wobei nach **1. 1. 1**, **(2. 1.** 3. 3), **(2. 2.** 3. 3) wegen $|\varrho| = 1$ gilt

$$(4.\,1.\,4)\qquad \omega \geqq \frac{5}{2};\ \Pi_\varrho \ll k^{-\omega}\log^s\log(k+2) \ll \begin{cases} k^{-\omega+\frac{1}{4}} & \text{stets,} \\ k^{-\omega}\log n & \text{für } k \leqq T. \end{cases}$$

Ein Hilfssatz wird noch vorausgeschickt:

4. 2. Hilfssatz 9. *Für* $|\beta| = |-\mathfrak{Im}\,\xi| \leqq \pi$ *(dann ist* $|\xi| \leqq 2\pi - \varepsilon$*) gilt*

$$\xi_\varrho^{-\omega}(w) = \Xi_\varrho(w) + O(1)$$

mit

$$\Xi_\varrho(w) = \frac{1}{\Gamma(\omega)}\sum_{m=1}^{\infty} m^{\omega-1}(w\varrho^{-1})^m.$$

Beweis. Dieser Hilfssatz ist Spezialfall eines bekannten allgemeineren Satzes. Siehe etwa [6] oder [7], Nr. 66. (Dort steht s für $\omega - 1$, y für ξ bzw. s für $1 - \omega$, x für $w\varrho^{-1}$.) Vergleiche auch [5], Seite 24.

4. 3. Nach **(1. 12. 1)** ist, falls $w \in \mathfrak{C}_r$ aber $\notin \mathfrak{C}_{r\varrho}$,

$$|\xi| = \left|\frac{1}{n} - i\beta\right| \geqq |\beta| \geqq \frac{\pi}{kT};$$

also wird wegen **2. 7**

$$\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{\mathfrak{C}_r} - \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}}\right\}\xi_\varrho^{-\omega}(w)\frac{dw}{w^{n+1}} \ll \left\{\int_{\mathfrak{C}_r} - \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}}\right\}|\xi_\varrho^{-\omega}(w)|\,d(\operatorname{arc} w)$$

$$\leqq \left(\frac{kT}{\pi}\right)^\omega\left\{\int_{\mathfrak{C}_r} - \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}}\right\}d(\operatorname{arc} w) \ll (kT)^\omega.$$

Aus **(4. 1. 2)**, **(4. 1. 4)** und **3. 1** folgt daher

$$S_0 - \sum_\varrho \Pi_\varrho \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}_r}\xi_\varrho^{-\omega}(w)\frac{dw}{w^{n+1}} = \sum_\varrho \Pi_\varrho \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} - \int_{\mathfrak{C}_r}\right\}\xi_\varrho^{-\omega}(w)\frac{dw}{w^{n+1}}$$

$$(4.\,3.\,1)\qquad \ll (\log n)\,T^\omega \sum_\varrho 1 \ll T^{\omega+2}\log n \leqq n^{\omega+2}\log^{-A'} n.$$

Auf $\mathfrak{C}_r$ hat $\alpha = \operatorname{arc} w$ ein Intervall der Länge 2π zu durchlaufen. Wegen der Periodizität des Integranden darf man $-\pi + 2\pi\frac{l}{k} \leqq \alpha \leqq +\pi + 2\pi\frac{l}{k}$ (also $-\pi \leqq \beta \leqq +\pi$) annehmen. Dann kommt im Verein mit **2. 7**, **4. 2**, **(4. 1. 4)** und **2. 1. 5**

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}_r}\{\xi_\varrho^{-\omega} - \Xi_\varrho\}\frac{dw}{w^{n+1}} \ll \int_{\mathfrak{C}_r}|\xi_\varrho^{-\omega} - \Xi_\varrho|\,d(\operatorname{arc} w) \ll \int_{-\pi}^{+\pi} 1\cdot d\beta \ll 1;$$

$$(4.\,3.\,2)\quad \sum_\varrho \Pi_\varrho \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}_r}\{\xi_\varrho^{-\omega}(w) - \Xi_\varrho(w)\}\frac{dw}{w^{n+1}} \ll \log n \sum_\varrho k^{-\omega} \ll \log^2 n \leqq n^{\omega-1}\log^{-A'} n.$$

Insgesamt hat man also nach **(4. 3. 1)** und **(4. 3. 2)**

$$(4.\,3.\,3)\qquad S_0 = \sum_\varrho \Pi_\varrho \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}_r}\Xi_\varrho(w)\frac{dw}{w^{n+1}} + O(n^{\omega-1}\log^{-A'} n).$$

4. 4. Ausrechnung der Integrale in (**4. 3.** 3) ergibt nunmehr

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{C}_r} \Xi_\varrho(w)\frac{dw}{w^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{C}_r}\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^{\omega-1}}{\Gamma(\omega)\,\varrho^m}w^m\right\}\frac{dw}{w^{n+1}} = \frac{n^{\omega-1}}{\Gamma(\omega)\,\varrho^n};$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_0 &= \frac{n^{\omega-1}}{\Gamma(\omega)}\sum_{\varrho}\varrho^{-n}\,\mathbf{\Pi}_\varrho + O(n^{\omega-1}\log^{-A'}n)\\ &= \frac{n^{\omega-1}}{\Gamma(\omega)}\sum_{1\leq k\leq T}\sum_{l}\varrho^{-n}\mathbf{\Pi}_\varrho + O(n^{\omega-1}\log^{-A'}n).\end{aligned}$$

4. 5. Schließlich wird noch die Summe über k ins Unendliche erstreckt. Es ergibt sich wegen $|\varrho| = 1$ und (**4. 1.** 4), **3. 1**

$$\begin{aligned}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} - \sum_{1\leq k\leq T}\right\}\sum_{l}\varrho^{-n}\mathbf{\Pi}_\varrho &\ll \sum_{k>T}\sum_{l}k^{-\omega+1/4}\\ &\leqq \sum_{k>T}k^{-\omega+5/4} \leqq \sum_{k>T}k^{-5/4} < \int\limits_{[T]}^{\infty}k^{-5/4}dk\\ &= 4[T]^{-1/4} \ll T^{-1/4} = \log^{-A-9,5}n \leqq \log^{-A'}n,\end{aligned}$$

und daher kommt endlich aus **4. 4**

$$\mathfrak{S}_0 = \frac{1}{\Gamma(\omega)}n^{\omega-1}\,\mathfrak{S}(n) + O(n^{\omega-1}\log^{-A'}n). \tag{4. 5. 1}$$

Dabei ist (singuläre Reihe)

$$\mathfrak{S}(n) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l}\varrho^{-n}\mathbf{\Pi}_\varrho \tag{4. 5. 2}$$

gesetzt. Schreibt man die singuläre Reihe in der Form

$$\mathfrak{S}(n) = \sum_{k=1}^{\infty}W_n(k)\,, \tag{4. 5. 3}$$

so ist nach (**4. 1.** 3)

$$W_n(k) = N(k)\,k^{-t}\prod_{\sigma}\frac{\varphi}{\mu}\left(\frac{k}{d_\sigma(k)}\right)\times\sum\varrho_\sigma^{\sum R_\sigma(k)a_\sigma - n}\prod_{\tau}S_{k,b_\tau l} \tag{4. 5. 4}$$

mit (beachte **2. 1. 1**)

$$N(k) = \prod_{\sigma}N_\sigma(k) = \begin{cases}1 \text{ für } \left(\frac{k}{d_1}, K_1\right) = \cdots = \left(\frac{k}{d_s}, K_s\right) = 1,\\ 0 \text{ sonst}\end{cases} \tag{4. 5. 5}$$

4. 6. Für einen späteren Zweck sei noch sogleich bemerkt, daß die singuläre Reihe $\mathfrak{S}(n)$ gleichmäßig in n absolut konvergiert. Es ist nämlich nach (**4. 5. 2**), (**4. 1.** 4) und wegen $|\varrho| = 1$

$$W_n(k) = \sum_{l}\varrho^{-n}\mathbf{\Pi}_\varrho \ll \sum_{l}k^{-\omega+1/4} < k^{-\omega+5/4} \tag{4. 6. 1}$$

und daher wegen $\omega \geqq 5/2$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|W_n(k)| \ll \sum_{k=1}^{\infty}k^{-5/4} \ll 1.$$

§ 5. Endformel. Spezielle Folgerungen.

5. 1. Das Endresultat sei sogleich formuliert:

Hauptsatz 1. *Ist* $\mathsf{N}(n)$ *die in* **1. 5.** *definierte Lösungsanzahl, so gilt*

$$\mathsf{N}(n) = \frac{n^{\omega-1}}{\log^s n} \cdot \frac{1}{P \cdot \Gamma(\omega)} \cdot \mathfrak{S}(n) + O\left(\frac{n^{\omega-1}}{\log^s n} \cdot \frac{\log\log n}{\log n}\right). \tag{5. 1. 1}$$

Dabei ist ω *in* (**1. 1. 1**), P *in* (**2. 4. 1**), $\mathfrak{S}(n)$ *in* (**4. 5.** 3) *definiert. Es ist* P *von* n *unabhängig, und es ist* $\mathfrak{S}(n)$ *gleichmäßig in* n *beschränkt.*

Beweis. Trivial ist zunächst die Abschätzung

$$\nu(n) = \sum^{(n)} \prod_{\sigma} \log p_\sigma < \log^s n \cdot \sum^{(n)} 1 = \log^s n \cdot \mathsf{N}(n). \tag{5. 1. 2}$$

Es werde jetzt

$$\delta = \delta(n) = (s+1)\frac{\log\log n}{\log n}, \quad \text{also } n^\delta = \log^{s+1} n \tag{5. 1. 3}$$

gesetzt. Dann ist für genügend großes n sicher $\delta < \frac{1}{2}$ und daher

$$\left(\frac{1}{1-\delta}\right)^s - 1 = \left(1 + \frac{\delta}{1-\delta}\right)^s - 1 = \sum_{m=1}^{s} \binom{s}{m}\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^m \leqq \sum_{m=1}^{s}\binom{s}{m}(2\delta)^m \ll \delta. \tag{5. 1. 4}$$

Nun ist in

$$\sum^{(n)} 1 = \sum_{\sum_\sigma p_\sigma + \sum_\tau h_\tau g_\tau^2 = n} 1$$

der Beitrag der Glieder, wo mindestens ein $p_\sigma \leqq n^{1-\delta}$ ist, höchstens gleich dem s-fachen Beitrag der Glieder mit $p_1 \leqq n^{1-\delta}$, also

$$\leqq s \cdot n^{1/2} \cdot n^{1-\delta} \cdot n^{s-2} = s \cdot n^{\omega-1-\delta},$$

da ja g_1 bis g_t nur je $n^{1/2}$, p_1 nur $n^{1-\delta}$, p_2 bis p_{s-1} nur je n Werte annehmen können, und da p_s alsdann durch die Summationsvorschrift höchstens eindeutig bestimmt ist. Daher ist

$$\begin{aligned}
\mathsf{N}(n) &\leqq s \cdot n^{\omega-1-\delta} + \sum_{p_1,\ldots,p_s > n^{1-\delta}}^{(n)} 1 \\
&\leqq s \cdot n^{\omega-1-\delta} + \frac{1}{(1-\delta)^s \log^s n} \cdot \sum_{p_1,\ldots,p_s > n^{1-\delta}}^{(n)} \prod_\sigma \log p_\sigma \\
&\leqq s \cdot n^{\omega-1-\delta} + \frac{1}{(1-\delta)^s \log^s n}\, \nu(n).
\end{aligned} \tag{5. 1. 5}$$

Schließlich gilt nach (**4. 1. 1**) und (**4. 5.** 1)

$$\nu(n) = n^{\omega-1} \cdot \frac{1}{P \cdot \Gamma(\omega)} \cdot \mathfrak{S}(n) + O(n^{\omega-1}\log^{-A'} n); \tag{5. 1. 6}$$

also nach **4. 6**

$$\nu(n) \ll n^{\omega-1}. \tag{5. 1. 7}$$

Insgesamt ergibt sich aus (**5. 1. 2**), (**5. 1. 5**), (**5. 1. 4**), (**5. 1. 7**) und (**5. 1. 3**)

$$\begin{aligned}
0 \leqq \log^s n \cdot \mathsf{N}(n) - \nu(n) &\leqq s \cdot n^{\omega-1-\delta}\log^s n + \left(\frac{1}{(1-\delta)^s} - 1\right)\nu(n) \\
&\ll n^{\omega-1-\delta}\log^s n + \delta \cdot n^{\omega-1} \\
&= n^{\omega-1}\log^{-1} n + (s+1)\, n^{\omega-1}\frac{\log\log n}{\log n} \ll n^{\omega-1} \cdot \frac{\log\log n}{\log n};
\end{aligned}$$

$$\mathsf{N}(n) = \frac{\nu(n)}{\log^s n} + O\left(\frac{n^{\omega-1}}{\log^s n} \cdot \frac{\log\log n}{\log n}\right)$$

und das liefert in Verbindung mit (**5. 1. 6**) die Behauptung.

5. 2. Eine Folge $\mathfrak{Z}$ von natürlichen Zahlen heiße im folgenden zulässig, wenn (gem. **1. 16** gleichmäßig in n)

$$\mathfrak{S}(n) > C_1 > 0$$

gilt. Für zulässige Zahlen stellt alsdann (**5. 1.** 1) eine asymptotische Gleichung für $\mathsf{N}(n)$ dar, aus der insbesondere $\mathsf{N}(n) > 0$ zu entnehmen ist.

Die allgemeine Diskussion von $\mathfrak{S}(n)$ bleibe einer späteren Abhandlung vorbehalten. In zwei schon früher behandelten Spezialfällen ergeben sich indessen sofort die Endresultate.

5. 3. Der Spezialfall $K_1 = \cdots = K_s = b_1 = \cdots = b_t = 1$. Hier gilt

Satz 2. *Jede genügend große natürliche Zahl n ist in der Form*

$$n = p_1 + \cdots + p_\varkappa + g_1^2 + \cdots + g_t^2 \qquad \left(s + \frac{t}{2} > 0\right)$$

darstellbar und für die Anzahl der Darstellungen gilt

$$\mathsf{N}(n) = \mathsf{N}_{\varkappa,t}(n) = \frac{\pi^{t/2}}{\Gamma(s + t\,2)} \cdot \frac{n^{\varkappa+t/2-1}}{\log^s n} \cdot \mathfrak{S}^*_{\varkappa,t}(n) + O\left(\frac{n^{\varkappa+t/2-1}\log\log n}{\log^{s+1} n}\right)$$

mit

$$\mathfrak{S}^*_{\varkappa,t}(n) = \prod_p \left(1 + \frac{(-1)^{\varkappa+1}}{p^{t/2}(p-1)^\varkappa}\right) \times \prod_{\mathfrak{p}} \frac{\mathfrak{p}^{t/2}(\mathfrak{p}-1)^\varkappa + (-1)^\varkappa(\mathfrak{p}-1)}{\mathfrak{p}^{t/2}(\mathfrak{p}-1)^\varkappa + (-1)^{\varkappa+1}}$$

für $t \equiv 0 \pmod 4$;

$$\mathfrak{S}^*_{\varkappa,t}(n) = \prod_p \left(1 + \left(\frac{n}{p}\right)\frac{(-1)^\varkappa}{p^{(t-1)/2}(p-1)^\varkappa}\right) \times \prod_{\mathfrak{p}} \frac{\mathfrak{p}^{(t-1)/2}(\mathfrak{p}-1)^\varkappa}{\mathfrak{p}^{(t-1)/2}(\mathfrak{p}-1)^\varkappa + \left(\frac{n}{\mathfrak{p}}\right)(-1)^\varkappa}$$

für $t \equiv 1 \pmod 4$;

$$\mathfrak{S}^*_{\varkappa,t}(n) = \prod_p \left(1 + \frac{(-1)^{\varkappa+(p+1)/2}}{p^{t/2}(p-1)^\varkappa}\right) \times \prod_{\mathfrak{p}} \frac{\mathfrak{p}^{t/2}(\mathfrak{p}-1)^\varkappa + (-1)^{\varkappa+(\mathfrak{p}-1)/2}(\mathfrak{p}-1)}{\mathfrak{p}^{t/2}(\mathfrak{p}-1)^\varkappa + (-1)^{\varkappa+(\mathfrak{p}+1)/2}}$$

für $t \equiv 2 \pmod 4$;

$$\mathfrak{S}^*_{\varkappa,t}(n) = \prod_p \left(1 + \left(\frac{-n}{p}\right)\frac{(-1)^\varkappa}{p^{(t-1)/2}(p-1)^\varkappa}\right) \times \prod_{\mathfrak{p}} \frac{\mathfrak{p}^{(t-1)/2}(\mathfrak{p}-1)^\varkappa}{\mathfrak{p}^{(t-1)/2}(\mathfrak{p}-1)^\varkappa + \left(\frac{-n}{\mathfrak{p}}\right)(-1)^\varkappa}$$

für $t \equiv 3 \pmod 4$.

Dabei durchläuft p alle ungeraden Primzahlen, $\mathfrak{p}$ alle ungeraden Primteiler von n [7]).

Beweis. Im betrachteten Spezialfall wird nach (**4. 5.** 3) bis (**4. 5.** 5)

$$\mathfrak{S}(n) = \mathfrak{S}^*_{\varkappa,t}(n) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-t}\left(\frac{\mu(k)}{\varphi(k)}\right)^\varkappa \sum_l S^t_{k,l}\,\varrho^{-n}.$$

G. K. Stanley zeigte ([7], Lemma 11), daß $\mathfrak{S}^*_{\varkappa,t}(n)$ in der obengenannten Weise summiert werden kann, womit Satz 3 aus dem Hauptsatz folgt.

5. 4. Der Spezialfall $K_1 = \cdots = K_s = \mathfrak{K}$; $t = 0$. Hier gilt[8])

Satz 3a. *Jede genügend große natürliche Zahl n, die der Zulässigkeitsbedingung*

$$n \equiv a_1 + \cdots + a_s \pmod{\mathfrak{K}}; \quad n \equiv s \pmod 2$$

genügt, ist in der Form

$$n = p_1 + \cdots + p_s \ (s > 2) \ \textit{mit} \ p_\sigma \equiv a_\sigma \pmod{\mathfrak{K}}$$

darstellbar und für die Anzahl der Darstellungen gilt

$$(5.\,4.\,1) \quad \mathsf{N}(n) = \mathsf{N}^{\mathfrak{D}}_\varkappa(n) = \frac{1}{\varphi^s(\mathfrak{K})\,(s-1)!} \cdot \frac{n^{s-1}}{\log^s n} \cdot \mathfrak{S}^{\mathfrak{D}}_\varkappa(n) + O\left(\frac{n^{s-1}\log\log n}{\log^{s+1} n}\right)$$

[7]) Dies ist Satz 1 von *Halberstam* [13].

[8]) Dies ist Satz 3 meiner Arbeit [3], wo jedoch nichts über das Restglied ausgesagt ist.

mit

$$(5.\,4.\,2)\qquad \mathfrak{S}_s^{\mathfrak{D}}(n) = \Omega\cdot\mathfrak{K}\cdot\prod_{p\nmid n\mathfrak{K}}\left(1-\left(\frac{-1}{p-1}\right)^s\right)\times\prod_{\substack{p\nmid\mathfrak{K}\\ p\mid n}}\left(1-\left(\frac{-1}{p-1}\right)^{s-1}\right)$$

($\Omega = 1$ *oder* 2, *je nachdem* $\mathfrak{K} \equiv 0$ *oder* $1 \pmod 2$).

Dabei durchläuft p alle ungeraden Primzahlen, die den angegebenen Multiplikationsvorschriften genügen.

Für unzulässige n ist trivialerweise $\mathsf{N}(n) = 0$.

Beweis. Im betrachteten Spezialfall wird nach (**4. 5.** 3) bis (**4. 5.** 5)

$$\mathfrak{S}(n) = \mathfrak{S}_s^{\mathfrak{D}}(n) = \sum_{k=1}^{\infty} N(k)\left[\frac{\mu}{\varphi}\left(\frac{k}{d}\right)\right]^s \sum_l \varrho^{h\sum_\sigma a_\sigma - n}$$

H. Rademacher ([8], Gl. (5. 28), (5. 292)) zeigte, daß $\mathfrak{S}_s^{\mathfrak{D}}(n)$ in der Form (**5. 4.** 2) summiert werden kann, womit Satz 3a aus dem Hauptsatz folgt.

5. 5. Der Spezialfall a_σ, K_σ beliebig; $t = 0$. Es bezeichne $\mathfrak{K}$ das kleinste gemeinsame Vielfache $\{K_1, \ldots, K_s\}$ und es sei $\varkappa(n)$ die Anzahl der geordneten s-tupel von primen Resten $a_1^{\#}, \ldots, a_s^{\#} \pmod{\mathfrak{K}}$ mit

$$\begin{cases} a_\sigma^{\#} \equiv a_\sigma \pmod K;\ (a_\sigma^{\#}, \mathfrak{K}) = 1\ (\sigma = 1, \ldots, s). \\ \sum\limits_\sigma a_\sigma^{\#} \equiv n \pmod{\mathfrak{K}}. \end{cases}$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt

Satz 3b. *Jede genügend große natürliche Zahl n, die der Zulässigkeitsbedingung*

$$\varkappa(n) > 0;\ n \equiv s \pmod 2$$

genügt, ist in der Form

$$n = p_1 + \cdots + p_s\ (s > 2)\ \textit{mit}\ p_\sigma \equiv a_\sigma \pmod{K_\sigma}$$

darstellbar, und für die Anzahl der Darstellungen gilt

$$\mathsf{N}(n) = \mathsf{N}_s^{\#}(n) = \frac{\varkappa(n)}{\varphi^s(\mathfrak{K})\,(s-1)!}\cdot\frac{n^{s-1}}{\log^s n}\cdot\mathfrak{S}_s^{\mathfrak{D}}(n) + O\left(\frac{n^{s-1}\log\log n}{\log^{s+1} n}\right),$$

wobei $\mathfrak{S}_s^{\mathfrak{D}}(n)$ *durch* (**5. 4.** 2) *gegeben ist.*

Für unzulässige n ist trivialerweise $\mathsf{N}_s(n) = 0$ *oder* $=$ *dem 0-Glied, je nachdem* $n \not\equiv s \pmod 2$ *oder* $n \equiv s \pmod 2$ (*und also* $\varkappa(n) = 0$) *ist.*

Beweis. (Vgl. den Fall $s = 2$ bei van der Corput [10]). Der triviale Fall $n \not\equiv s \bmod 2$) darf ausgeschlossen werden. Die Lösungsanzahl der Aufgabe

$$n = \sum_\sigma p_\sigma;\ p_\sigma \equiv a_\sigma \pmod{K_\sigma}$$

ist gleich der Summe der Lösungsanzahlen der $\prod\limits_\sigma \frac{\mathfrak{K}}{K_\sigma}$ Teilaufgaben

$$n = \sum_\sigma p_\sigma;\ p_\sigma \equiv a_\sigma^{\#} \pmod{\mathfrak{K}},$$

wenn hierin $a_\sigma^{\#}$ jeweils eine der $\frac{\mathfrak{K}}{K_\sigma}$ Zahlen $\equiv a_\sigma \pmod{K_\sigma}$ eines Restsystems modulo $\mathfrak{K}$ bedeutet.

Ist bei einer dieser Teilaufgaben $(a_\sigma^{\#}, \mathfrak{K}) > 1$ für irgendein σ, etwa $\sigma = 1$, so kommt für p_1 höchstens ein Wert in Frage. Da ferner $p_2, \ldots, p_{s-1}$ höchstens je n Werte haben können, und da p_s alsdann höchstens eindeutig bestimmt ist, ist also in diesem Falle die Lösungsanzahl der Teilaufgabe

$$1\cdot n^{s-2}\cdot 1 \ll \frac{n^{s-1}\log\log n}{\log^{s+1} n}.$$

In den Teilaufgaben, in denen $(a_\sigma^+, \mathfrak{K}) = 1$ für $\sigma = 1, \ldots, s$ gilt, wird nach Satz 3a die Lösungsanzahl durch (**5. 4.** 1) gegeben in den $\varkappa(n)$ Fällen, in denen außerdem $n \equiv \sum a_\sigma^+ \pmod{\mathfrak{K}}$ ist, und sie ist $= 0$, wenn dies nicht der Fall ist.

Insgesamt folgt die Behauptung, da $\varkappa(n) \leqq \prod_\sigma \frac{\mathfrak{K}}{K_\sigma} \ll 1$ ist.

Literaturverzeichnis.

[1] *J. Tannery-J. Molk*, Eléments de la théorie des fonctions elliptiques, Tome II, Paris 1896.

[2] *E. Landau*, Vorlesungen über Zahlentheorie, Band I, Leipzig 1927.

[3] *A. Zulauf*, Beweis einer Erweiterung des Satzes von Vinogradov zum Goldbachschen Problem, Journal für Mathematik **190** (1952), 169–198.

[4] *E. Landau*, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Band I, Leipzig und Berlin 1909.

[5] *H. D. Kloosterman*, Over het splitsen van positieve geheele getallen in een som van kwadraten, Dissertation Groningen 1924.

[6] *J. C. Kluyver*, Verallgemeinerung einer bekannten Formel, Nieuw Archief vor Wiskunde (2) **4** (1900), 284–291.

[7] *E. Lindelöf*, Le Calcul des Résidus, Paris 1905.

[8] *G. K. Stanley*, On the representation of a number as the sum of squares and primes, Proceed. London Math. Soc. (2) **29** (1929), 122–144.

[9] *H. Rademacher*, Über eine Erweiterung des Goldbachschen Problems, Math. Zeitschrift **25** (1925), 627–657.

[10] *J. G. van der Corput*, Über Summen von Primzahlen und Primzahlquadraten, Math. Annalen **116** (1938), 1–50.

[11] *G. H. Hardy*, On the representation of a number as the sum of any number of squares, and in particular of five, Transact. American Math. Soc. **21** (1920), 255–284.

[12] *G. H. Hardy-J. E. Littlewood*, Some problems of partitio numerorum III: On the expression of a number as a sum of primes, Acta Math. **44** (1922), 1–70.

[13] *H. Halberstam*, On the representation of large numbers as sums of squares, higher powers and primes, Proceed. London Math. Soc. (2) **53** (1951), 363–380.

[14] *I. M. Vinogradov*, Eine neue Methode in der analytischen Zahlentheorie, Acad. Sci. URSS, Trav. (Trudy) Inst. math. Stekloff **10** (1937).

[15] *I. M. Vinogradov*, Representation of an odd number as a sum of three primes, C. R. (Doklady) Acad. Sci URSS (2) **15** (1937), 291–294.

[16] *I. M. Vinogradov*, Some theorems concerning the theory of primes, Rec. (Sbornik) math. Moscou (2) **2** (1937), 179–195.

[17] *T. Estermann*, Proof that every large integer is the sum of two primes and a square, Proceed. London Math. Soc. (2) **42** (1936), 501–516.

[18] *A. Walfisz*, Zur additiven Zahlentheorie, Acta arithmetica **1** (1935) 501–516.

[19] *A. Walfisz*, Zur additiven Zahlentheorie II, Math. Zeitschrift **40** (1936), 592–607.

[20] *S. Chowla*, The representation of a number as a sum of four squares and a prime, Acta arithmetica **1** (1935), 115–122.

[21] *Ju. V. Linnik*, On the possibility of a unique method in certain problems of additive and distributive prime number theory, C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (NS) **49** (1945) 3–7.

[22] *Ju. V. Linnik*, On the density of zeros of Dirichlets L-series, Bull. (Izvestia) Acad. Sci. URSS **10** (1946), 35–46.

[23] *Ju. V. Linnik*, A new proof of the Goldbach-Vinogradov theorem, Rec. (Sbornik) math. Moscou (NS) **19** (61) (1946), 3–8.

[24] *N. G. Čudakov*, On Goldbach-Vinogradovs theorem, Annals of Math. (2) **48** (1947), 515–542.

Anmerkung. Nr. [10] bis [24] des Literaturverzeichnisses werden nur in der Einleitung und bei historischen Bemerkungen zitiert.

Eingegangen 29. März 1952.

Zur Theorie der kommutativen Integritätsbereiche.

Von *Wolfgang Krull* in Bonn.

Der Hauptteil der vorliegenden Note beschäftigt sich in erster Linie mit der Stellung des Satzes von der eindeutigen Primelementzerlegung (Z. P. E.) im Rahmen der allgemeinen Ringtheorie. Den Ausgangspunkt bildet die Bemerkung, daß die Untersuchung eines Integritätsbereiches $\mathfrak{R}$ ohne Verwischung der idealtheoretischen Feinheiten zurückgeführt werden kann auf das Studium der Quotientenringe $\mathfrak{R}_\tau$, die durch die maximalen Primideale $\mathfrak{m}^{(\tau)}$ von $\mathfrak{R}$ bestimmt werden [1]). Daran anschließend wird in § 1 gezeigt: Ein $\mathfrak{R}$-Ideal $\mathfrak{u}$ ist dann und nur dann umkehrbar, wenn es eine endliche Basis besitzt und für jedes τ das Ideal $\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{R}_\tau$ ein Hauptideal wird. In § 2 wird dieses Ergebnis speziell auf v-Ideale und endliche diskrete Hauptordnungen angewandt. Es zeigt sich, daß bei einer endlichen diskreten Hauptordnung $\mathfrak{R}$ diejenigen maximalen Primideale $\mathfrak{m}^{(\tau)}$, deren zugehöriger Quotientenring $\mathfrak{R}_\tau$ nicht dem Z. P. E. genügt, in gewisser Hinsicht als singulär angesehen werden müssen. Damit erhebt sich zwanglos die Frage nach hinreichenden Bedingungen dafür, daß ein Ring $\mathfrak{R}$ mit einem einzigen maximalen Primideal $\mathfrak{m}$ ein Z. P. E.-Ring (Ring mit Z. P. E.) ist. Natürlich ist hier nicht der allgemeinste Fall angreifbar. Wohl aber liegen wichtige Resultate vor, falls $\mathfrak{R}$ einen *p-Reihenring* (regulären Stellenring) darstellt, d. h. falls in $\mathfrak{R}$ die Maximalbedingung für ganze Ideale gilt und das maximale Primideal $\mathfrak{m}$ eine Basis besitzt, deren Gliederzahl gleich der Dimension des Nullideals von $\mathfrak{R}$ ist[2]). Für p-Reihenringe haben Cohen und Zariski gezeigt: Jeder vollständige, unverzweigte p-Reihenring bzw. jeder endliche p-Reihenring aus algebraischen Funktionen ist ein Z. P. E.-Ring[3]). Darüber hinaus werden in § 3 der vorliegenden Note die Sätze bewiesen:

Ein p-Reihenring ist stets ein Z. P. E.-Ring, wenn für seine vollständige Hülle der Z. P. E. gilt. Auch ein verzweigter vollständiger p-Reihenring ist ein Z. P. E.-Ring, wenn sein Nullideal die Dimension 1 *oder* 2 *besitzt.*

Damit ist die Vermutung äußerst plausibel gemacht, daß überhaupt alle p-Reihenringe Z. P. E.-Ringe sind; jedenfalls hat man in dieser Hinsicht nur noch die verzweigten vollständigen p-Reihenringe zu untersuchen, bei denen das Nullideal mindestens die Dimension 3 besitzt. § 4 bringt anknüpfend an die in § 3 benutzten Beweismethoden einige Bemerkungen über das Verhalten der Primideale eines Stellenrings beim Übergang zur vollständigen Hülle.

---

[1]) Zu den Begriffen *Quotientenring eines Primideals, v-Ideals, endliche diskrete Hauptordnung* vgl. etwa *Krull* [1], Nr. 7, 37, 43.

[2]) Zur Theorie der Stellenringe und p-Reihenringe vgl. vor allem *Krull* [2], *Chevalley* [1], *Cohen* [1]. Die wichtigsten Definitionen (Stellenring, vollständiger Stellenring, vollständige Hülle, Unverzweigtheit) sind in § 3 der Note nochmals kurz formuliert. Statt von regulären Stellenringen spreche ich (im Gegensatz zu Chevalley, Cohen, Zariski) lieber von p-Reihenringen, weil das Wort „regulär" allzu abgegriffen ist. Man muß dann allerdings beachten, daß die p-adischen Ringe von *Cohen* im Sinne des Textes spezielle p-Reihenringe sind.

[3]) *Cohen* [1] bzw. *Zariski* [1]. Der Begriff *„endlicher p-Reihenring aus algebraischen Funktionen"* wird in § 4 unserer Note genauer präzisiert.

In § 5 wird die Bedeutung der Diskriminantentheorie für das Z. P. E.-Problem herausgearbeitet. Zunächst ergibt sich leicht: Ist $\mathfrak{R}$ ein unverzweigter p-Reihenring mit dem Quotientenkörper $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{S}$ der Ring aller von $\mathfrak{R}$ ganz abhängigen Elemente aus einem endlichen algebraischen Oberkörper $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{K}$, und ist $\mathfrak{S}$ im Sinne der Diskriminantentheorie hinsichtlich $\mathfrak{R}$ unverzweigt, so ist für jedes der endlich vielen maximalen Primideale $\widetilde{\mathfrak{m}}_\tau$ von $\mathfrak{S}$ der zugehörige Quotientenring $\mathfrak{S}_\tau$ ein unverzweigter p-Reihenring[4]). Damit ist der Anschluß an § 3 hergestellt.

Darüber hinaus kann man bei einer endlichen unverzweigten Erweiterung $\mathfrak{S}$ eines beliebigen Z. P. E.-Ringes $\mathfrak{R}$ wenigstens ein Teilergebnis gewinnen, das die Vermutung plausibel macht, daß für jedes $\mathfrak{S}$-Primideal $\widetilde{\mathfrak{p}}$ immer der zugehörige Quotientenring $\mathfrak{S}_{\widetilde{\mathfrak{p}}}$ ein Z. P. E.-Ring sein muß. (Die Schwierigkeiten, die sich dem vollständigen Beweis dieser Vermutung entgegenstellen, entstehen durch das mögliche Auftreten von $\mathfrak{S}$-Primidealen $\mathfrak{p}$, deren Restklassenring $\mathfrak{S}/\mathfrak{p}$ nicht ganz abgeschlossen ist.)

In § 6 werden an einem elementaren Beispiel die Verhältnisse veranschaulicht, mit denen man bei einem Stellenring, der kein p-Reihenring ist, bzw. bei einer verzweigten Erweiterung $\mathfrak{S}$ eines (unverzweigten) p-Reihenringes $\mathfrak{R}$ rechnen muß. Es wird so sichergestellt, daß die Beschränkung auf p-Reihenringe bzw. unverzweigte Erweiterungen in § 3 bis § 5 unvermeidbar ist.

§ 7 und § 8 hängen mit dem Hauptteil der Note nur ganz locker zusammen, — im wesentlichen durch das Anknüpfen an § 1 und eine dort bei den umkehrbaren Idealen auftretende Schwierigkeit. Während in § 1 bis § 6 die Bildung der Quotientenringe $\mathfrak{R}_\tau$ bzw. beliebiger Primidealquotientenringe $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ nur ein wichtiges Hilfsmittel im Rahmen weitergehender Untersuchungen darstellt, handelt es sich in § 7 und § 8 darum, die allgemeine Theorie der Quotientenringe selbst in verschiedenen Richtungen zu ergänzen. Den Ausgangspunkt liefert die Bemerkung: Ist Σ irgendeine Menge von multiplikativ abgeschlossenen Systemen S_μ aus $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_\mu$ der Ring aller Quotienten $\frac{a}{b}$ $(a \in \mathfrak{R},\, b \in S_\mu)$ und ist $\mathfrak{R} = \bigcap_\mu \mathfrak{R}_\mu$, so erhält man eine $'$-Operation im Sinne der allgemeinen Idealtheorie[5]), wenn man jedem $\mathfrak{R}$-Ideal $\mathfrak{a}$ das Ideal $\mathfrak{a}^\Sigma = \bigcap_\mu(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{R}_\mu)$ zuordnet („Σ-Operation"). Allerdings ist zu beachten, daß bei den $'$-Operationen grundsätzlich unterschiedlos ganze und nichtganze Ideale betrachtet werden, während bei einem einzelnen Quotientenring $\mathfrak{R}_\mu$ nur zu einem *ganzen* $\mathfrak{R}_\mu$-Ideal ein eindeutig zugeordnetes (ganzes) $\mathfrak{R}$-Ideal existiert. Hieraus entsteht bei den Σ-Idealen eine gewisse Schwierigkeit, die vor allem beim Studium der umkehrbaren Ideale lästig ist und die in § 7 genauer analysiert wird. Es zeigt sich, daß man nur unter gewissen Endlichkeitsvoraussetzungen zu voll befriedigenden Sätzen kommt.

Schon früher wurde von mir eine andere Möglichkeit betrachtet, den der Quotientenringbildung zu Grunde liegenden Gedanken zur Einführung einer $'$-Operation zu benützen. Dabei wurde an Stelle einer Menge Σ von multiplikativ abgeschlossenen Elementsystemen S_μ ein einziges multiplikativ abgeschlossenes System Λ von Idealen $\mathfrak{e}_\sigma = (a_1^{(\sigma)}, \ldots, a_{\nu_\sigma}^{(\sigma)})$ gesetzt („Λ-Operation"). In § 8 wird nun der Zusammenhang zwischen Σ- und Λ-Operationen unter passenden Endlichkeitsannahmen genauer untersucht. Dabei erhält man insbesondere für *Noethersche Ringe* (Ringe mit Maximalbedingung) den einfachen Satz, daß jede Σ-Operation auch als Λ-Operation gedeutet werden kann und umgekehrt.

---

[4]) Zur Diskriminantentheorie vgl. *Krull* [3]. Man beachte, daß das Wort „unverzweigt" in dem angeführten Satz (der übrigens in § 5 in einer etwas allgemeineren Fassung auftritt als hier in der Einleitung), zweimal in verschiedenem Sinne gebraucht ist.

[5]) Zum Begriff der $'$-Operation vgl. *Krull* [1], Nr. 43.

§ 1. Umkehrbare Ideale.

Es sei $\mathfrak{R}$ ein beliebiger Integritätsbereich. Betrachtet werden in dem Quotientenkörper $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{R}$ beliebige ganze oder nichtganze $\mathfrak{R}$-Ideale $\neq (0)$. Mit $a, b, \ldots$ bzw. $\alpha, \beta, \ldots$ bezeichnen wir Elemente aus $\mathfrak{R}$ bzw. $\mathfrak{K}$, mit $\mathfrak{a}^{-1}$ das Ideal aller der α, für die $\alpha \cdot \mathfrak{a} \subset \mathfrak{R}$ ist. Ist $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{R}$, so heißt $\mathfrak{a}$ *umkehrbar*. Ein Primideal $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{R}$ wird *maximal* genannt, wenn zwischen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{p}$ kein echtes Zwischenideal liegt. Häufig benutzt wird der Satz: Jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{R}$ ist in mindestens einem maximalen Primideal enthalten. Von den umkehrbaren Idealen $\mathfrak{u}$ weiß man: Die Menge aller $\mathfrak{u}$ bildet eine multiplikative Gruppe $\mathfrak{G}_u$ mit dem Einheitselement $\mathfrak{R}$. Die Menge aller Hauptideale bildet eine Untergruppe $\mathfrak{G}_h$ von $\mathfrak{G}_u$. Jedes umkehrbare Ideal ist *endlich*, d. h. es besitzt eine endliche Basis[6]).

Satz 1. *Gibt es in $\mathfrak{R}$ nur endlich viele maximale Primideale $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$, so ist jedes umkehrbare Ideal $\mathfrak{u}$ Hauptideal.*

Beweis. Für jedes i gibt es ein Elementepaar $\alpha_i \in \mathfrak{u}$, $\beta_i \in \mathfrak{u}^{-1}$ derart, daß $\alpha_i \beta_i \notin \mathfrak{m}_i$, denn anderenfalls wäre $\mathfrak{u}\mathfrak{u}^{-1} \subset \mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{R}$. Durch eine bekannte Konstruktion findet man weiter für jedes i ein b_i derart, daß $b_i \notin \mathfrak{m}_i$, $b_i \in \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_{i-1} \cap \mathfrak{m}_{i+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n$[7]). Es ist dann: $b_i \beta_i \mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_{i-1} \cap \mathfrak{m}_{i+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n$, $b_i \beta_i \mathfrak{u} \not\subset \mathfrak{m}_i$ und daraus ergibt sich für $\alpha^{-1} = b_1\beta_1 + \cdots + b_n\beta_n$ sofort: $\alpha^{-1}\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{R}$, $\alpha^{-1}\mathfrak{u} \not\subset \mathfrak{m}_i (i = 1, \ldots, n)$; $\alpha^{-1}\mathfrak{u} = \mathfrak{R}$; $(\alpha^{-1}) = \mathfrak{u}^{-1}$, $(\alpha) = \mathfrak{u}$. — Bei beliebigem $\mathfrak{R}$ seien $\mathfrak{m}^{(\tau)}$ die mit Hilfe irgendeiner Indexmenge durchnumerierten maximalen $\mathfrak{R}$-Primideale, und es sei $\mathfrak{R}_\tau$ der zu $\mathfrak{m}^{(\tau)}$ gehörige *Quotientenring*, also der Ring aller Quotienten $a \cdot b^{-1}$ $(b \notin \mathfrak{m}^{(\tau)})$. Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges $\mathfrak{R}$-Ideal, so setzen wir $\mathfrak{a}_\tau = \mathfrak{a}\mathfrak{R}_\tau$, $(\mathfrak{a}^{-1})_\tau = \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{R}_\tau = \mathfrak{a}_\tau^{-1}$. Es ist dann immer $\mathfrak{a} = \bigcap_\tau \mathfrak{a}_\tau$, weil für jedes $\alpha \in \bigcap_\tau \mathfrak{a}_\tau$ das Ideal $\alpha^{-1}\mathfrak{a} \cap \mathfrak{R} = (\alpha) : \mathfrak{a}$ in keinem $\mathfrak{m}^{(\tau)}$ enthalten und damit gleich $\mathfrak{R}$ ist.

Satz 2. *$\mathfrak{a}$ ist dann und nur dann umkehrbar, wenn $\mathfrak{a}$ endlich und $\mathfrak{a}_\tau$ für jedes τ ein Hauptideal ist.*

Beweis. a) Ist $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{R}$, so ist auch $\mathfrak{a}_\tau\mathfrak{a}_\tau^{-1} = \mathfrak{R}_\tau$, und es muß $\mathfrak{a}_\tau$ nach Satz 1 ein Hauptideal sein, weil $\mathfrak{R}_\tau$ nur das einzige maximale Primideal $\mathfrak{m}_\tau^{(0)}$ besitzt; daß $\mathfrak{a}$ im Falle der Umkehrbarkeit endlich ist, wurde schon früher festgestellt. —

bα) Angenommen, es sei gezeigt, daß $\mathfrak{a}_\tau^{-1} = (\mathfrak{a}_\tau)^{-1}$ ist für jedes τ. Ist dann stets

$$\mathfrak{a}_\tau(\mathfrak{a}_\tau)^{-1} = \mathfrak{a}_\tau\mathfrak{a}_\tau^{-1} = \mathfrak{R}_\tau,$$

so folgt:

$$\mathfrak{R} = \bigcap_\tau \mathfrak{R}_\tau = \bigcap_\tau \mathfrak{a}_\tau\mathfrak{a}_\tau^{-1} = \bigcap_\tau (\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1})\,\mathfrak{R}_\tau = \bigcap_\tau (\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1})_\tau = \mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}.$$

bβ) Die volle Richtigkeit von Satz 2 ergibt sich angesichts von a) und bα) aus dem an sich bemerkenswerten

Satz 3. *Ist $\mathfrak{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ endlich, so ist immer $\mathfrak{a}_\tau^{-1} = (\mathfrak{a}_\tau)^{-1}$.*

Beweis. Ist nämlich $\gamma \in (\mathfrak{a}_\tau)^{-1}$, das heißt $\gamma\alpha_i \in \mathfrak{R}_\tau$ $(i = 1, \ldots, n)$, so gibt es ein $c \notin \mathfrak{m}^{(\tau)}$ derart, daß $(c\gamma)\alpha_i \in \mathfrak{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$, d. h. $c\gamma \in \mathfrak{a}^{-1}$ ist, und daraus folgt $\gamma \in \mathfrak{a}_\tau^{-1}$ wegen $c^{-1} \in \mathfrak{R}_\tau$. Es ist also $(\mathfrak{a}_\tau)^{-1} \subset \mathfrak{a}_\tau^{-1}$. Andererseits wird immer $\mathfrak{a}_\tau^{-1} \subset (\mathfrak{a}_\tau)^{-1}$, weil $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}^{-1} \subset \mathfrak{R}$ stets $\mathfrak{a}_\tau\mathfrak{a}_\tau^{-1} = (\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}) \cdot \mathfrak{R}_\tau \subset \mathfrak{R}_\tau$ nach sich zieht. —

Satz 2 und Satz 3 werden im negativen Sinne ergänzt durch:

Satz 4. *Es wird $(\mathfrak{a}_\tau)^{-1} \neq \mathfrak{a}_\tau^{-1}$ bei passender Wahl von $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{m}^{(\tau)}$, und es kommt vor, daß $\mathfrak{a}$ nicht umkehrbar ist, obwohl es alle $\mathfrak{a}_\tau$ sind.*

---

[6]) Zur Existenz der maximalen Primideale vgl. z. B.: *W. Krull*, Idealtheorie in Ringen ohne Endlichkeitsbedingung, Mathematische Annalen **101** (1929), S. 729—744. — Zu den umkehrbaren Idealen vgl.: *W. Krull*, Ein Hauptsatz über umkehrbare Ideale, Math. Zeitschr. **31** (1930), S. 558.

[7]) Da $\mathfrak{m}_i$ niemals $\mathfrak{m}_k \neq \mathfrak{m}_i$ enthält, gibt es ein $c_{ik} \in \mathfrak{m}_k$, $\notin \mathfrak{m}_i$. Man setze $b_i = \prod_{k \neq i} c_{ik}$.

Beweis. Es sei etwa $\mathfrak{R}$ der Ring aller ganzen algebraischen Zahlen, $\mathfrak{m}^{(0)}$ sei ein festes (notwendig maximales) Primideal aus $\mathfrak{R}$[8]). Die durch $\mathfrak{m}^{(0)}$ bestimmte Bewertung B_0 von $\mathfrak{K}$ sei wie üblich so normiert, daß die in $\mathfrak{m}^{(0)}$ liegende Primzahl p_0 den Wert 1 erhält. $\mathfrak{q} < \mathfrak{R}$ sei das Ideal aller der α, die in B_0 mindestens den Wert 1 haben. Dann ist $\mathfrak{q}^{-1} = \mathfrak{R}$, $\mathfrak{q}\mathfrak{q}^{-1} = \mathfrak{q} \neq \mathfrak{R}$. Denn jedes nicht in $\mathfrak{R}$ liegende $\alpha \in \mathfrak{K}$ hat in unendlich vielen Bewertungen von $\mathfrak{K}$ negative Werte und zu jeder Bewertung $B_\tau \neq B_0$ von $\mathfrak{K}$ gibt es ein $a \in \mathfrak{q}$ vom Werte 0 in B_τ. — Andererseits hat man $\mathfrak{q}_\tau = \mathfrak{R}_\tau$ für $\tau \neq 0$ und $\mathfrak{q}_0 = p_0\mathfrak{R}$, es sind also alle $\mathfrak{q}_\tau$ Hauptideale und damit umkehrbar. Ferner wird $\mathfrak{q}_0^{-1} = \mathfrak{R}_0$, $(\mathfrak{q}_0)^{-1} = p_0\mathfrak{R}_0 \neq \mathfrak{R}_0$.

Auf die Schwierigkeiten, die sich aus Satz 4 ergeben, werden wir in § 5 in größerem Zusammenhang ausführlich zurückkommen.

§ 2. v-Ideale und endliche diskrete Hauptordnungen.

Die Symbole $\mathfrak{m}^{(\tau)}$, $\mathfrak{a}_\tau$ usw. haben dieselbe Bedeutung wie in § 1. Das Ideal $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^v$ wird wie üblich *v-Ideal* genannt, wenn ein Ideal $\mathfrak{c}$ derart existiert, daß $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}^{-1}$. Zu jedem Ideal $\mathfrak{a}$ gibt es ein kleinstes umfassendes v-Ideal, nämlich $\mathfrak{a}^v = (\mathfrak{a}^{-1})^{-1}$. Es ist stets $(\mathfrak{a}^v)^v = \mathfrak{a}^v$. Unter dem *v-Produkt* der Ideale $\mathfrak{a}^v\,\mathfrak{f}^v$ verstehen wir $(\mathfrak{a}^v\mathfrak{f}^v)^v = (\mathfrak{a}\mathfrak{f})^v$. Folgt aus $(\mathfrak{a}\mathfrak{f})^v = (\mathfrak{a}\mathfrak{c})^v$ stets $\mathfrak{f}^v = \mathfrak{c}^v$, so sagen wir, es gälte der *v-Kürzungssatz.* In den Fällen, in denen man statt der Dedekindschen die v-Ideale benutzt, wird man in der Regel zum mindesten die Gültigkeit des v-Kürzungssatzes erwarten. Andererseits kommt man von verschiedenen Seiten her auf die Frage, in welchen Ringen bei v-Idealen das endliche Idealprodukt mit dem v-Produkt zusammenfällt, also $\mathfrak{a}^v\mathfrak{b}^v = (\mathfrak{a}^v\mathfrak{b}^v)^v$ gilt.

Satz 5. *$\mathfrak{R}$ genügt dann und nur dann den beiden Bedingungen:*

1) *Es gilt der v-Kürzungssatz.*
2) *Es ist stets* $\mathfrak{a}^v\mathfrak{b}^v = (\mathfrak{a}^v\mathfrak{b}^v)^v$.

wenn alle v-Ideale umkehrbar sind, d. h. (nach § 1), *wenn jedes v-Ideal endlich ist und durchweg* $\mathfrak{a}_\tau^v$ *ein Hauptideal darstellt.*

Beweis. a) Es gelte der v-Kürzungssatz und es existiere zu $\alpha \in \mathfrak{K}$ ein $a \neq 0$ derart, daß $a\alpha^i \in \mathfrak{R}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Dann wird $\mathfrak{a}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ für $\mathfrak{a} = (1, \alpha, \alpha^2, \ldots)$ und damit erst recht $(\mathfrak{a}^v\mathfrak{a}^v)^v = (\mathfrak{a}^v\mathfrak{R})^v$. Nach dem v-Kürzungssatz ist also $\mathfrak{a}^v = \mathfrak{R}^v = \mathfrak{R}$, $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{R}$, d. h. $a\alpha^i \in \mathfrak{R}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ zieht $\alpha \in \mathfrak{R}$ nach sich, $\mathfrak{R}$ ist „vollständig ganz abgeschlossen". Daraus folgt nach einem bekannten Satz weiter $(\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1})^v = \mathfrak{R}$ für jedes v-Ideal $\mathfrak{a}$. Gilt also außer dem v-Kürzungssatz (Bedingung 1) noch Bedingung 2, so hat man $\mathfrak{a}^v(\mathfrak{a}^v)^{-1} = \mathfrak{R}$ für alle v-Ideale[9]).

b) Sind alle v-Ideale umkehrbar, so hat man

$$(\mathfrak{a}^v\mathfrak{b}^v)(\mathfrak{b}^v)^{-1}(\mathfrak{a}^v)^{-1} = (\mathfrak{a}^v(\mathfrak{a}^v)^{-1})(\mathfrak{b}^v(\mathfrak{b}^v)^{-1}) = \mathfrak{R}\mathfrak{R} = \mathfrak{R}, \quad \mathfrak{a}^v\mathfrak{b}^v = ((\mathfrak{a}^v)^{-1}(\mathfrak{b}^v)^{-1})^{-1} = (\mathfrak{a}^v\mathfrak{b}^v)^v$$

(Bedingung 2). Weiter ergibt sich aus $(\mathfrak{a}^v\mathfrak{b}^v)^v = \mathfrak{a}^v\mathfrak{b}^v = (\mathfrak{a}^v\mathfrak{c}^v)^v = \mathfrak{a}^v\mathfrak{c}^v$ sofort

$$(\mathfrak{a}^v)^{-1}(\mathfrak{a}^v\mathfrak{b}^v) = (\mathfrak{a}^v)^{-1}(\mathfrak{a}^v\mathfrak{c}^v) = \mathfrak{b}^v = \mathfrak{c}^v \qquad \text{(Bedingung 1)}.$$

Satz 6. *Genügt $\mathfrak{R}$ den Bedingungen 1 und 2 von Satz 5, und gibt es in $\mathfrak{R}$ nur endlich viele maximale Primideale, so ist jedes v-Ideal Hauptideal.*

Satz 6 folgt sofort aus Satz 5 und Satz 1 von § 1.

---

[8]) Zu den unendlichen algebraischen Zahlkörpern vgl. *Krull* [1], Nr. 44. — Daß jedes $\alpha \neq 0$ aus dem Körper $\mathfrak{K}$ *aller* algebraischen Zahlen in unendlich vielen Bewertungen B_τ Nichteinheit ist, folgt aus der Tatsache, daß zu jeder Bewertung B eines unendlichen algebraischen Zahlkörpers $\mathfrak{E}$ ein endlicher algebraischer Oberkörper $\mathfrak{E}_1$ so bestimmt werden kann, daß B mindestens zwei verschiedene Fortsetzungen auf $\mathfrak{E}_1$ besitzt.

[9]) Zu den v-Idealen vgl. *Krull* [1], Nr. 43. Es sei daran erinnert, daß die Beschränkung auf v-Ideale gleichwertig ist mit der Einführung des Ideal-Äquivalenzbegriffes von *Artin* und *van der Waerden* ($\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$, wenn $\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{b}^{-1}$).

Wir wenden unsere Resultate speziell auf den Fall einer *endlichen diskreten* Hauptordnung an [10]). Vom Standpunkt der Idealtheorie aus kann man bekanntlich definieren: $\mathfrak{R}$ heißt endliche diskrete Hauptordnung, wenn der v-Kürzungssatz und die Maximalbedingung für ganze v-Ideale gelten bzw. (und scheinbar mehr fordernd), wenn jedes ganze v-Ideal eindeutig als Produkt von endlich vielen, gegenseitig primen v-Primidealen darstellbar ist („Z. P. I. für v-Ideale"). Eine endliche, diskrete Hauptordnung, bei der alle v-Ideale Hauptideale sind, ist nichts anderes als ein Z. P. E.-Ring, also ein Ring, in dem jedes Element bis auf Einheitsfaktoren eindeutig als Produkt von endlich vielen Primelementen dargestellt werden kann. Gleichzeitig mit $\mathfrak{R}$ ist stets auch jedes $\mathfrak{R}_\tau$ eine endliche diskrete Hauptordnung. Die v-Primideale von $\mathfrak{R}_\tau$ sind die Erweiterungsideale der in $\mathfrak{m}^{(\tau)}$ enthaltenen v-Primideale von $\mathfrak{R}$, und es gibt infolgedessen zu jedem v-Ideal $\mathfrak{c}_\tau^v$ ein v-Ideal $\mathfrak{a}^v$ derart, daß $\mathfrak{c}_\tau^v = (\mathfrak{a}^v)\mathfrak{R}_\tau$ wird. Ferner wird bei einer endlichen diskreten Hauptordnung immer $\mathfrak{a}_\tau^{-1} = (\mathfrak{a}_\tau)^{-1}$, so daß die Umkehrbarkeit aller $\mathfrak{a}_\tau$ stets die Umkehrbarkeit von $\mathfrak{a}$ nach sich zieht [11]). — Schließlich ist leicht zu sehen, daß ein Ring mit nur endlich vielen maximalen Primidealen $\mathfrak{m}^{(i)}$ eine endliche diskrete Hauptordnung sein muß, wenn jeder Quotientenring $\mathfrak{R}_i$ eine endliche diskrete Hauptordnung darstellt [12]). Verknüpft man diese Bemerkungen mit Satz 5, Satz 6 und Satz 1, so erhält man ohne Schwierigkeit:

Satz 7. a) *Bei einer endlichen diskreten Hauptordnung gilt dann und nur dann allgemein* $(\mathfrak{a}^v\mathfrak{b}^v)^v = \mathfrak{a}^v\mathfrak{b}^v$, *es ist also dann und nur dann bei* $\mathfrak{R}$ *jedes v-Ideal umkehrbar, wenn jeder Ring* $\mathfrak{R}_\tau$ *ein Z. P. E.-Ring ist.*

b) *Ein Ring mit nur endlich vielen maximalen Primidealen* $\mathfrak{m}^{(i)}$ *ist dann und nur dann ein Z. P. E.-Ring, wenn jeder Quotientenring* $\mathfrak{R}_i$ *ein Z. P. E.-Ring ist.*

Satz 7 a) zeigt, daß es bei den endlichen diskreten Hauptordnungen wenig Sinn hat, v-Ideale einzuführen, wenn man für die beabsichtigten Rechnungen die Allgemeingültigkeit der Gleichung $(\mathfrak{a}^v\mathfrak{b}^v)^v = \mathfrak{a}^v\mathfrak{b}^v$ braucht. Denn in allen Fällen, in denen diese Gleichung gilt, wird man besser nach üblichem Schema die Betrachtung von $\mathfrak{R}$ auf das Studium der Ringe $\mathfrak{R}_\tau$ zurückführen. Da die $\mathfrak{R}_\tau$ mit Hilfe der *maximalen* Primideale von $\mathfrak{R}$ definiert sind, gehen bei diesem Übergang keine idealtheoretischen Feinheiten verloren, und man hat den großen Vorteil, daß die $\mathfrak{R}_\tau$ Z. P. E.-Ringe sind, so daß man in ihnen statt mit v-Idealen mit Elementen rechnen kann.

§ 3. Ein Kriterium für Z.P.E.-Ringe.

Die Ergebnisse von § 1 und § 2 führen auf die Frage nach Kriterien dafür, daß ein vorgelegter Integritätsbereich ein Z. P. E.-Ring ist. Um hier zu einem weitreichenden Ergebnis zu kommen, bezeichnen wir einen (nicht notwendig nullteilerfreien) Ring $\mathfrak{S}$ mit Einheitselement wie üblich als *Stellenring*, wenn $\mathfrak{S}$ ein *Noetherscher Ring* (Ring mit

---

[10]) Eine erste Anregung zur Abfassung der vorliegenden Note gab mir eine Korrespondenz mit Herrn *Roquette* über diese Frage. Vgl. auch *Krull* [4], § 2. S. 126.

[11]) Zu den endlichen diskreten Hauptordnungen vgl. *Krull* [1], Nr. 37 und 43 (auf S. 119 Zusammenhang mit den v-Idealen). Vgl. ferner *Krull* [4], wo sich bereits Satz 7a findet (Satz 12, S. 127).

[12]) Die Beweise dieser Sätze werden besonders einfach, wenn man die bewertungstheoretische Definition der endlichen diskreten Hauptordnungen heranzieht. Man beachte dabei: Die v-Primideale $\mathfrak{p}_\sigma^v$ (d. h. soviel wie die minimalen Primideale) der endlichen diskreten Hauptordnung $\mathfrak{R}$ entsprechen umkehrbar eindeutig den Bewertungen B_σ des ausgezeichneten zu $\mathfrak{R}$ gehörigen Bewertungssystems. Es ist dann und nur dann $\mathfrak{p}_{\sigma_0}^v$ kein Unterideal von $\mathfrak{m}^{(\tau)}$, wenn in $\mathfrak{R}$ ein Element α existiert, dessen Wert in B_{σ_0} positiv ist, während für alle $\mathfrak{p}_\sigma^v \leq \mathfrak{m}^{(\tau)}$ der Wert von α in B_σ gleich 0 wird.

Maximalbedingung) ist und es in $\mathfrak{S}$ nur ein einziges maximales Primideal $\mathfrak{m}$ gibt[13]). In einem Stellenring $\mathfrak{S}$ gilt stets die Gleichung $\bigcap_n \mathfrak{m}^n = (0)$. Bilden wir daher die Menge $\mathfrak{S}^*$ aller Folgen $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$, $(a_i \in \mathfrak{S})$, die der Verträglichkeitsbedingung $a_n \equiv a_{n-1}\ (\mathfrak{m}^{n-1})$, $(n = 1, 2, \ldots)$, genügen, und definieren wir in $\mathfrak{S}^*$ Gleichheit, Addition, Multiplikation durch:

$$\{a_0, a_1, \ldots\} = \{b_0, b_1, \ldots\} \text{ dann und nur dann, wenn } a_n \equiv b_n(\mathfrak{m}^n),\ (n = 1, 2, \ldots)$$

$$\{a_0, a_1, \ldots\} \dot{+} \{b_0, b_1, \ldots\} = \{a_0 \dot{+} b_0, a_1 \dot{+} b_1, \ldots\},$$

so wird $\mathfrak{S}^*$ durch diese Festsetzungen zu einem *Ring*, der sich als Oberring von $\mathfrak{S}$ auffassen läßt. (Man hat nur durchweg die Folge $\{a, a, a, \ldots\}$ mit dem $\mathfrak{S}$-Element a zu identifizieren.) Der Ring $\mathfrak{S}^*$, der als die *vollständige Hülle von* $\mathfrak{S}$ bezeichnet werden soll, ist selbst ein Noetherscher Stellenring mit dem maximalen Primideal $\mathfrak{m}^* = \mathfrak{m}\mathfrak{S}^*$. Für jedes $\mathfrak{S}$-Ideal $\mathfrak{a}$ wird $\mathfrak{a}\mathfrak{S}^* \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$. Und $\mathfrak{S}^*$ ist *vollständig* in dem Sinne, daß die Gleichung $(\mathfrak{S}^*)^* = \mathfrak{S}^*$ gilt. Bei einem beliebigen Stellenring $\mathfrak{S}$ bildet der Restklassenring $\mathfrak{S}/\mathfrak{m} = K$ einen Körper; $a(b, c, \ldots)$ möge stets das durch $a(b, c, \ldots)$ aus $\mathfrak{S}$ definierte Element aus K bedeuten.

Es sei nun $(p_1, \ldots, p_n)$ eine minimale (also aus möglichst wenig Elementen bestehende) Basis des Primideals $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{S}$; $\varphi_g(p; a)$ $(\psi_h(p; a), \ldots)$ bezeichne stets eine homogene Form g-ten (h-ten, ...) Grades in $p_1, \ldots, p_n$ mit beliebigen Elementen a aus $\mathfrak{S}$ als Koeffizienten; $\varphi_g(u; a)$ $(\psi_h(u; a), \ldots)$ sei die Form aus $K[u_1, \ldots, u_n]$, die entsteht, wenn man in $\varphi_g(p; a)$ $(\psi_h(p; a), \ldots)$ die p_i durch Unbestimmte u_i und die a durch die zugeordneten Restklassen a ersetzt. $\varphi_g(u; a)$ möge *Anfangsform* des $\mathfrak{S}$-Elements A genannt werden, wenn $A - \varphi_g(p; a) \in \mathfrak{m}^{g+1}$ ist[14]). Es gilt dann: Jedes $\mathfrak{S}$-Element besitzt Anfangsformen. Ist $\varphi_g(u; a)$ bzw. $\psi_h(u; a)$ Anfangsform von A bzw. B $(g \leq h)$, so ist $\varphi_g(u; a) \cdot \psi_h(u; a)$ Anfangsform von $A \cdot B$, während eine Anfangsform von $A + B$ durch $\varphi_g(u; a) + \psi_h(u; a)$ oder $\varphi_g(u; a)$ gegeben ist, je nachdem ob $g = h$ oder $g < h$ ist[15]).

Diese Bemerkung gestattet es, mit den Elementen von $\mathfrak{S}$ in ganz ähnlicher Weise zu rechnen wie mit formalen Potenzreihen in $u_1, \ldots, u_n$ über K. Allerdings wird ein Element i. a. unendlich viele zugehörige „Reihenentwicklungen" besitzen. Gibt es zu jedem Element (in einem Sinne, der noch genauer zu präzisieren wäre) nur eine zugehörige Entwicklung, d. h. *besitzt jedes Element A nur eine einzige Anfangsform $\varphi_g(u; a)$*, so soll $\mathfrak{S}$ als *p-Reihenring* bezeichnet werden[16]). Die Hauptbedeutung der p-Reihenringe beruht darauf, daß in der algebraischen Geometrie die einfachen Teilmannigfaltigkeiten beliebiger irreduzibler algebraischer Mannigfaltigkeiten durch spezielle p-Reihenringe dargestellt werden. Hier soll ganz allgemein die Frage untersucht werden, ob etwa ein beliebiger p-Reihenring stets einen Z. P. E.-Ring darstellt, — eine Frage, die für die p-Reihenringe

---

[13]) Zu § 3 vgl. vor allem: *Krull* [2], *Chevalley* [1], sowie *Zariski* [1] (insbesondere S. 2). Bei der kurzen Wiederholung der Grunddefinitionen zu Beginn des Paragraphen habe ich mich im wesentlichen an *Krull* [2] gehalten; hier vgl. vor allem: § 6 (Einführung der vollständigen (dort *perfekt* genannten) Stellenringe, Gleichung $\mathfrak{a}\mathfrak{S}^* = \mathfrak{a}$); § 2 (Begriff der Anfangsform).

[14]) Natürlich hat man $A \in \mathfrak{m}^g$, wenn eine Anfangsform $\varphi_g(u; \bar{a})$ existiert. Man beachte, daß A in einem allgemeinen Stellenring u. U. unendlich viele Anfangsformen besitzen kann.

[15]) Hat A bzw. B die Anfangsform $\varphi_g(u; \bar{a})$ bzw. $-\varphi_g(u; \bar{a})$, so daß sich für $A + B$ formal die Anfangsform 0 ergibt, so besagt das, daß $A + B$ eine Anfangsform höheren als g-ten Grades besitzt.

[16]) Zur Begründung der Wahl des Wortes p-Reihenring vgl. [2]). Es sei hier noch beigefügt, daß für mich auch der Umstand maßgebend war, daß gerade in der algebraischen Geometrie, der zuliebe *Chevalley* die Bezeichnung „regulärer Stellenring" bevorzugte, die Terminologie nicht einheitlich ist. Vgl. hier z. B.: *D. E. Northcott*, An application of local uniformisation to the theory of divisors (Proc. Cambridge Philos. Soc. **47** (1951), S. 279—285), wo einleitend ausdrücklich hervorgehoben wird, daß sich das von *Northcott* bewiesene Theorem wegen Differenzen in den Grunddefinitionen mit dem Satz von *Zariski* [1], 5. 2. nicht genau deckt.

der algebraischen Geometrie von Zariski auf Grund gewisser Sätze von Chevalley positiv beantwortet werden konnte[17]).

Ist $\mathfrak{S} = \mathfrak{P}$ ein p-Reihenring, so ist $\mathfrak{P}$ stets nullteilerfrei und ganz abgeschlossen, also als Noetherscher Ring eine endliche diskrete Hauptordnung, und es stellt auch die vollständige Hülle $\mathfrak{P}^*$ einen p-Reihenring dar. Unser nächstes Ziel ist der Beweis des Fundamentalsatzes:

Satz 8. *Ist die vollständige Hülle $\mathfrak{P}^*$ des p-Reihenringes $\mathfrak{P}$ ein Z. P. E.-Ring, so ist auch $\mathfrak{P}$ selbst ein Z. P. E.-Ring.*

Satz 8 stützt sich auf eine längere Reihe von großenteils bekannten Hilfssätzen:

Hilfssatz 1. *Ist in dem beliebigen Stellenring $\mathfrak{S}$ das Element A zum Ideal $\mathfrak{a}$ prim, so ist A auch in der vollständigen Hülle $\mathfrak{S}^*$ zu $\mathfrak{a}\mathfrak{S}^*$ prim.*

Es sei $AB^* \in \mathfrak{a}\mathfrak{S}^* (B^* \in \mathfrak{S}^*)$, und es sei, was sicher möglich, für ein festes, beliebig großes n das Element $B_n \in \mathfrak{S}$ so bestimmt, daß $B^* - B_n \in (\mathfrak{m}^*)^n$. Dann ist

$$AB_n \in (\mathfrak{a} + A\mathfrak{m}^n)\,\mathfrak{S}^* \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{a} + A\mathfrak{m}^n,$$

also

$$A(B_n + C_n) \in \mathfrak{a}\ (C_n \in \mathfrak{m}^n),\ B_n + C_n \in \mathfrak{a},\ B_n \in \mathfrak{a} + \mathfrak{m}^n,\ B \in \mathfrak{a}\mathfrak{S}^* + (\mathfrak{m}^*)^n.$$

Wir haben also $B \in \bigcap_n (\mathfrak{a}\mathfrak{S}^* + (\mathfrak{m}^*)^n) = \mathfrak{a}\mathfrak{S}^*$[18]).

Aus Hilfssatz 1 folgt unmittelbar

Hilfssatz 2. *Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal aus $\mathfrak{S}$, so wird $\mathfrak{q}^* \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{p}$ für jedes zu $\mathfrak{p}\mathfrak{S}^*$ nicht prime Oberideal $\mathfrak{q}^*$ von $\mathfrak{p}\mathfrak{S}^*$, insbesondere für jedes im Noetherschen Sinne zu $\mathfrak{p}\mathfrak{S}^*$ gehörige Primideal $\mathfrak{q}^*$.*

Für weitere Hilfssätze brauchen wir den Begriff des *Leitideals* $\bar{\mathfrak{a}}_L$ eines Ideals $\mathfrak{a}$ aus dem Stellenring $\mathfrak{S}$. Man versteht darunter einfach das Ideal aus dem Formenring $K[u_1, \ldots, u_n]$, das durch die Anfangsformen der Elemente von $\mathfrak{a}$ gebildet wird. Aus der Definition der vollständigen Hülle $\mathfrak{S}^*$ folgt sofort

Hilfssatz 3. *$\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{S}^*$ haben stets das gleiche Leitideal.*

Schreibt man ferner einem Ideal $\mathfrak{a}$ aus dem beliebigen Ring $\mathfrak{R}$ wie üblich die *Dimension* d zu, wenn in $\mathfrak{R}$ zwar für $l = d$, aber nicht für $l = d + 1$ eine Kette $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_l$ mit Primidealen $\mathfrak{p}_i$ gebildet werden kann, so gilt:

Hilfssatz 4. *Ein beliebiges Ideal $\mathfrak{a}$ aus dem Stellenring $\mathfrak{S}$ hat stets die gleiche Dimension wie das Leitideal $\bar{\mathfrak{a}}_L$ aus $K[u_1, \ldots, u_n]$*[19]).

Da ein p-Reihenring offenbar dadurch gekennzeichnet ist, daß bei ihm das Nullideal das Nullideal aus $K[u_1, \ldots, u_n]$ als Leitideal hat, folgt aus Hilfssatz 4 sofort: *Der Stellenring $\mathfrak{S}$ ist dann und nur dann ein p-Reihenring, wenn die Dimension des Nullideals von $\mathfrak{S}$ gleich der Gliederzahl n einer Minimalbasis von $\mathfrak{m}$ ist.* Ist weiter A ein Element aus dem Stellenring $\mathfrak{P}$ mit der Anfangsform $\varphi_g(u; a)$, so wird ersichtlich das Hauptideal $(\varphi_g(u; a))$ aus $K[u_1, \ldots, u_n]$ das Leitideal des Hauptideals (A) aus $\mathfrak{P}$, und auf Grund von Hilfssatz 4 ergibt sich: *Die Dimension eines Hauptideals $(A) \neq (0)$ aus $\mathfrak{P}$ ist stets gleich $n - 1$.*

Etwas tiefer liegt der für uns entscheidende

Hilfssatz 5. *Gilt im Stellenring $\mathfrak{P}$ der Z. P. E., und besitzen die Elemente des Ideals $\mathfrak{a}$ den größten gemeinschaftlichen Faktor 1, so gibt es in dem Leitideal $\mathfrak{a}_L$ von $\mathfrak{a}$ zu jeder beliebigen Form $\varphi_g(u; a)$ eine relativ prime Form $\psi_g(u; a)$.*

---

[17]) *Zariski* [1], 5. 2. Der an entscheidender Stelle benutzte Satz von *Chevalley* findet sich in *Chevalley* [2]. Vgl. [24]) bei § 4.

[18]) Hilfssatz 1 ergibt sich aus *Chevalley* [1], Proposition 5 und 6, S. 699 (vgl. eine Anwendung in diesem Sinne bei *Zariski* [1], S. 22). Die Beweisandeutung des Textes folgt im wesentlichen dem Vorbild von *Chevalley*, wo im übrigen gleich der Fall eines Halb-Stellenringes behandelt ist.

[19]) Vgl. hierzu: *Krull* [2], § 2 u. § 3. Zur Dimensionstheorie der Polynomringe vgl. auch *Krull* [1], Nr. 16 u. 17.

Wegen des Z. P. E. ist nämlich in dem Integritätsbereich $\mathfrak{P}$ jedes minimale Primideal (d. h. jedes Primideal $\mathfrak{p} \neq (0)$ ohne von (0) verschiedenes echtes Primunterideal) ein Primhauptideal. Das betrachtete Ideal $\mathfrak{a}$ kann also in keinem minimalen Primideal von $\mathfrak{P}$ enthalten sein, und seine Dimension ist infolgedessen nur mindestens 2 Einheiten kleiner als die Dimension n des Nullideals. Nach Hilfssatz 4 ist also auch die Dimension von $\mathfrak{a}_L$ in $K[u_1, \ldots, u_n]$ höchstens gleich $n-2$, und daraus folgt sofort die Behauptung.

Hilfssatz 6. *Ist in einem p-Reihenring $\mathfrak{P}$ das Leitideal $\mathfrak{a}_L$ von $\mathfrak{a}$ ein Hauptideal, so ist $\mathfrak{a}$ selbst ein Hauptideal.*

Es sei nämlich $\mathfrak{a}_L = (\varphi_g(u; a))$, und es sei A ein Element aus $\mathfrak{a}$ mit der Anfangsform $\varphi_g(u; a)$. Dann haben $\mathfrak{a}$ und (A) das gleiche Leitideal, und daraus folgt nach einem bekannten Satz $\mathfrak{a} = (A)$ [19]). Wir kommen nun rasch zum Ziel:

Hilfssatz 7. *Gilt in der vollständigen Hülle $\mathfrak{P}^*$ des p-Reihenringes $\mathfrak{P}$ der Z. P. E., so ist jedes minimale Primideal $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{P}$ ein Hauptideal.*

Es bedeute T^* den größten gemeinschaftlichen Faktor der Elemente von $\mathfrak{p}\mathfrak{P}^*$, sodaß $\mathfrak{p}\mathfrak{P}^* = T^*\mathfrak{c}^*$ wird. Ist $\mathfrak{c}^* = \mathfrak{P}^*$, so ist $\mathfrak{p}\mathfrak{P}^*$ Hauptideal und damit nach Hilfssatz 6 auch $\mathfrak{p}$, denn es haben ja $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}\mathfrak{P}^*$ das gleiche Leitideal. Es genügt also zu zeigen, daß die Annahme $\mathfrak{c}^* \neq \mathfrak{P}^*$ zu einem Widerspruch führt. Hierzu überlegen wir:

a) Ist $\mathfrak{c}^* \neq \mathfrak{P}^*$, also auch $(T^*) \neq \mathfrak{p}\mathfrak{P}^*$, so ist $\mathfrak{c}^*$ zu $\mathfrak{p}\mathfrak{P}^*$ nicht prim; nach bekannten Sätzen existiert dann auch (mindestens) ein zu $\mathfrak{p}\mathfrak{P}^*$ nicht primes Primoberideal $\mathfrak{p}^*$ von $\mathfrak{c}^*$. Nach Hilfssatz 2 wird $\mathfrak{p}^* \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{p}$.

b) Da sich auf $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}^*$ Hilfssatz 5 anwenden läßt, ist die Anfangsform $\varphi_g(u; a)$ der größte gemeinschaftliche Faktor der Elemente des zu $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}\mathfrak{P}^*$ gehörigen Leitideals $\bar{\mathfrak{p}}_L$. Zur Erreichung des gewünschten Widerspruchs genügt es also zu zeigen, daß die Elemente von $\bar{\mathfrak{p}}_L$ durch eine zu $\varphi_g(u; a)$ prime Form $\psi_h(u; a)$ teilbar sein müssen.

c) Es sei $C_1^* B_1^* + \cdots + C_m^* B_m^*$ $(B_i = B_i^* \cdot T^* \in \mathfrak{p})$ ein nach Hilfssatz 5 existierendes Element aus $\mathfrak{c}^* = (T^*)^{-1}\mathfrak{p}\mathfrak{P}^*$ mit zu $\varphi_g(u; a)$ primer Anfangsform $\chi_f(u; a)$. Wählen wir die Elemente C_i aus $\mathfrak{P}$ so, daß $C_i^* - C_i \in (\mathfrak{m}^*)^N$ ist mit hinreichend großem N, so hat auch $D^* = C^1 B_1^* + \cdots + C_m B_m^*$ die Anfangsform $\chi_f(u; a)$, und es ist D^* Teiler des Elements $C_1 B_1 + \cdots + C_m B_m = T^* D^* \neq 0$ aus $\mathfrak{p}$. Da D^* in dem in a) eingeführten Primideal $\mathfrak{p}^*$ enthalten ist, muß auch ein Primfaktor P^* von D^* zu $\mathfrak{p}^*$ gehören; die Anfangsform $\psi_h(u; a)$ von P^* ist als Teiler von $\chi_f(u; a)$ zu $\varphi_g(u; a)$ prim.

d) Für den Durchschnitt $(P^*) \cap \mathfrak{P}$ des Primideals (P^*) aus $\mathfrak{P}^*$ mit $\mathfrak{P}$ haben wir (wegen $C_1 B_1 + \cdots + C_m B_m \in (P^*)$):

$$(0) < (P^*) \cap \mathfrak{P} < \mathfrak{p}^* \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{p}.$$

Wegen der Minimaleigenschaft von $\mathfrak{p}$ folgt daraus $(P^*) \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{p}$. Es müssen also alle Elemente des Leitideals $\bar{\mathfrak{p}}_L$ von $\mathfrak{p}$ durch die Anfangsform $\psi_h(u; a)$ von P^* teilbar sein, d. h. der gewünschte Widerspruch ist gewonnen.

Aus Hilfssatz 7 folgt endlich leicht der Hauptsatz 8. Man braucht nur zu beachten: Jeder p-Reihenring ist als ganz abgeschlossener Noetherscher Ring eine endliche diskrete Hauptordnung. Benutzt man gewöhnliche Ideale statt v-Ideale, so sind die v-Primideale von $\mathfrak{P}$ im Sinne von § 2 nichts anderes als die minimalen Ringprimideale. Sind also in $\mathfrak{P}$ alle minimalen Primideale Hauptideale, so sind es alle v-Primideale und damit überhaupt alle v-Ideale; es wird also $\mathfrak{P}$ ein Z. P. E.-Ring.

Angesichts von Satz 8 hat man nur noch zu untersuchen, wann ein *vollständiger* p-Reihenring $\mathfrak{P}^*$ ein Z. P. E.-Ring ist. Hier ist der Fall, daß $\mathfrak{P}^*$ (d. h. das Nullideal von $\mathfrak{P}^*$) die Dimension 1 besitzt, trivial. Denn ein vollständiger p-Reihenring der Dimension 1 ist nichts anderes als der Bewertungsring eines diskret bewerteten, perfekten Körpers. Weiter zeigt man elementar:

Satz 9. *Ein vollständiger Stellenring der Dimension 2 ist stets ein Z. P. E.-Ring*[20]).

Der Beweis von Satz 9, der der Kürze halber nur skizziert werden soll, ergibt sich aus den folgenden Bemerkungen: a) Ist die Anfangsform von A^* zur Anfangsform von B^* prim, so ist A^* zu B^* prim. b) Ist die Anfangsform $\varphi_g(u; a)$ von A^* Produkt von zwei gegenseitig primen Formen $\varphi_{g_i}(u; a)$, so gibt es in $\mathfrak{P}^*$ eine Zerlegung $A^* = A_1^* A_2^*$, bei der A_i^* die Anfangsform $\varphi_{g_i}(u; a)$ hat $(i = 1, 2)$. c) Sind die Anfangsformen $(\chi_g(u; a))^{\varrho_i}$ $(i = 1, 2;\ \varrho_1 \geqq \varrho_2)$ der Reihen A_i^* Potenzen der gleichen in $K[u_1, u_2]$ irreduziblen Form $\chi_g(u; a)$, und ist A_1^* nicht durch A_2^* teilbar, so existiert ein B^* derart, daß die Anfangsform von $A_1^* - B^* A_2^*$ eine Zerlegung $\psi_h(u; a) = \omega_f(u; a) \cdot (\chi_g(u; a))^{\varrho_3}$ $(0 \leqq \varrho_3 < \varrho_2)$ mit zu $\chi_g(u; a)$ primen $\omega_f(u; a)$ besitzt.

Es ist mühelos zu sehen, daß man auf Grund von a), b), c) in $\mathfrak{P}^*$ einen verallgemeinerten Euklidischen Algorithmus einführen kann, der die Gültigkeit des Z. P. E. sichert. Was die Beweise angeht, so folgt a) sofort aus einem allgemeinen Leitidealsatz[21]) und zwar für ganz beliebige vollständige p-Reihenringe. Auch c) gilt ganz allgemein. Ist nämlich C^* so bestimmt, daß $A_1^* - C^* A_2^* \in (\mathfrak{m}^*)^{n+\varrho_2 g}$, und ist die Anfangsform von $A_1^* - C^* A_2^*$ durch $\chi_g(u; a))^{\varrho_2}$ teilbar, etwa gleich $\varphi_n(u; a) \cdot (\chi_g(u; a))^{\varrho_2}$, so wird für jede zu $\varphi_n(u; a)$ korrespondierende Form $\varphi_n(p; a)$ aus $\mathfrak{P}^*$ jedenfalls:

$$A_1^* - (C^* + \varphi_n(p; a)) \cdot A_2^* \in \mathfrak{m}^{n+1+\varrho_i g};\ \varphi_n(p; a) \in \mathfrak{m}^n.$$

Diese Bemerkung zeigt: Existiert zu A_1^*, A_2^* kein B^* von der in c) gewünschten Art, so gibt es in $\mathfrak{P}^*$ eine der „Verträglichkeitsbedingung" im Sinne des ersten Abschnitts dieses Paragraphen genügende Folge $\{C_0^*, C_1^*, \ldots\}$ derart, daß für das zugehörige, in $\mathfrak{P}^* = (\mathfrak{P}^*)^*$ liegende Element C^* die Differenz $A_1^* - C^* A_2^*$ in $\bigcap_n \mathfrak{m}^n = (0)$ liegt, daß also $A_1^* = C^* A_2^*$ wird.

Bei b) schließt man ähnlich wie bei c), aber diesmal unter Ausnützung der Dimension 2, also der Tatsache, daß man es mit *binären* Formen $\varphi_g(u; a)$ zu tun hat. Es seien C_1^* und C_2^* mit den Anfangsformen $\varphi_{\varrho_i}^{(i)}(u; a)$ $(i = 1, 2)$ so bestimmt, daß $A^* - C_1^* C_2^* \in \mathfrak{m}^{n+g_1+g_2} (n \geqq 1)$. Dann lassen sich zu der Anfangsform $\psi_{n+g_1+g_2}(u; a)$ von $A^* - C_1^* \cdot C_2^*$ in $K[u_1, u_2]$ zwei Formen $\chi_{n+g_i}^{(i)}(u; a)$ derart finden, daß

$$\psi_{n+g_1+g_2} = \chi_{n+g_2}^{(2)} \varphi_{g_1}^{(1)} + \chi_{n+g_1}^{(1)} \varphi_{g_2}^{(2)}$$

ist. Ist nun $\chi_{n+g_i}^{(i)}(p; a)$ irgendeine zu $\chi_{n+g_i}^{(i)}(u; a)$ korrespondierende Form aus $\mathfrak{P}^*$, so hat man

$$A^* - (C_1^* + \chi_{n+g_1}^{(1)}(p; a))\ (C_2^* + \chi_{n+g_2}^{(2)}(p; a)) \in \mathfrak{m}^{n+1+g_1+g_2}$$

usw.[22]). Für $n > 2$ versagt unsere Methode, weil der beim Beweise von c) benützte Hilfssatz über die Darstellbarkeit von $\psi_{n+g_1+g_2}$ nicht mehr gilt. Hier ist erst Cohen auf Grund viel tiefer liegender Struktursätze einen entscheidenden Schritt weitergekommen.

Ist $\mathfrak{K}$ der Quotientenkörper von $\mathfrak{P}$, so haben entweder $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{P}/\mathfrak{m} = K$ die gleiche Charakteristik oder es hat $\mathfrak{K}$ die Charakteristik 0, es läßt sich also $\mathfrak{K}$ als Oberkörper des rationalen Zahlkörpers $\mathfrak{K}_0$ auffassen, und es gibt eine eindeutig bestimmte, zu $\mathfrak{m}^*$ gehörige

---

[20]) Auf die Gültigkeit von Satz 9 machte mich Herr *E. Kähler* aufmerksam. Den Beweis des Textes habe ich für gewöhnliche Potenzreihen mit Körperkoeffizienten schon vor über 20 Jahren im Kolleg vorgetragen; im Gespräch mit Herrn *Kähler* wurde mir sofort klar, daß die Übertragung auf beliebige p-Reihenringe ohne weiteres möglich ist. Herrn *Kählers* eigener Beweis verlief anscheinend ähnlich wie der meinige.

[21]) Vgl. *Krull* [2], Satz 4, S. 208.

[22]) Die Konstruktion zweier der Gleichung $A^* = D_1^* D_2^*$ genügenden Elemente verläuft natürlich so, daß man beim ersten Schritt $n = 1$, $C_{i_0}^* = \varphi_{g_i}^{(i)}(p; a)$ wählt, wobei $\varphi_{g_i}^{(i)}(p; a)$ eine $\varphi_{g_i}^{(i)}(u; a)$ korrespondierende Form aus $\mathfrak{P}^*$ bedeutet, und dann schrittweise zwei der Verträglichkeitsbedingung genügende Folgen $\{C_{i0}^*, C_{i1}^*, \ldots\}$ bildet, derart daß $A^* - C_{1n}^* C_{2n}^* \in \mathfrak{m}^{n+1+g_1+g_2}$ wird.

Primzahl p. Der Ring $\mathfrak{P}^*$ wird nun, analog der bei den diskret bewerteten Körpern benutzten Terminologie *unverzweigt* genannt, wenn entweder der erste Fall vorliegt oder die ausgezeichnete Primzahl p nicht in $(\mathfrak{m}^*)^2$ enthalten ist. Nach Cohen gilt dann:

Satz 10. *Jeder unverzweigte, vollständige p-Reihenring $\mathfrak{P}^*$ ist ein Z.P.E.-Ring.*

Der Beweis stützt sich auf einen vor allem im Fall der Charakteristikungleichheit von $\mathfrak{K}^*$ und K^* keineswegs leicht zu beweisenden Satz von Cohen, nach dem $\mathfrak{P}^*$ entweder zum Ring aller formalen Potenzreihen in $u_1, \ldots, u_n$ über K oder zum Ring aller formalen Potenzreihen in $u_1, \ldots, u_{n-1}$ über einem perfekten diskreten Bewertungsring mit zu K isomorphem Restklassenkörper isomorph ist[23]).

Satz 9 und 10 zusammengenommen legen die Vermutung nahe, daß alle vollständigen und damit angesichts von Satz 8 überhaupt *alle p-Reihenringe Z.P.E.-Ringe* sind. Aber der Cohensche Satz, daß jeder verzweigte vollständige p-Reihenring $\mathfrak{P}^*$ eine einfache Eisensteinsche Erweiterung eines unverzweigten vollständigen p-Reihenringes $\mathfrak{P}_0^*$ darstellt, liefert zum mindesten bei oberflächlicher Betrachtung keinen Ansatzpunkt für die Übertragung des Z.P.E. von $\mathfrak{P}_0^*$ auf $\mathfrak{P}^*$ (vgl. hierzu eine Bemerkung am Schlusse von § 6). Andererseits läßt sich die Beweismethode von Satz 9, bei der die Verzweigtheit oder Unverzweigtheit keine Rolle spielte, nicht auf den Fall einer Dimension $n \geqq 3$ ausdehnen.

Vielleicht sollte man versuchen, mit ähnlichen Methoden, wie sie zum Beweise von Satz 8 benutzt wurden, den Z.P.E. ohne den Umweg über die vollständige Hülle unmittelbar für beliebige p-Reihenringe abzuleiten.

§ 4. Ergänzungsbemerkungen zur Theorie der Stellenringe.

Interessiert man sich nicht nur für den Z.P.E., d. h. für die minimalen Ringprimideale, so liegt es in der Theorie der Stellenringe $\mathfrak{S}$ und ihrer vollständigen Hüllen $\mathfrak{S}^*$ besonders nahe zu fragen:

Es sei $\mathfrak{p}$ ein beliebiges Primideal aus $\mathfrak{S}$. Wie zerfällt $\mathfrak{p}\mathfrak{S}^*$ in $\mathfrak{S}^*$?

Hier hat Chevalley das bahnbrechende Resultat gewonnen:

Es sei $\mathfrak{S}$ ein *Stellenring aus einem endlichen algebraischen Funktionenkörper*, d. h. es entstehe $\mathfrak{S}$ aus einem Polynomring $\mathfrak{Q} = K[x_1, \ldots, x_n]$ mit Körperkoeffizienten dadurch, daß man zunächst den Restklassenring $\mathfrak{Q}/\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{Q}$ nach einem geeigneten Primideal $\mathfrak{q}$ und anschließend den Quotientenring von $\mathfrak{Q}/\mathfrak{q}$ hinsichtlich eines passenden Primideals $\mathfrak{p}/\mathfrak{q}$ bildet. Ist dann noch K von der Charakteristik 0 oder im Falle einer Primzahlcharakteristik p über dem Körper K^p endlich, *so wird für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{S}$ stets $\mathfrak{p}\mathfrak{S}^*$ Durchschnitt von unendlich vielen Primidealen.* Darüber hinaus hat Zariski, gestützt auf das Chevalleysche Ergebnis, gezeigt: Ist $\mathfrak{p}$ *normal*, d. h. ist $\mathfrak{S}/\mathfrak{p}$ ganz abgeschlossen, so ist $\mathfrak{p}\mathfrak{S}^*$ ein Primideal, und es ist auch $\mathfrak{S}^*/\mathfrak{p}\mathfrak{S}^*$ ganz abgeschlossen[24]). Will man beliebige Stellenringe behandeln, so wählt man zweckmäßigerweise als Ausgangspunkt den folgenden, leicht zu beweisenden Satz:

Hilfssatz 8. *Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal aus dem Stellenring $\mathfrak{S}$, so ist $\mathfrak{S}^*/\mathfrak{a}\mathfrak{S}^*$ stets die vollständige Hülle von $\mathfrak{S}/\mathfrak{a}$*[25]).

---

[23]) Der Beweis eines umfassenden Struktursatzes für beliebige vollständige Stellenringe, der den angeführten Struktursatz für vollständige unverzweigte p-Reihenringe als Spezialfall enthält, bildet den Hauptteil von *Cohen* [1]. Zum Beweis des Z.P.E. für unverzweigte vollständige p-Reihenringe vgl. *Cohen* [1], S. 94f.

[24]) Vgl. *Chevalley* [2], S. 9, letzter Satz von Lemma 9, sowie S. 11, Theorem 1; bzw. *Zariski* [2]. Zur Tatsache, daß bei normalem $\mathfrak{p}$ stets $\mathfrak{p}\mathfrak{S}^*$ Primideal ist, vgl. auch: *O. Zariski*, Analytical irreducibility of normal varieties, Annals of Math. **49** (1948), S. 352–361.

[25]) *Chevalley* [1], Proposition 5, S. 699.

Nennen wir ein Primideal $\mathfrak{p}$ aus dem Stellenring $\mathfrak{S}$ *regulär*, wenn der Restklassenring $\mathfrak{S}/\mathfrak{p}$ einen p-Reihenring darstellt, so folgt aus Hilfssatz 8 unmittelbar:

Satz 11. *Bei einem regulären Primideal aus dem beliebigen Stellenring $\mathfrak{S}$ ist stets auch $\mathfrak{p}\mathfrak{S}^*$ Primideal.*

Denn das Zerfallen von $\mathfrak{p}\mathfrak{S}^*$ in $\mathfrak{S}^*$ entspricht ja genau dem Zerfallen des Nullideals von $\mathfrak{S}^*/\mathfrak{p}\mathfrak{S}^*$, und bei einem p-Reihenring ist auch in der vollständigen Hülle das Nullideal Primideal. Ob Satz 11 auch mit „normal" statt „regulär" gilt, ob also das Resultat von Zariski auf beliebige Stellenringe übertragbar ist, soll hier nicht untersucht werden. Auf der anderen Seite gilt im allgemeinen Fall im Gegensatz zu Chevalley:

Satz 12. *Schon bei einem eindimensionalen (nicht normalen) Primideal $\mathfrak{p}$ kann der Fall eintreten, daß $\mathfrak{p}\mathfrak{S}^*$ ein echtes Radikal besitzt.*

Betrachten wir nämlich einen nullteilerfreien Stellenring $\mathfrak{S}_0$ mit eindimensionalem Nullideal (einen *primären Integritätsbereich* in der von mir z. B. im Idealbericht benutzten Terminologie), so weiß man: Der zu $\mathfrak{S}_0$ gehörige ganz abgeschlossene Ring $\mathfrak{T}_0$ besitzt dann und nur dann über $\mathfrak{S}_0$ eine endliche Modulbasis, wenn in $\mathfrak{S}_0^*$ das Nullideal kein echtes Radikal hat. Auf der anderen Seite sind Fälle bekannt, wo für $\mathfrak{T}_0$ über $\mathfrak{S}_0$ keine endliche Modulbasis existiert[26]). — Mit Satz 12 ist allerdings noch nicht die Frage beantwortet, ob nicht etwa für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ aus einem *p-Reihenring* $\mathfrak{P}$ immer $\mathfrak{p}\mathfrak{P}^*$ Durchschnitt von Primidealen werden muß. Doch ist das äußerst unwahrscheinlich. Ich bezweifle nicht, daß sich ein p-Reihenring konstruieren läßt, in dem ein eindimensionales Primideal $\mathfrak{p}$ existiert, für das der zu $\mathfrak{P}/\mathfrak{p} = \mathfrak{S}_0$ gehörige ganz abgeschlossene Ring $\mathfrak{T}_0$ über $\mathfrak{S}_0$ keine endliche Modulbasis besitzt.

Eine andere Frage ist die, ob etwa $\mathfrak{p}\mathfrak{S}^*$ immer frei von eingebetteten Komponenten, also gleich dem Durchschnitt seiner isolierten Primärkomponenten ist. In dieser Hinsicht gilt jedenfalls:

Satz 13. a) *Bei einem eindimensionalen Primideal $\mathfrak{p}$ besitzt $\mathfrak{p}\mathfrak{S}^*$ nie eine eingebettete Komponente.* — b) *Ist $\mathfrak{p}$ unmittelbares Primoberideal eines regulären Primideals $\mathfrak{p}'$, für das der p-Reihenring $\mathfrak{S}/\mathfrak{p}'$ unverzweigt ist, so hat $\mathfrak{p}\mathfrak{S}^*$ keine eingebettete Komponente.*

Beweis. a) Nach Hilfssatz 8 braucht der Satz nur für den Fall $\mathfrak{p} = (0)$ bewiesen zu werden. Wegen der Eindimensionalität von $\mathfrak{p}$ ist dann $\mathfrak{m}$ das einzige von (0) verschiedene Primideal in $\mathfrak{S}$ und es ist daher jedes Hauptideal $(A) \neq (0)$ aus $\mathfrak{S}$ ein zu $\mathfrak{m}$ gehöriges Primideal. Es wird dann auch $(A)\mathfrak{S}^*$ ein zu $\mathfrak{m}^*$ gehöriges Primideal, und daraus folgt nach der Dimensionstheorie der Stellenringe, daß $\mathfrak{m}^*$ unmittelbares Primoberideal jedes Primideals $\mathfrak{p}^* \neq \mathfrak{m}^*$ aus $\mathfrak{S}^*$ sein muß[27]). Wenn also in $\mathfrak{S}^*$ das Nullideal eine eingebettete Primärkomponente besäße, müßte diese zu $\mathfrak{m}^*$ gehören. Das aber widerspricht wegen $\mathfrak{m}^* \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{m}$ Hilfssatz 9 von § 3.

b) Nach Hilfssatz 8 darf $\mathfrak{p}' = (0)$ angenommen werden. Dann aber ist $\mathfrak{p}$ minimales Primideal in $\mathfrak{S}$, und nach Satz 10 und Satz 8 wird $\mathfrak{p}\mathfrak{S}^*$ Produkt von Potenzen gegenseitig primer *Primhauptideale* und damit frei von eingebetteten Komponenten. — Bei b) ist zu beachten, daß die Voraussetzung der Unverzweigtheit von $\mathfrak{S}/\mathfrak{p}'$ überflüssig ist, wenn die Vermutung zutrifft, daß jeder p-Reihenring einen Z. P. E.-Ring darstellt. Andererseits besitzt z. B. in einem p-Reihenring $\mathfrak{P}$ mit n-dimensionalem Nullideal jedes in $\mathfrak{m}^2$ enthaltene, höchstens $(n-2)$-dimensionale Primideal $\mathfrak{p}$ sicher kein reguläres Primunter-

[26]) Die die endliche Modulbasis betreffende Bedingung wurde gewonnen in der Arbeit: *W. Krull*, Ein Hauptsatz über primäre Integritätsbereiche, Math. Annalen **103** (1930), S. 540—565. Ein Beispiel, bei dem die endliche Modulbasis nicht existiert, wurde von *Y. Akizuki* angegeben (Proc. Math. Soc. Japan [3] **17** (1935), S. 327—336).

[27]) Denn in $\mathfrak{S}^*/\mathfrak{p}^*$ kann nur dann ein Hauptideal ein zu $\mathfrak{m}^*/\mathfrak{p}^*$ gehöriges Primideal sein, wenn das Nullideal von $\mathfrak{S}^*/\mathfrak{p}^*$ eindimensional ist.

ideal $\mathfrak{p}'$. Satz 12b liefert also keinen Ansatzpunkt zu einem Induktionsschluß, mit dem gezeigt werden könnte, daß wenigstens bei einem p-Reihenring $\mathfrak{P}$ immer $\mathfrak{p}\mathfrak{P}^*$ frei von eingebetteten Komponenten sein muß.

Bei Satz 13a) könnte man daran denken, durch eine geeignete Quotientenringbildung das gewonnene Resultat von eindimensionalen auf höherdimensionale Primideale zu übertragen. Aber auch hier stößt man auf Schwierigkeiten. Die mit Satz 13 angeschnittene allgemeine Frage muß also vorerst unbeantwortet bleiben. Dagegen kann man leicht allgemein zeigen:

Satz 14. *Bei einem m-dimensionalen Primideal $\mathfrak{p}$ aus dem p-Reihenring $\mathfrak{P}$ ist immer jedes minimale Primoberideal $\mathfrak{p}^*$ von $\mathfrak{p}\mathfrak{P}^*$ selbst m-dimensional.*

Beweis. Ist n die Dimension des Nullideals von $\mathfrak{P}$, so lassen sich in $\mathfrak{p}$ stets $n - m$ Elemente $A_1, \ldots, A_{n-m}$ so wählen, daß $(A_1, \ldots, A_{n-m})$ in $\mathfrak{P}$ und damit auch

$$(A_1, \ldots, A_{n-m})\,\mathfrak{P}^*$$

in $\mathfrak{P}^*$ genau $(n - m)$-dimensional ist. Nach Cohen ist dann $(A_1, \ldots, A_{n-m})\,\mathfrak{P}^*$ sogar ungemischt $(n - m)$-dimensional, es sind also insbesondere alle minimalen Primoberideale von $(A_1, \ldots, A_{n-m})\,\mathfrak{P}^*$ n-dimensional[28]). Mindestens eines von diesen, etwa $\mathfrak{q}^*$, muß wegen $(A_1, \ldots, A_{n-m})\,\mathfrak{P}^* \subset \mathfrak{p}\mathfrak{P}^* \subset \mathfrak{p}^*$ in $\mathfrak{p}^*$ enthalten sein. Unter Berücksichtigung von Hilfssatz 2 ergibt sich $\mathfrak{q}^* \cap \mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{p}^* \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{p}$, und daraus folgt $\mathfrak{q}^* \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{p}$, weil $\mathfrak{q}^* \cap \mathfrak{P}$ als Oberideal von $(A_1, \ldots, A_{n-m})$ ebenso wie $\mathfrak{p}$ die Dimension m hat. Es ist also $\mathfrak{q}^*$ ein $\mathfrak{p}\mathfrak{P}^*$ enthaltendes Primunterideal von $\mathfrak{p}^*$, d. h. es muß (wegen der Minimaleigenschaft von $\mathfrak{p}^*$) $\mathfrak{q}^* = \mathfrak{p}^*$ sein. $\mathfrak{p}^*$ ist demnach, wie behauptet, m-dimensional.

§ 5. Zusammenhang mit der Diskriminantentheorie.

Die Ergebnisse von § 3 sollen kurz in Zusammenhang mit der Diskriminantentheorie gebracht werden. Es sei $\mathfrak{R}$ ein beliebiger ganz abgeschlossener Integritätsbereich mit dem Quotientenkörper $\mathfrak{K}$. Ein Primideal $\mathfrak{q}$ aus $\mathfrak{R}$ möge *hinsichtlich des Primideals $\mathfrak{p}$ normal* heißen, wenn der Restklassenring $\mathfrak{R}_\mathfrak{p} / \mathfrak{q}\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ ganz abgeschlossen ist, falls $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ den zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Quotientenring von $\mathfrak{R}$ bedeutet. $\mathfrak{L}$ sei ein algebraischer Oberkörper von $\mathfrak{K}$ von endlichem Grade n, unter $\mathfrak{S}$ möge der Ring aller von $\mathfrak{R}$ ganz abhängigen Elemente aus $\mathfrak{L}$ verstanden werden. Von einem der Gleichung $\tilde{\mathfrak{p}} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{p}$ genügenden Primideal $\tilde{\mathfrak{p}}$ aus $\mathfrak{S}$, sagen wir, es *liege über* $\mathfrak{p}$. Ferner heißt $\mathfrak{S}$ hinsichtlich des $\mathfrak{R}$-Primideals $\mathfrak{p}$ *unverzweigt*, wenn ein Elementsystem $w_1, \ldots, w_n$ in $\mathfrak{S}$ existiert, derart daß die in üblicher Weise als Spurendeterminante definierte Diskriminante $d(w_1, \ldots, w_n)$ nicht zu $\mathfrak{p}$ gehört. Für relativ unverzweigte Ringerweiterungen gelten die folgenden Sätze[29]).

Ist $\mathfrak{S}$ hinsichtlich $\mathfrak{p}$ unverzweigt, und setzt man $\mathfrak{S}_\mathfrak{p} = \mathfrak{S}\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$, so wird $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}\mathfrak{S}_\mathfrak{p} \cap \mathfrak{R}_\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ für jedes Ideal $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$; ferner wird $\mathfrak{q}_\mathfrak{p}\mathfrak{S}_\mathfrak{p} = \tilde{\mathfrak{q}}_\mathfrak{p}^{(1)} \cap \cdots \cap \tilde{\mathfrak{q}}_\mathfrak{p}^{(s)}$, falls $\tilde{\mathfrak{q}}_\mathfrak{p}^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, s \leqq n)$ die endlich vielen, in $\mathfrak{S}_\mathfrak{p}$ über dem Primideal $\mathfrak{q}_\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ liegenden Primideale sind. (Bei dem zweiten Satz beachte man: Jedes Primideal $\mathfrak{q}_\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ entspricht umkehrbar eindeutig einem Primunterideal $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{R}$ $(\mathfrak{q}_\mathfrak{p} = \mathfrak{q}\mathfrak{R}_\mathfrak{p},\ \mathfrak{q} = \mathfrak{q}_\mathfrak{p} \cap \mathfrak{R})$. Die Ideale $\tilde{\mathfrak{q}}^{(i)} = \tilde{\mathfrak{q}}_\mathfrak{p}^{(i)} \cap \mathfrak{S}$ sind gerade die sämtlichen in $\mathfrak{S}$ über $\mathfrak{q}$ liegenden Primideale.)

Durch Verknüpfung der beiden Diskriminantensätze mit den Resultaten von § 3 ergibt sich:

Satz 15. *Ist $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ ein p-Reihenring (unverzweigter p-Reihenring) und ist $\mathfrak{S}$ hinsichtlich $\mathfrak{p}$ unverzweigt, so ist für jedes über $\mathfrak{p}$ liegende Primideal $\tilde{\mathfrak{p}}$ der Quotientenring $\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ ein p-Reihenring (unverzweigter p-Reihenring).*

---

[28]) Vgl. *Cohen* [1], S. 99, Theorem 5. Der Ungemischtheitssatz gilt für beliebige p-Reihenringe.

[29]) Vgl. *Krull* [3], § 4. Um die dortigen Ergebnisse anzuwenden, beachte man, daß „$\mathfrak{S}$-unverzweigt hinsichtlich $\mathfrak{p}$" im Sinne des Textes soviel bedeutet wie „$\mathfrak{S}\mathfrak{R}_\mathfrak{p} = \mathfrak{S}_\mathfrak{p}$ unverzweigt hinsichtlich $\mathfrak{S}_\mathfrak{p}$" im Sinne der zitierten Stelle.

Zum Beweis beachte man: Für $\mathfrak{S}_\mathfrak{p} = \mathfrak{S}\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ ist $\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ gleich dem zu $\tilde{\mathfrak{p}}\mathfrak{S}_\mathfrak{p}$ gehörigen Quotientenring von $\mathfrak{S}_\mathfrak{p}$. Nach den beiden Diskriminantensätzen ist $\tilde{\mathfrak{p}}\mathfrak{S}_\mathfrak{p}$ gleich einem der endlich vielen maximalen Primideale von $\mathfrak{S}_\mathfrak{p}$, deren Durchschnitt $\mathfrak{p}\mathfrak{S}_\mathfrak{p}$ darstellt. Es wird daher $\tilde{\mathfrak{p}}\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}} = (\mathfrak{p}\mathfrak{S}_\mathfrak{p})\,\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}} = \mathfrak{p}\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$, d. h. eine Basis von $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{R}$ ist auch eine solche von $\tilde{\mathfrak{p}}\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ in $\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$. Da $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{R}$ ganz abhängt, haben die Nullideale von $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{S}_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$, die gleiche Dimension[30]). Weil in $\mathfrak{L}$ ein System $w_1, \ldots, w_n$ mit $d(w_1, \ldots, w_n) \neq 0$ existiert, gilt die Maximalbedingung für $\mathfrak{S}_\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$, falls sie für $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ gilt. Aus diesen Bemerkungen folgt zunächst, daß jedenfalls $\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ sicher gleichzeitig mit $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ ein p-Reihenring ist.

Ist ferner der p-Reihenring $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ *unverzweigt*, so ist trivialerweise auch $\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ unverzweigt, wenn $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{K}$ die gleiche Charakteristik haben; denn dann liegt auch bei $\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}/\tilde{\mathfrak{p}}\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ und $\mathfrak{L}$ Charakteristikgleichheit vor. Es braucht also nur noch der Fall betrachtet zu werden, daß eine zu $\mathfrak{p}\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$, aber nicht zu $\mathfrak{p}^2\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ gehörige Primzahl p existiert. Hier sei m die Dimension des Nullideals von $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$; es existiert dann für $\mathfrak{p}$ sicher eine Basis $(p, a_2, \ldots, a_m)$, in der p als Element auftritt, und wir haben, wie bereits gezeigt, $\tilde{\mathfrak{p}}\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}} = (p, a_2, \ldots, a_m)\,\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$.

Läge nun p in $\tilde{\mathfrak{p}}^2\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$, so wäre $(a_2, \ldots, a_m)$ eine Basis von $\tilde{\mathfrak{p}}\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ modulo $\tilde{\mathfrak{p}}^2\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ und damit nach der allgemeinen Theorie der Stellenringe auch eine solche von $\tilde{\mathfrak{p}}\,\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ selbst[21]). Das widerspricht aber der Tatsache, daß m die Dimension des Nullideals von $\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ ist. Wir haben also $p \notin \tilde{\mathfrak{p}}^2\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$, d. h. $\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ ist unverzweigt.

Um eine besonders wichtige Anwendung von Satz 15 bequem formulieren zu können, definieren wir: Der Ring $\mathfrak{R}$ soll (unverzweigter) *Halb-p-Reihenring* heißen, wenn $\mathfrak{R}$ nur endlich viele maximale Primideale $\mathfrak{m}^{(i)}$ besitzt, und für jedes i der zugehörige Quotientenring $\mathfrak{R}_{\mathfrak{m}^{(i)}} = \mathfrak{R}_i$ ein p-Reihenring (unverzweigter p-Reihenring) ist. Diese Terminologie entspricht der Wahl des Namens „Halbstellenring" (semi-local-ring) für die Noetherschen Ringe mit endlich vielen maximalen Primidealen durch Chevalley. Aus Satz 8, 10 von § 3 und Satz 7b von § 2 folgt sofort der die Einführung des Begriffs des Halb-p-Reihenrings rechtfertigende

Satz 16. *Jeder unverzweigte Halb-p-Reihenring ist ein Z.P.E.-Ring.*

Nennen wir weiter, wie üblich, $\mathfrak{S}$ *unverzweigt hinsichtlich* $\mathfrak{R}$, wenn $\mathfrak{S}$ hinsichtlich jedes $\mathfrak{R}$-Primideals $\mathfrak{p}$ unverzweigt ist, und beachten wir, daß $\mathfrak{S}$ stets gleichzeitig mit $\mathfrak{R}$ nur endlich viele maximale Primideale enthält, so ergibt sich durch Spezialisierung von Satz 15:

Satz 17. *Ist $\mathfrak{R}$ ein Halb-p-Reihenring (unverzweigter Halb-p-Reihenring), und ist $\mathfrak{S}$ hinsichtlich $\mathfrak{R}$ unverzweigt, so ist immer auch $\mathfrak{S}$ ein Halb-p-Reihenring (unverzweigter Halb-p-Reihenring).*

In ähnlicher Weise kann man Satz 15 mit Satz 7a von § 2 kombinieren. Berücksichtigt man die Tatsache, daß $\mathfrak{S}$ stets gleichzeitig mit $\mathfrak{R}$ eine endliche diskrete Hauptordnung ist, so erhält man den Satz:

Ist $\mathfrak{R}$ eine endliche diskrete Hauptordnung, bei der für jedes maximale Primideal $\mathfrak{m}^{(\tau)}$ der zugehörige Quotientenring $\mathfrak{R}_\tau$ einen unverzweigten p-Reihenring darstellt, und ist $\mathfrak{S}$ hinsichtlich $\mathfrak{R}$ unverzweigt, so gilt in $\mathfrak{S}$ (ebenso wie in $\mathfrak{R}$) allgemein die Gleichung $(\mathfrak{a}^p\mathfrak{b}^p)^p = \mathfrak{a}^p\mathfrak{b}^p$.

Wichtig ist schließlich die Bemerkung, daß in den meisten Fällen, in denen man Satz 15 anwenden wird, der Ring $\mathfrak{R}$ die Eigenschaft besitzt, *ausschließlich* unverzweigte p-Reihenringe zu Quotientenringen $\mathfrak{R}_\mathfrak{t}$ zu besitzen. Nennen wir nämlich einen derartig

---

[30]) Vgl. *W. Krull*, Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche. III., Math. Zeitschr. **42** (1937), S. 745–766, § 3.

ausgezeichneten Ring kurz *lokal unverzweigt regulär*[31]), so können wir feststellen: Zu den lokal unverzweigt regulären Ringen gehören:

a) jeder Polynomring $K[u_1, \ldots, u_n]$ in endlich vielen Unbestimmten u_i mit Körperkoeffizienten;

b) jeder Polynomring $H[u_1, \ldots, u_n]$ mit Koeffizienten aus einem nullteilerfreien Hauptidealring H;

c) der Ring $K\{u_1, \ldots, u_n\}$ aller formalen Potenzreihen in $u_1, \ldots, u_n$ über einem beliebigen Körper K;

d) der Ring $\Delta\{u_1, \ldots, u_n\}$ aller formalen Potenzreihen in $u_1, \ldots, u_n$ über einem unverzweigten, perfekten, diskreten Bewertungsring Δ;

e) der Ring aller konvergenten Potenzreihen in $u_1, \ldots, u_n$ mit beliebigen komplexen (oder auch reellen) Koeffizienten.

Bei a) braucht man nur zu beachten, daß ein nulldimensionales Primideal aus $K[u_1, \ldots, u_n]$ eine wohlbekannte n-gliedrige Normalbasis besitzt, und daß der Fall einer positiven Dimension in geläufiger Weise durch Grundkörpererweiterung auf den nulldimensionalen reduziert werden kann. Bei b) kommt man mit beinahe denselben Überlegungen aus: Bei einem Primideal $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{R} = H[u_1, \ldots, u_n]$ ist entweder $\mathfrak{p} \frown H = (0)$. Dann enthält $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ den Quotientenkörper K von H, und man kommt unmittelbar auf a) zurück. Oder aber es gibt ein in $\mathfrak{p}$ liegendes Primelement π aus H, und man kann, falls $\bar{K}$ den *Körper* H/π bedeutet, von $H[u_1, \ldots, u_n]$ zu $\bar{K}[u_1, \ldots, u_n]$ übergehen. Die Fälle c) und d) sind von Cohen erledigt worden[32]). (Man beachte, daß es sich hier gerade um die unverzweigten vollständigen p-Reihenringe handelt.) Zu d) vergleiche man etwa eine Arbeit von W. Rückert[33]).

Im übrigen hat Zariski noch bewiesen, daß jeder *p-Reihenring aus einem endlichen algebraischen Funktionenkörper* (im Sinne von § 3) lokal unverzweigt regulär ist[34]). Zariski wirft in diesem Zusammenhang die Frage auf, ob etwa für *jeden* unverzweigten p-Reihenring ein entsprechender Satz gilt; er zeigt aber gleichzeitig, daß an der entscheidenden Stelle seines Beweises von Überlegungen Gebrauch gemacht wird, die speziell auf die algebraischen Funktionenkörper zugeschnitten sind. Hier handelt es sich also um ein Problem, zu dem noch kein ernsthafter Beweisansatz vorliegt.

Nennen wir (unter Beibehaltung der zu Beginn des Paragraphen eingeführten Bezeichnungen) bei einem lokal unverzweigten Ausgangsringe $\mathfrak{R}$ ein Primideal $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{R}$ *für den Übergang zu $\mathfrak{S}$ kritisch*, wenn es in $\mathfrak{S}$ ein über $\mathfrak{p}$ liegendes Primideal $\tilde{\mathfrak{p}}$ derart gibt, daß $\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ kein unverzweigter p-Reihenring mehr ist, so läßt sich für diesen Fall Satz 15 auch so formulieren: *$\mathfrak{p}$ kann nur dann für den Übergang zu $\mathfrak{S}$ kritisch sein, wenn $\mathfrak{S}$ hinsichtlich $\mathfrak{p}$ verzweigt (also nicht unverzweigt) ist.*

Den Begriff des kritischen Primideals habe ich bereits am Schlusse von Krull [4] eingeführt. Die damals aufgeworfene Frage wird durch die aus Satz 15 gezogene Folgerung im wesentlichen beantwortet. Allerdings spielte in der älteren Note der Begriff des p-Reihenringes keine Rolle, es drehte sich allein um die Gültigkeit des Z. P. E. Das ist aber wegen der Gültigkeit des Z. P. E. für alle unverzweigten p-Reihenringe bedeutungslos, solange wir einen lokal unverzweigt regulären Ring $\mathfrak{R}$ zum Ausgangspunkt

---

[31]) Das Wort „regulär" wurde hier — trotz der in [2]) und [16]) formulierten Bedenken — gewählt, um eine allzu schwerfällige Ausdrucksweise zu vermeiden.

[32]) *Cohen* [1], Theorem 20, S. 97.

[33]) *W. Rückert*, Zum Eliminationsproblem der Potenzreihenideale, Math. Annalen **107** (1932), S. 259–281.

[34]) *Zariski* [1], Theorem 3, S. 16; 4. 3, S. 17; 5. 3, S. 23.

wählen. (An der früheren Stelle war in erster Linie an die Möglichkeit gedacht, daß $\mathfrak{R}$ ein Polynomring mit Körperkoeffizienten ist.)

Andererseits kann man natürlich auch allgemeiner von einem *beliebigen Z.P.E.-Ring* $\mathfrak{R}$ ausgehen und ein $\mathfrak{R}$-Primideal $\mathfrak{p}$ *Z.P.E.-kritisch* nennen, wenn in $\mathfrak{S}$ ein über $\mathfrak{p}$ liegendes $\tilde{\mathfrak{p}}$ existiert, für das $\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ kein Z.P.E.-Ring wird. In diesem Falle lassen sich natürlich die für p-Reihenringe gültigen Sätze nicht mehr anwenden. Dagegen helfen die folgenden beiden bekannten Sätze[35]) ein Stück weiter.

a) Ist $\mathfrak{q}$ in $\mathfrak{R}$ ein Primunterideal des Primideals $\mathfrak{p}$, so gibt es in $\mathfrak{S}$ zu jedem über $\mathfrak{p}$ liegendem $\tilde{\mathfrak{p}}$ mindestens ein über $\mathfrak{q}$ liegendes, in $\tilde{\mathfrak{p}}$ enthaltenes $\tilde{\mathfrak{q}}$.

b) Ist $\mathfrak{q} \leq \mathfrak{p}$ *relativ* $\mathfrak{p}$ *normal*, d. h. ist der Restklassenintegritätsbereich $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{R}_{\mathfrak{p}}$ ganz abgeschlossen, und ist $\mathfrak{S}$ hinsichtlich $\mathfrak{p}$ unverzweigt, so wird für zwei über $\mathfrak{q}$ liegende Primideale $\tilde{\mathfrak{q}}_1, \tilde{\mathfrak{q}}_2$ stets $\tilde{\mathfrak{q}}_1 \mathfrak{S}_{\mathfrak{p}} + \tilde{\mathfrak{q}}_2 \mathfrak{S}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{S}_{\mathfrak{p}} (\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{S}\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}})$.

Aus a) und b) zusammengenommen folgt zunächst fast unmittelbar für beliebiges $\mathfrak{R}$:

Hilfssatz 9. *Ist $\mathfrak{S}$ hinsichtlich $\mathfrak{p}$ unverzweigt, $\tilde{\mathfrak{p}}$ ein über $\mathfrak{p}$ liegendes $\mathfrak{S}$-Primideal, so gibt es zu jedem relativ $\mathfrak{p}$ normalen Primunterideal $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ genau ein über $\mathfrak{q}$ liegendes Primideal, nämlich $\mathfrak{q}\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$.*

In der Tat, nach a) ist jedenfalls $\mathfrak{q}\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}} \neq \mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$. Nach dem bereits beim Beweise von Satz 15 benutzten Diskriminantensatz wird weiter $\mathfrak{q}\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ gleich dem Durchschnitt aller Ideale $\tilde{\mathfrak{q}}\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}$, bei denen $\tilde{\mathfrak{q}}$ ein über $\mathfrak{q}$ liegendes, in $\tilde{\mathfrak{p}}$ enthaltenes Primideal bedeutet. Nach b) gibt es schließlich nur ein einziges derartiges $\tilde{\mathfrak{q}}$.

Um Hilfssatz 9 auf den Fall eines Z.P.E.-Ringes $\mathfrak{R}$ anzuwenden, definieren wir noch: Das Primideal $\tilde{\mathfrak{q}}\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ aus $\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ möge *hinsichtlich* $\mathfrak{p}$ *normal* genannt werden, wenn $\tilde{\mathfrak{q}} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{q}$ relativ $\mathfrak{p}$ normal ist. Sind alle minimalen Primoberideale eines Hauptideals $(\tilde{a})\,\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ hinsichtlich $\mathfrak{p}$ normal, so soll $(\tilde{a})$ selbst hinsichtlich $\mathfrak{p}$ normal heißen. Dann gilt:

Satz 18. *Ist $\mathfrak{R}$ ein Z.P.E.-Ring, $\mathfrak{S}$ hinsichtlich $\mathfrak{p}$ unverzweigt und bedeutet $\tilde{\mathfrak{p}}$ ein beliebiges über $\mathfrak{p}$ liegendes $\mathfrak{S}$-Primideal, so ist in $\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ jedes hinsichtlich $\mathfrak{p}$ normale Hauptideal $(\tilde{a})\,\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ eindeutiges Produkt von Potenzen endlich vieler Primhauptideale. Für ein beliebiges Hauptideal $(\tilde{c})\,\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ existiert eine eindeutige Zerlegung $(\tilde{c})\,\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}} = (\tilde{a})\,\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}} \cdot (\tilde{b})\,\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$, bei der $(\tilde{a})\,\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ hinsichtlich $\mathfrak{p}$ normal ist, während $(\tilde{b})\,\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ kein einziges minimales, hinsichtlich $\mathfrak{p}$ normales Primoberideal besitzt.*

Beweis. Da $\mathfrak{S}$ als endlicher, ganz abgeschlossener, ganz abhängiger Oberring eines Z.P.E.-Rings eine endliche diskrete Hauptordnung ist, gilt in $\mathfrak{S}$ und damit auch in $\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ der Zerlegungssatz für v-Ideale von § 2, und das bedeutet in der Sprache der Dedekindschen Ideale: Jedes Hauptideal ist Durchschnitt von symbolischen Potenzen endlich vieler minimaler Ringprimideale[36]). Der Durchschnitt $\tilde{\mathfrak{q}}\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}} \cap \mathfrak{R}$ eines minimalen Primideals $\tilde{\mathfrak{q}}\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ aus $\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ mit $\mathfrak{R}$ ist aber ein minimales $\mathfrak{R}$-Primideal, und damit wegen des Z.P.E. ein Primhauptideal. Ist nun $\tilde{\mathfrak{q}}\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ hinsichtlich $\mathfrak{p}$ normal, so ist $\tilde{\mathfrak{q}}\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}} = \mathfrak{q}\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ nach Hilfssatz 9 selbst ein Primhauptideal; daraus folgt weiter, daß die symbolischen Potenzen von $\tilde{\mathfrak{q}}\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ mit den gewöhnlichen zusammenfallen, und daß $(\tilde{a})\,\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}} = (\tilde{a}_1)\,(\tilde{\mathfrak{q}}\,\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}})^r$ wird, falls $(\tilde{a})\,\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}} \leq (\tilde{\mathfrak{q}}\,\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}})^r$ ist. — Aus diesen Bemerkungen zusammengenommen ergibt sich mühelos die Richtigkeit von Satz 18.

Der wesentliche Inhalt von Satz 18 kann kurz und anschaulich auch folgendermaßen formuliert werden: Gilt für $\mathfrak{R}$ der Z.P.E. und ist $\mathfrak{S}$ hinsichtlich $\mathfrak{p}$ unverzweigt, so läßt sich in jedem $\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ $(\tilde{\mathfrak{p}} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{p})$ die multiplikative Halbgruppe $\mathfrak{H}$ aller ganzen Hauptideale eindeutig derart als direktes Produkt zweier Unterhalbgruppen $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ darstellen,

---

[35]) Vgl. § 2 der in [30]) zitierten Krullschen Arbeit (Satz a)) bzw. *Krull* [3], § 5 (Satz b)).

[36]) Vgl. *Krull* [1], Nr. 37. Die r-te symbolische Potenz $\mathfrak{p}^{(r)}$ von $\mathfrak{p}$ ist die zu $\mathfrak{p}$ gehörige isolierte Primärkomponente von $\mathfrak{p}^r$.

daß in $\mathfrak{H}_1$ der Z.P.E. gilt, während die Hauptideale der Halbgruppe $\mathfrak{H}_2$ (von $\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ selbst abgesehen) sämtlich einen wohldefinierten „abnormen" Charakter besitzen. — Die Ergebnisse von Satz 15 legen nun die *Vermutung* nahe, daß tatsächlich immer auch in der „abnormen" Halbgruppe $\mathfrak{H}_2$ der Z.P.E. erfüllt ist, daß man also ohne jede Einschränkung den Satz hat:

Ist $\mathfrak{R}$ ein Z.P.E.-Ring und $\mathfrak{S}$ hinsichtlich $\mathfrak{p}$ unverzweigt, so ist für jedes über $\mathfrak{p}$ liegende $\tilde{\mathfrak{p}}$ auch $\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ ein Z.P.E.-Ring.

Indessen ist für den Beweis dieser Vermutung jedenfalls eine Weiterentwicklung der Diskriminantentheorie über den bisher erreichten Stand hinaus nötig. Denn es zeigen Beispiele, daß für unsere Überlegungen bei Satz 18 der entscheidende Hilfssatz 9 nicht mehr gilt, wenn man die Beschränkung auf hinsichtlich $\mathfrak{p}$ normale Primideale $\mathfrak{q}$ fallen läßt.

§ 6. Ein Beispiel.

Um die Bedeutung der Unverzweigtheitsvoraussetzung (von $\mathfrak{S}$ hinsichtlich $\mathfrak{p}$) für die Betrachtungen von § 5 besser herauszuarbeiten und gleichzeitig das Rechnen mit symbolischen Potenzen und Durchschnitten minimaler Primideale in einer nicht dem Z.P.E. genügenden endlichen diskreten Hauptordnung zu veranschaulichen, betrachten wir ein einfaches Beispiel. Es sei K ein beliebiger Körper mit von 2 verschiedener Charakteristik, x und y seien Unbestimmte über K, ferner werde $\mathfrak{K} = K(x, y)$, $\mathfrak{R} = K[x, y]$ gesetzt. Schließlich sei z mit x und y durch die Gleichung $z^2 - xy = 0$ verbunden, so daß $\mathfrak{S} = K[x, y, z]$ zum Restklassenring des Polynomrings $K[x_1, x_2, x_3]$ nach dem Primideal $(x_3^2 - x_1 x_2)$ isomorph wird; $\mathfrak{L}$ sei der Quotientenkörper von $\mathfrak{S}$. Geometrisch entspricht dem Ringe $\mathfrak{S}$ im dreidimensionalen affinen Raume ein Kegel 2. Ordnung, dessen Spitze dem Primideal $\tilde{\mathfrak{p}} = (x, y, z)$ zugeordnet ist. Daß die Spitze für die Kegelfläche singulär ist, zeigt sich arithmetisch darin, daß der Stellenring $\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ kein p-Reihenring ist. Denn es hat ja in $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ das Nullideal die Dimension 2, während $\tilde{\mathfrak{p}}$ bzw. $\tilde{\mathfrak{p}}\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ nur eine dreigliedrige, aber keine zweigliedrige Basis besitzt. Bei einem Nicht-p-Reihenring dürfen wir erwarten, daß auch der Z.P.E. nicht gilt. In der Tat sind in $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ z. B. die Elemente $z, x, y, x - z, x + z$ unzerlegbar und man hat für z^2 bzw. $x^2 - xy$ die wesentlich verschiedenen Zerlegungen:

$$(1) \qquad z^2 = zz = xy; \quad x^2 - xy = x(x - y) = (x + z)(x - z).$$

Wir wollen zunächst untersuchen, wie die Formeln (1) mit der Zerlegung der Hauptideale (z^2) bzw. $(x^2 - xy)$ in $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ zusammenhängen. Dabei arbeiten wir in $\mathfrak{S}$; der Übergang zu $\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ erfordert dann nur die Beifügung des Faktors $\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ bei allen auftretenden Idealen. In $\mathfrak{S}$ sind $\tilde{\mathfrak{q}}_1 = (x, z)$, $\tilde{\mathfrak{q}}_2 = (y, z)$, $\tilde{\mathfrak{q}}_3 = (x - y, x + z)$, $\tilde{\mathfrak{q}}_4 = (x - y, x - z)$ eindimensionale Primideale, wie leicht aus den folgenden Bemerkungen zu ersehen ist:

1. Kein $\tilde{\mathfrak{q}}_i$ besitzt offenbar eine nicht in $\tilde{\mathfrak{p}}$ enthaltene Primärkomponente.

2. Da in $\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}/\tilde{\mathfrak{q}}_i\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ das einzige maximale Primideal Hauptideal wird, müßte $\tilde{\mathfrak{q}}_i$ ein zu $\tilde{\mathfrak{p}}$ gehöriges Primärideal sein, falls $\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}/\tilde{\mathfrak{q}}_i\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ Nullteiler enthielte.

3. Wäre $\tilde{\mathfrak{q}}_1(\tilde{\mathfrak{q}}_3)$ ein zu $\tilde{\mathfrak{p}}$ gehöriges Primideal, so wäre es aus Isomorphiegründen auch $\tilde{\mathfrak{q}}_2(\tilde{\mathfrak{q}}_4)$. Das ist aber wegen $\tilde{\mathfrak{q}}_1\tilde{\mathfrak{q}}_2 < (z)$ (bzw. $\tilde{\mathfrak{q}}_3\tilde{\mathfrak{q}}_4 < (x - y)$) ausgeschlossen.

Man verifiziert nun weiter mühelos: $\tilde{\mathfrak{q}}_1 \frown \tilde{\mathfrak{q}}_2 = (z)$, $\tilde{\mathfrak{q}}_3 \frown \tilde{\mathfrak{q}}_4 = (x - y)$; $\tilde{\mathfrak{q}}_1^2 = (x)\tilde{\mathfrak{p}}$, $\tilde{\mathfrak{q}}_2^2 = (y)\tilde{\mathfrak{p}}$; $\tilde{\mathfrak{q}}_1^{(2)} = (x)$, $\tilde{\mathfrak{q}}_2^{(2)} = (y)$ (symbolische Potenzen!); $\tilde{\mathfrak{q}}_1 \frown \tilde{\mathfrak{q}}_3 = (x + z)$, $\tilde{\mathfrak{q}}_1 \frown \tilde{\mathfrak{q}}_4 = (x - z)$. Aus diesen Relationen aber ergibt sich sofort: Die Formeln (1) sind gleichwertig mit den in $\mathfrak{S}$ gültigen Idealgleichungen

$$(2) \qquad \begin{aligned} &(\tilde{\mathfrak{q}}_1 \frown \tilde{\mathfrak{q}}_2)^2 = \tilde{\mathfrak{q}}_1^{(2)}\tilde{\mathfrak{q}}_2^{(2)} = \tilde{\mathfrak{q}}_1^{(2)} \frown \tilde{\mathfrak{q}}_2^{(2)}; \\ &(\tilde{\mathfrak{q}}_1 \frown \tilde{\mathfrak{q}}_3)(\tilde{\mathfrak{q}}_1 \frown \tilde{\mathfrak{q}}_4) = \tilde{\mathfrak{q}}_1^{(2)}(\tilde{\mathfrak{q}}_3 \frown \tilde{\mathfrak{q}}_4) = \tilde{\mathfrak{q}}_1^{(2)} \frown \tilde{\mathfrak{q}}_3 \frown \tilde{\mathfrak{q}}_4. \end{aligned}$$

Man beachte, daß es sich bei den beiden Formeln um Beziehungen zwischen Produkten und Durchschnitten handelt, die nur für die gerade betrachteten Primideale des speziellen Ringes $\mathfrak{S}$, keineswegs aber allgemein gelten.

Um nun unser Beispiel zur Veranschaulichung der Diskriminantentheorie auszunützen, fassen wir $\mathfrak{S}$ als Oberring von $\mathfrak{R}$ auf. Man sieht dann zunächst sofort (was bisher stillschweigend vorausgesetzt wurde): *$\mathfrak{S}$ ist ebenso wie $\mathfrak{R}$ ganz abgeschlossen.* Denn die Diskriminante $d(\frac{1}{2}, z) = xy$ des Elementsystems $w_1 = \frac{1}{2}$, $w_2 = z$, das eine Modulbasis für $\mathfrak{S}$ über $\mathfrak{R}$ bildet, ist im Z.P.E.-Ring $\mathfrak{R}$ durch keinen Primfaktor in höherer als erster Potenz teilbar. Aus der Basiseigenschaft des Systems w_1, w_2 folgt weiter, daß jede Diskriminante $d(\alpha_1, \alpha_2)$ $(\alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{S})$ in $\mathfrak{R}$ ein Vielfaches von xy sein muß, d. h.: *$\mathfrak{S}$ ist verzweigt* (also „nicht unverzweigt") *hinsichtlich der eindimensionalen Primideale* $\mathfrak{q}_1 = (x)$, $\mathfrak{q}_2 = (y)$ *und des nulldimensionalen Primideals* $\mathfrak{p} = (x, y)$. Die Verzweigtheit von $\mathfrak{S}$ hinsichtlich $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$ äußert sich nun zunächst in gewohnter Weise darin, daß $\mathfrak{q}_i \mathfrak{S}_{\mathfrak{q}_i}$ in $\mathfrak{S}_{\mathfrak{q}_i} = \mathfrak{S}\mathfrak{R}_{\mathfrak{q}_i}$ das Quadrat eines Primideals wird: $\mathfrak{q}_i \mathfrak{S}_{\mathfrak{q}_i} = (z)^2 \mathfrak{S}_{\mathfrak{q}_i} (i = 1, 2)$, während z. B. das Primideal $\mathfrak{q} = (x - y)$ hinsichtlich dessen $\mathfrak{S}$ unverzweigt ist, beim Übergang zu $\mathfrak{S}_{\mathfrak{q}} = \mathfrak{S}\mathfrak{R}_{\mathfrak{q}}$ in zwei verschiedene Primidealfaktoren zerfällt: $\mathfrak{q}\mathfrak{S}_{\mathfrak{q}} = ((x + z)\mathfrak{S}_{\mathfrak{q}})((x - z)\mathfrak{S}_{\mathfrak{q}})$. Ebenso ist als ein geläufiges Zeichen der Verzweigtheit von $\mathfrak{S}$ hinsichtlich $\mathfrak{p}$ anzusehen, daß über $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{S}$ nur das einzige Primideal $\tilde{\mathfrak{p}} = (x, y, z)$ liegt, und daß $\mathfrak{p}\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ in $\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ ein *echtes*, zu $\tilde{\mathfrak{p}}\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ gehöriges Primärideal wird. Wichtig als Ergänzung der Betrachtungen von § 5 ist aber für uns vor allem das Verhalten der Primideale $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$, $\mathfrak{q}$ beim Übergang zu $\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$. Hier ergibt sich aus den Formeln der ersten Hälfte des Paragraphen sofort:

Obwohl die Primideale $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$, $\mathfrak{q}$ alle hinsichtlich $\mathfrak{p}$ normal sind, und obwohl $\mathfrak{S}$ wenigstens hinsichtlich $\mathfrak{p}$ unverzweigt ist, sind die minimalen Primoberideale von $\mathfrak{q}_1\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$, $\mathfrak{q}_2\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$, $\mathfrak{q}\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ sämtlich Nichthauptideale (nämlich $\tilde{\mathfrak{q}}_1$ bzw. $\tilde{\mathfrak{q}}_2$ bzw. $\tilde{\mathfrak{q}}_3$ und $\tilde{\mathfrak{q}}_4$). Ist also $\mathfrak{R}$ ein Z.P.E.-Ring und $\mathfrak{S}$ hinsichtlich eines nichtminimalen Primideals $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{R}$ verzweigt, so darf man bei $\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ $(\tilde{\mathfrak{q}} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{p})$ in *keiner* Weise auf eine Erhaltung des Z.P.E. hoffen, auch *nicht* auf eine teilweise Erhaltung in dem Sinne, daß alle minimalen Primideale $\tilde{\mathfrak{q}}\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ Hauptideale wären, bei denen $\tilde{\mathfrak{q}}\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{q}$ ein Primhauptideal darstellt, hinsichtlich dessen $\mathfrak{S}$ unverzweigt ist. Die Unverzweigtheitsvoraussetzung ist demnach für die Betrachtungen von § 5 absolut unumgänglich.

Hervorgehoben sei schließlich noch, daß sich an unseren Betrachtungen nichts ändert, wenn wir den Musterstellenring $\mathfrak{S}$ *durch die zugehörige vollständige Hülle $\mathfrak{S}^*$ ersetzen.* Dabei können wir einerseits vom Ringe $\mathfrak{P}_3^* = K\{x_1, x_2, x_3\}$ aller formalen Potenzreihen in x_1, x_2, x_3 über K ausgehen und $\mathfrak{S}^*$ einführen als den Restklassenring von $\mathfrak{P}_3^*$ nach dem Hauptideal $(x_3^2 - x_1, x_2)\mathfrak{P}_3^*$, $(x = x_1, y = x_2, z = x_3)$. Andererseits können wir $\mathfrak{S}^*$ auffassen als Erweiterung des Ringes $\mathfrak{P}_2^* = K[x, y]$ aller formalen Potenzreihen in den Unbestimmten x, y durch eine Nullstelle z des Polynoms $X^2 - xy$. Daß $x_3^2 - x_1 x_2$ als Element von $\mathfrak{P}_3^*$ prim und $X^2 - xy$ als Polynom über dem Quotientenkörper von $\mathfrak{P}_3^*$ irreduzibel ist, sowie daß $x, y, z, x + z, x - z$ auch in $\mathfrak{S}^*$ unzerlegbare Elemente darstellen, ist sofort zu sehen, wenn man beachtet, daß $\mathfrak{P}_3^*$ und $\mathfrak{P}_2^*$ Z.P.E.-Ringe sind. Auch die Ganz-Abgeschlossenheit von $\mathfrak{S}^*$ ergibt sich genau so wie die von $\mathfrak{S}$.

Die Tatsache, daß wir in $\mathfrak{S}^*$ einen *ganz abgeschlossenen, vollständigen Stellenring* vor uns haben, der *kein Z.P.E.-Ring ist*, lehrt vor allem das eine: Es ist zwar eine interessante Frage, ob der Satz von Zariski [2], daß bei jedem ganz abgeschlossenen, nullteilerfreien Stellenring $\mathfrak{S}$ stets auch die vollständige Hülle $\mathfrak{S}^*$ von $\mathfrak{S}$ nullteilerfrei und ganz abgeschlossen ist, auf beliebige Stellenringe übertragen werden kann. (Vgl. den Anfang von § 4, wo wir — unter stillschweigender Heranziehung von Hilfssatz 8 — dem Zariskischen Resultat gleich eine etwas allgemeinere Fassung gegeben haben.) Aber im

übrigen dürfen wir von den ganz abgeschlossenen, nullteilerfreien Stellenringen, die keine p-Reihenringe sind, im Sinne der in dieser Note im Vordergrund stehenden Zerlegungstheorie der Elemente bzw. Hauptideale keine über die für alle endlichen diskreten Hauptordnungen gültigen Sätze hinausgehenden Ergebnisse erwarten, — nicht einmal im Spezialfall derjenigen Stellenringe, die vollständige Hüllen von ganz abgeschlossenen Stellenringen aus endlichen algebraischen Funktionenkörpern sind.

Das Hauptproblem der Zerlegungstheorie ist demnach ganz entschieden die Frage nach der Gültigkeit des Z.P.E. für beliebige vollständige p-Reihenringe. Dabei sei noch auf einen interessanten Zusammenhang hingewiesen: Ist unsere Frage zu bejahen, so gilt angesichts von Satz 8 allgemein: Ist die (verzweigte oder nichtverzweigte) endliche ganz abhängige Erweiterung $\mathfrak{S}_1$ des Stellenrings $\mathfrak{S}$ selbst ein Stellenring, so ist auch $\mathfrak{S}_1$ (ebenso wie $\mathfrak{S}$) ein Z.P.E.-Ring. Könnte man andererseits dieses Theorem direkt beweisen, so wäre damit angesichts des am Schlusse von §3 angegebenen Cohenschen Struktursatzes auch der Z.P.E. für verzweigte vollständige p-Reihenringe und damit der Z.P.E. für beliebige p-Reihenringe gesichert. (Daß hier unbedingt auch verzweigte Erweiterungen zugelassen werden müssen, folgt aus der Tatsache, daß eine Eisensteinsche Erweiterung im Sinne des Cohenschen Struktursatzes verzweigt ist. Das Beispiel des Hauptteils unseres Paragraphen ist für uns kein Gegenbeispiel, da ja der betrachtete Ring $\mathfrak{S}$ *kein* p-Reihenring war.) — Vielleicht ist hier tatsächlich ein Weg zum allgemeinen Beweis des Z.P.E. für p-Reihenringe gefunden. Die Schwierigkeiten, die die nicht normalen Primideale bei den verzweigten Erweiterungen machen (vgl. Satz 18 von § 5), legen allerdings eine gewisse Skepsis nahe.

§ 7. Σ-Ideale und Reziprokenbildung.

Wir verallgemeinern im folgenden den bei der Ableitung der Sätze von § 1 und § 2 benutzten Ansatz soweit wie möglich. Dabei haben wir insbesondere Gelegenheit, die Schwierigkeit, die bei Satz 4 von § 1 hervortrat, in einem größeren Zusammenhang genau zu analysieren. Es sei M eine beliebige Menge von Indizes μ; Σ sei eine Menge von multiplikativ abgeschlossenen, die 0 nicht enthaltenden Teilsystemen S_μ von $\mathfrak{R}$[37]). Mit $\mathfrak{R}_\mu$ werde jeweils der zu S_μ gehörige Quotientenring, also der Ring aller $\alpha = ab^{-1}$ ($a \in \mathfrak{R}$, $b \in S_\mu$) bezeichnet. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$ bzw. $\mathfrak{a}_\mu, \mathfrak{b}_\mu, \ldots$ seien $\mathfrak{R}$- bzw. $\mathfrak{R}_\mu$-Ideale. Ist jedem μ ein bestimmtes $\mathfrak{a}_\mu$ zugeordnet, so deuten wir das durch die Schreibweise $\{\mathfrak{a}_\mu\}$ an. Die Menge $\{\mathfrak{a}_\mu\}$ möge *zulässig* heißen, wenn ein $a \neq 0$ existiert derart, daß $a\mathfrak{a}_\mu \leq \mathfrak{R}_\mu$ ist für jedes μ. Wir betrachten nun solche Mengen Σ, bei denen die *Durchschnittsbedingungen* $\bigcap_\mu \mathfrak{R}_\mu = \mathfrak{R}$ erfüllt ist. Unter dieser Voraussetzung ist die Menge $\{\mathfrak{a}_\mu\}$ offenbar dann und nur dann zulässig, wenn $\bigcap_\mu \mathfrak{a}_\mu$ ein $\mathfrak{R}$-Ideal wird. Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges $\mathfrak{R}$-Ideal, so ist $\{\mathfrak{a}\mathfrak{R}_\mu\}$ sicher zulässig. Das Ideal $\bigcap_\mu(\mathfrak{a}\mathfrak{R}_\mu) = \mathfrak{a}^\Sigma$ heißt das *zu* $\mathfrak{a}$ *gehörige* Σ*-Ideal.* Offenbar wird $\mathfrak{a}^\Sigma\mathfrak{R}_\mu = \mathfrak{a}\mathfrak{R}_\mu$, $(\mathfrak{a}^\Sigma)^\Sigma = \mathfrak{a}^\Sigma$. Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^\Sigma$, so heißt $\mathfrak{a}$ Σ*-Ideal* schlechtweg.

Satz 19. *Die Zuordnung* $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}^\Sigma$ (Σ*-Operation*) *ist eine* $'$*-Operation im Sinne der Idealtheorie*[38]).

Der Beweis von Satz 19 erfordert nur triviale Verifikationen, so wird z. B. $(\alpha\mathfrak{a})\,\mathfrak{R}_\mu = \alpha(\mathfrak{a}\mathfrak{R}_\mu)$ und $\bigcap_\mu(\alpha\mathfrak{a})\,\mathfrak{R}_\mu = \alpha(\bigcap_\mu \mathfrak{a}\mathfrak{R}_\mu)$, also $(\alpha\mathfrak{a})^\Sigma = \alpha\mathfrak{a}^\Sigma$, oder man hat nach der allgemeinen Theorie der Quotientenringe $(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})\,\mathfrak{R}_\mu = \mathfrak{a}\mathfrak{R}_\mu \cap \mathfrak{b}\mathfrak{R}_\mu$, woraus sofort $\mathfrak{a}^\Sigma \cap \mathfrak{b}^\Sigma = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})^\Sigma$ folgt usw. Die Bildung von $\mathfrak{a} = \bigcap_\tau \mathfrak{a}_\tau$ im Sinne von § 1 und § 2 ist offenbar eine spezielle Σ-Operation (Σ_0-Operation); man erhält sie, wenn man für Σ_0

---

[37]) „Multiplikativ abgeschlossen" bedeutet natürlich: aus $a, b \in S$ folgt $ab \in S$.

[38]) Zur Theorie der $'$-Operationen vgl. *Krull* [1], Nr. 43, sowie: *W. Krull*, Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche. I., Math. Zeitschr. **41** (1936), S. 545—577.

die Menge aller Systeme $S_\tau = \mathfrak{R} - \mathfrak{m}^{(\tau)}$ wählt. Die Tatsache, daß die Σ_0-Operation jedes Ideal sich selbst zuordnet, räumt ihr eine Sonderstellung ein[39]). Bei einer beliebigen Σ-Operation erhält man für ein *ganzes* $\mathfrak{R}$-Ideal $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{g}^\Sigma = \bigcap_\mu \mathfrak{g}\mathfrak{R}_\mu = \bigcap_\mu (\mathfrak{g}\mathfrak{R}_\mu \cap \mathfrak{R}_\mu) = (\bigcap_\mu \mathfrak{g}\mathfrak{R}_\mu) \cap (\bigcap_\mu \mathfrak{R}_\mu) = (\bigcap_\mu \mathfrak{g}\mathfrak{R}_\mu) \cap \mathfrak{R} = \bigcap_\mu (\mathfrak{g}\mathfrak{R}_\mu \cap \mathfrak{R}).$$

$\mathfrak{g}\mathfrak{R}_\mu \cap \mathfrak{R}$ ist aber in der üblichen Terminologie der Idealtheorie das zu S_μ gehörige *i.K.I.* (isolierte Komponentenideal) von $\mathfrak{R}$. Bei einem ganzen $\mathfrak{R}$-Ideal $\mathfrak{g}$ kommt also die Σ-Operation einfach darauf hinaus, daß man $\mathfrak{g}$ durch den Durchschnitt aller der i.K.I. ersetzt, die durch die Systeme S_μ erzeugt werden[40]).

Satz 20. *Ein v-Ideal ist gleichzeitig Σ-Ideal für jede mögliche Σ-Operation. Es ist stets* $\mathfrak{a}^{-1} = (\mathfrak{a}^\Sigma)^{-1}$.

Beweis. Wegen $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{a}^\Sigma$ ist bei der ersten Behauptung von Satz 20 nur $(\mathfrak{a}^\Sigma)^{-1} \geq \mathfrak{a}^{-1}$ zu beweisen. Ist aber $\alpha\mathfrak{a} \leq \mathfrak{R}$, so ist $\alpha(\mathfrak{a}\mathfrak{R}_\mu) = (\alpha\mathfrak{a})\,\mathfrak{R}_\mu \leq \mathfrak{R}_\mu$ für jedes μ und damit $\alpha\mathfrak{a}^\Sigma \leq \bigcap_\mu \mathfrak{R}_\mu = \mathfrak{R}$. — Wird nun $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^v = (\mathfrak{a}^{-1})^{-1}$, so folgt aus $(\mathfrak{a}^{-1})^{-1} = ((\mathfrak{a}^\Sigma)^{-1})^{-1} \geq \mathfrak{a}^\Sigma$ sofort $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^\Sigma$. — Die beim Beweise von Satz 19 benützte Überlegung liefert unmittelbar die Gleichung $\mathfrak{a}^{-1} = \bigcap_\mu (\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{R}_\mu)$. Es wird aber auch $\mathfrak{a}^{-1} = \bigcap_\mu (\mathfrak{a}\mathfrak{R}_\mu)^{-1}$. Denn es ist $\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{R}_\mu \leq (\mathfrak{a}\mathfrak{R}_\mu)^{-1}$ für jedes μ und aus $\alpha \in \bigcap_\mu (\mathfrak{a}\mathfrak{R}_\mu)^{-1}$ folgt $\alpha\mathfrak{a} \leq \bigcap_\mu \mathfrak{R}_\mu = \mathfrak{R}$; $\alpha \in \mathfrak{a}^{-1}$.

Wählt man speziell die Σ_0-Operation und betrachtet man den Ring $\mathfrak{R}$ und das Ideal $\mathfrak{a}$, die beim Beweise von Satz 4 benutzt wurden, so sieht man, daß zwei *verschiedene* zulässige Mengen (im Beispiel $\{(\mathfrak{a}\mathfrak{R}_\mu)^{-1}\}$ und $\{\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{R}_\mu\}$) bei der Durchschnittsbildung das gleiche Ideal $\bigcap_\mu \mathfrak{a}_\mu = \bigcap_\mu \mathfrak{b}_\mu$ $(\bigcap_\mu (\mathfrak{a}\mathfrak{R}_\mu)^{-1} = \bigcap_\mu \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{R}_\mu)$ liefern können, und daß nicht $\bigcap_\mu \mathfrak{a}_\mu^{-1} = \bigcap_\mu \mathfrak{b}_\mu^{-1}$ aus $\bigcap_\mu \mathfrak{a}_\mu = \bigcap_\mu \mathfrak{b}_\mu$ zu folgen braucht. (Im Beispiel wird $\bigcap_\mu ((\mathfrak{a}\mathfrak{R}_\mu)^{-1})^{-1} = \mathfrak{a}$, $\bigcap_\mu (\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{R}_\mu)^{-1} = \bigcap_\mu \mathfrak{R}_\mu = \mathfrak{R} > \mathfrak{a}$).

Wir analysieren im folgenden die Schwierigkeiten, die in diesem Beispiel zu Tage treten, genauer, weil man auf diese Weise zu einigen an sich bemerkenswerten Definitionen und Sätzen kommt.

Die zulässige Menge $\{\mathfrak{a}_\mu\}$ möge zu dem Σ-Ideal $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^\Sigma$ *zugehörig* heißen, wenn $\mathfrak{a} = \bigcap_\mu \mathfrak{a}_\mu$. Ist $\{\mathfrak{a}_\mu\}$ eine beliebige, zu $\mathfrak{a}$ gehörige Menge, so ist $\mathfrak{a}\mathfrak{R}_\mu \leq \mathfrak{a}_\mu$. Die Menge $\{\mathfrak{a}\mathfrak{R}_\mu\}$ darf daher als die *zu* $\mathfrak{a}$ *gehörige Minimalmenge* bezeichnet werden. Es gilt nun zwar, wie mühelos einzusehen:

Ist $\{\mathfrak{a}_\mu\}$ bzw. $\{\mathfrak{b}_\mu\}$ die zu $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$ gehörige Minimalmenge, so stellt $\{\mathfrak{a}_\mu \cap \mathfrak{b}_\mu\}$ bzw. $\{\mathfrak{a}_\mu + \mathfrak{b}_\mu\}$ bzw. $\{\mathfrak{a}_\mu \mathfrak{b}_\mu\}$ die zu $(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})^\Sigma = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ bzw. $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})^\Sigma$ bzw. $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})^\Sigma$ gehörige Minimalmenge dar.

Aber dieser Satz wird zum mindesten hinsichtlich der *Produktbildung falsch*, wenn man statt von Minimalmengen von beliebigen zugehörigen Mengen reden würde. Es kann vorkommen, daß $\{\mathfrak{a}_\mu \mathfrak{b}_\mu\}$ zu einem echten Oberideal von $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})^\Sigma$ gehört, wenn $\{\mathfrak{a}_\mu\}$ die zu $\mathfrak{a}$ gehörige Minimalmenge, $\{\mathfrak{b}_\mu\}$ eine passende zu $\mathfrak{b}$ gehörige Menge bedeutet[41]). Andererseits ist es, wie wir bereits gesehen haben, möglich, daß $\{(\mathfrak{a}_\mu)^{-1}\}$ zwar eine zugehörige Menge, aber nicht die zugehörige Minimalmenge von $\mathfrak{a}^{-1}$ wird, wenn $\{\mathfrak{a}_\mu\} = \{\mathfrak{a}\mathfrak{R}_\mu\}$ die zugehörige Minimalmenge von $\mathfrak{a}$ ist.

---

[39]) Man sieht mühelos: Eine Σ-Operation genügt dann und nur dann der Bedingung $\mathfrak{a}^\Sigma = \mathfrak{a}$ für alle $\mathfrak{a}$, wenn für jedes maximale Primideal $\mathfrak{m}^{(\tau)}$ in Σ ein $S_\mu \leq \mathfrak{R} - \mathfrak{m}^{(\tau)}$ vorkommt. — Daß die Bedingung hinreicht, ist klar. Denn man hat $\mathfrak{a}_\tau \leq \mathfrak{a}\mathfrak{R}_\mu$ für den zu dem ausgezeichneten S_μ gehörigen Ring $\mathfrak{R}_\mu$. Also wird $\bigcap_\mu \mathfrak{a}\mathfrak{R}_\mu \leq \bigcap_\tau \mathfrak{a}_\tau = \mathfrak{a}$. — Gibt es andererseits in Σ für ein festes τ *kein* $S_\mu \leq \mathfrak{R} - \mathfrak{m}^{(\tau)}$, so wird $\mathfrak{m}^{(\tau)}\mathfrak{R}_\mu = \mathfrak{R}_\mu$ für alle μ und damit $(\mathfrak{m}^{(\tau)})^\Sigma = \mathfrak{R}$.

[40]) Zur Theorie der i. K. I. vgl. *Krull* [1], Nr. 6.

[41]) Um ein einfaches Beispiel für diese Möglichkeit zu gewinnen, betrachten wir in Satz 4 von § 1 die Σ_0-Operation beim Ring $\mathfrak{R}$ aller ganzen algebraischen Zahlen. $\mathfrak{m}^{(0)}$, $\mathfrak{q}$ sollen die gleiche Bedeutung haben wie damals. Ferner werde $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{R}$, $\mathfrak{a}_\tau = \mathfrak{q}\mathfrak{R}_\tau (\tau \neq 0)$, $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{q}\mathfrak{R}_0$, $\mathfrak{b}_\tau = \mathfrak{R}_\tau (\tau \neq 0)$, $\mathfrak{b}_0 = (\mathfrak{q}\mathfrak{R}_0)^{-1}$ gesetzt. Dann ist $\{\mathfrak{a}_\tau\}$ die zu $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}$ gehörige Minimalmenge, $\{\mathfrak{b}_\tau\}$ eine zu $\mathfrak{b} = \mathfrak{R}$ gehörige Menge. Andererseits wird $\mathfrak{a}_\tau \mathfrak{b}_\tau = \mathfrak{R}_\tau$ für *alle* τ einschließlich $\tau = 0$, es gehört also $\{\mathfrak{a}_\tau \mathfrak{b}_\tau\}$ zu $\mathfrak{R}$ und *nicht* zu $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{q}$.

Aus diesem Grunde ist es ohne weiteres verständlich, daß man aus „$\mathfrak{a}^{\Sigma}\mathfrak{R}_{\mu}$ umkehrbar (bzw. v-Ideal) für alle μ“ nicht auf „$\mathfrak{a}^{\Sigma}$ umkehrbar (bzw. v-Ideal)“ schließen darf. Betrachtet man andererseits den Ring $\mathfrak{R}$ als regulär hinsichtlich einer gegebenen Σ-Operation (kurz *Σ-regulär*), wenn stets $(\mathfrak{a}\mathfrak{R}_{\mu})^{-1} = \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{R}_{\mu}$ wird, und definiert man für zulässige Mengen $\{\mathfrak{a}_{\mu}\}$ die Multiplikation, Inversenbildung usw. durch $\{\mathfrak{a}_{\mu}\}\{\mathfrak{b}_{\mu}\} = \{\mathfrak{a}_{\mu}\mathfrak{b}_{\mu}\}$, $\{\mathfrak{a}_{\mu}\}^{-1} = \{(\mathfrak{a}_{\mu})^{-1}\}$ usw. so erhält man ohne Schwierigkeit:

Satz 21. *Ist $\mathfrak{S}$ Σ-regulär, so ist die eindeutig umkehrbare Zuordnung*

$$\mathfrak{a}^{\Sigma} \to \{\mathfrak{a}^{\Sigma}\mathfrak{R}_{\mu}\} \to \bigcap_{\mu}(\mathfrak{a}^{\Sigma}\mathfrak{R}_{\mu}) = \mathfrak{a}^{\Sigma}$$

der Σ-Ideale und ihrer zugehörigen Minimalfolgen ein Isomorphismus hinsichtlich der vier Operationen $\cdot$, $^{-1}$, $+$, $\cap$, und es ist ein Σ-Ideal $\mathfrak{a}^{\Sigma}$ dann und nur dann umkehrbar bzw. v-Ideal, wenn $\mathfrak{a}^{\Sigma}\mathfrak{R}_{\mu}$ für jedes μ umkehrbar bzw. v-Ideal ist.

Der 2. Teil von Satz 21 folgt in Anbetracht der Definition der umkehrbaren und der v-Ideale unmittelbar aus dem ersten; dabei ist zu beachten, daß nach Satz 20 *alle* umkehrbaren und *alle* v-Ideale Σ-Ideale sind. Im übrigen verdient für v-Ideale noch die folgende Bemerkung hervorgehoben zu werden:

Satz 22. *Ist $\mathfrak{R}$ Σ-regulär und ist $\mathfrak{a}_{\mu_0}$ ein v-Ideal des Ringes $\mathfrak{R}_{\mu_0}$, so gibt es stets ein v-Ideal $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{a}\mathfrak{R}_{\mu_0} = \mathfrak{a}_{\mu_0}$.*

Beweis. Wegen $(\alpha\mathfrak{a})^{v} = \alpha\mathfrak{a}^{v}$ und $(\alpha\mathfrak{a})\mathfrak{R}_{\mu} = \alpha(\mathfrak{a}\mathfrak{R}_{\mu})$ darf $\mathfrak{a}_{\mu_0} = \mathfrak{g}_{\mu_0}$ als ganzes $\mathfrak{R}_{\mu_0}$-Ideal angenommen werden. $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}_{\mu_0} \cap \mathfrak{R}$ ist dann das größte ganze $\mathfrak{R}$-Ideal $\mathfrak{g}$ für das $\mathfrak{g}\mathfrak{R}_{\mu_0} = \mathfrak{a}_{\mu_0}$ wird. Ist $\{\mathfrak{g}_{\mu}\}$ die zu $\mathfrak{g}^{(0)}$ gehörige Minimalfolge, so ist $\{((\mathfrak{g}_{\mu})^{-1})^{-1}\}$ wegen der Σ-Regularität von $\mathfrak{R}$ die von $((\mathfrak{g}^{(0)})^{-1})^{-1} = (\mathfrak{g}^{(0)})^{v}$, und wegen $\mathfrak{R} \geq (\mathfrak{g}^{(0)})^{v}$, $((\mathfrak{g}_{\mu_0})^{-1})^{-1} = \mathfrak{g}_{\mu_0}$ und der Maximaleigenschaft von $\mathfrak{g}^{(0)}$ wird $(\mathfrak{g}^{(0)})^{v} = \mathfrak{g}^{(0)}$.

Um Kriterien für Σ-Regularität zu gewinnen, nennen wir $\mathfrak{R}$ *Σ-endlich*, wenn zu jedem Σ-Ideal $\mathfrak{a}$ ein endliches Unterideal $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ derart existiert, daß $\mathfrak{a}^{\Sigma} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^{\Sigma}$ wird. Es gilt dann:

Satz 23. *Ein Σ-endlicher Ring ist stets auch Σ-regulär.*

Denn es wird, wie bei Satz 20 gezeigt, $\mathfrak{c}^{-1} = \mathfrak{a}^{-1}$ falls $\mathfrak{c}^{\Sigma} = \mathfrak{a}$. Ist ferner $\mathfrak{c} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ endlich, so wird $\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{R}_{\mu} = (\mathfrak{c}\mathfrak{R}_{\mu})^{-1}$, wie man sofort durch Verallgemeinerung des Beweises von Satz 3, § 1, erkennt. (Man hat dabei im wesentlichen nur „ein $c \in S_{\mu}$“ anstelle von „ein $c \in \mathfrak{m}^{(\tau)}$“ zu setzen.) Wir haben nun: $(\mathfrak{a}\mathfrak{R}_{\mu})^{-1} > \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{R}_{\mu}$; andererseits $(\mathfrak{a}\mathfrak{R}_{\mu})^{-1} \leq (\mathfrak{c}\mathfrak{R}_{\mu})^{-1} = \mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{R}_{\mu} = \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{R}_{\mu}$, also $(\mathfrak{a}\mathfrak{R}_{\mu})^{-1} = \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{R}_{\mu}$.

Ein hinreichendes Kriterium für die Σ-Endlichkeit eines Ringes liefert:

Satz 24. *Ist jeder $\mathfrak{R}_{\mu}$ ein Noetherscher Ring und ist außerdem jedes $a \neq 0$ nur in endlich vielen $\mathfrak{R}_{\mu}$ Nichteinheit, so ist $\mathfrak{R}$ Σ-endlich.*

Unter unserer Voraussetzung gilt nämlich offenbar im Bereich der ganzen Σ-Ideale die Maximalbedingung. Daraus folgt zunächst, daß zu jedem ganzen Σ-Ideal $\mathfrak{g}$ ein endliches Ideal $(a_1, \ldots, a_n)$ mit $(a_1, \ldots, a_n)^{\Sigma} = \mathfrak{g}^{\Sigma}$ existiert. Aus $(\alpha\mathfrak{a})^{\Sigma} = \alpha\mathfrak{a}^{\Sigma}$ ergibt sich dann weiter die volle Σ-Endlichkeit von $\mathfrak{R}$.

Kritisch ist zu Satz 24 zu bemerken: Da jeder ganz abgeschlossene Noethersche Ring eine endliche diskrete Hauptordnung darstellt, und da der Durchschnitt von beliebig vielen endlichen diskreten Hauptordnungen selbst eine solche ist, falls nur jedes $a \neq 0$ aus $\mathfrak{R}$ in fast allen $\mathfrak{R}_{\mu}$ Einheit ist, gilt offenbar:

Satz 25. *Alle ganz abgeschlossenen, den Bedingungen von Satz 23 genügenden Ringe sind endliche diskrete Hauptordnungen.*

Interessiert man sich also nur für v-Ideale in ganz abgeschlossenen Ringen, so ist Satz 24 bedeutungslos, da ja für die v-Ideale der endlichen diskreten Hauptordnungen der abschließende Satz von der eindeutigen Zerlegbarkeit in v-Primidealfaktoren gilt.

Um eine Anwendung von Satz 24 zu geben, nehmen wir speziell an, es seien mit M die *minimalen* Primideale von $\mathfrak{R}$ durchnumeriert. S_μ^* sei das System aller nicht zu dem minimalen Primideal $\mathfrak{p}_\mu^*$ gehörigen $\mathfrak{R}$-Elemente, so daß der zugehörige Quotientenring $\mathfrak{R}_\mu^*$ ein *primärer* Integritätsbereich wird, dessen ganze Ideale umkehrbar eindeutig den zu $\mathfrak{p}_\mu^*$ gehörigen Primäridealen aus $\mathfrak{R}$ entsprechen.

Satz 26. *Es wird dann und nur dann $\bigcap_\mu \mathfrak{R}_\mu^* = \mathfrak{R}$, die Menge Σ^* aller S_μ^* definiert also dann und nur dann eine Σ^*-Operation, wenn jedes ganze $\mathfrak{R}$-Hauptideal Durchschnitt von Primäridealen ist, die zu minimalen Primidealen $\mathfrak{p}_\mu^*$ gehören. — Ist diese Bedingung erfüllt, so gilt im Bereich der zu $\mathfrak{p}_\mu^*$ gehörigen Primideale die Maximalbedingung, und liegt jedes $a \neq 0$ nur in endlich vielen $\mathfrak{p}_\mu^*$, so ist $\mathfrak{R}$ sicher Σ^*-endlich.*

Beweis. Angesichts von Satz 24 muß nur die erste Hälfte von Satz 26 bewiesen werden. Bedeutet $\mathfrak{q}_\mu^{(a)}$ die zu $\mathfrak{p}_\mu^*$ gehörige Primärkomponente von (a) oder $\mathfrak{R}$ je nachdem ob $a \in \mathfrak{p}_\mu^*$ ist oder nicht, so ist $\frac{a}{b} \in \mathfrak{R}_\mu$ gleichwertig mit $\mathfrak{q}_\mu^{(a)} \leq \mathfrak{q}_\mu^{(b)}$. Gibt es also für passendes b ein a, das in $\bigcap_\mu \mathfrak{q}_\mu^{(b)}$, aber nicht in (b) liegt, so hat man $\frac{a}{b} \notin \mathfrak{R}$, $\frac{a}{b} \in \bigcap_\mu \mathfrak{R}_\mu$. Ist andererseits stets $(a) = \bigcap_\mu \mathfrak{q}_\mu^{(a)}$, so besagt $\frac{a}{b} \in \bigcap_\mu \mathfrak{R}_\mu$ soviel wie $(a) \leq (b)$, $\frac{a}{b} \in \mathfrak{R}$.

§ 8. Σ-Ideale und Λ-Ideale.

Es soll jetzt noch kurz der Zusammenhang der Σ-Operationen mit einer anderen Klasse von $'$-Operationen untersucht werden, die ich früher als *Λ-Operationen* bezeichnet habe[42]). Es sei Λ eine Menge von ganzen *endlichen* Idealen $\mathfrak{e}_\sigma$, die mit $\mathfrak{e}_{\sigma_1}$ und $\mathfrak{e}_{\sigma_2}$ stets auch das Produkt $\mathfrak{e}_{\sigma_1}\mathfrak{e}_{\sigma_2}$ enthält. Außerdem möge (was nicht unbedingt notwendig, aber zweckmäßig ist), angenommen werden, daß in Λ mit $\mathfrak{e}_\sigma$ immer auch jedes ganze endliche Oberideal $\mathfrak{e}$ von $\mathfrak{e}_\sigma$ liegt. Für ein beliebiges $\mathfrak{R}$-Ideal $\mathfrak{a}$ definieren wir $\mathfrak{a}^\Lambda$ als das Ideal aller der α, zu denen ein $\mathfrak{e}_\sigma \in \Lambda$ existiert derart, daß $\alpha\mathfrak{e}_\sigma \leq \mathfrak{a}$ gilt. Man sieht dann mühelos:

Die Zuordnung $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}^\Lambda$ definiert dann und nur dann eine $'$-Operation (Λ-Operation), wenn $\mathfrak{R}^\Lambda = \mathfrak{R}$.

Es sei nun Λ zunächst beliebig, Σ' bedeute die (eventuell leere) Menge aller der $\mathfrak{R}$-Primideale $\mathfrak{p}_\mu$, die kein einziges $\mathfrak{e}_\sigma \in \Lambda$ enthalten. Dann gilt

Satz 27. *Besitzt in $\mathfrak{R}$ jedes ganze Ideal nur endlich viele minimale Primoberideale*[43]), *so besteht Λ aus allen und nur den ganzen endlichen Idealen $\mathfrak{e}$, die in keinem einzigen $\mathfrak{p}_\mu \in \Sigma'$ enthalten sind.*

Beweis. Es sei nämlich $\mathfrak{e}$ eines der genannten Ideale; $\mathfrak{p}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{p}^{(m)}$ seien seine endlich vielen minimalen Primoberideale. Dann gibt es sicher zu jedem $\mathfrak{p}^{(i)}$ ein zu Λ gehöriges $\mathfrak{e}_{\sigma_i} \leq \mathfrak{p}^{(i)}$. Ist etwa $\mathfrak{e}_{\sigma_i} = (a_{i1}, \ldots, a_{im_i})$, so folgt nach einem bekannten Hauptsatz der Idealtheorie für jedes Einzelprodukt $a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{mk_m} = c_{k_1,\ldots,k_m}$ aus

$$c_{k_1,\ldots,k_m} \in \mathfrak{p}^{(1)} \cap \cdots \cap \mathfrak{p}^{(m)}$$

die Existenz eines endlichen Exponenten r derart, daß $c_{k_1,\ldots,k_m}^r \in \mathfrak{e}$. Es wird daher auch $(\mathfrak{e}_{\sigma_1}\cdots\mathfrak{e}_{\sigma_m})^r \leq \mathfrak{e}$ für hinreichend großes r, und daraus folgt $\mathfrak{e} \in \Lambda$ nach Definition von Λ.

Ist insbesondere Σ leer, so enthält Λ unter der Voraussetzung von Satz 27 *alle* ganzen Ideale ($\neq 0$!) aus $\mathfrak{R}$, und es wird dementsprechend $\mathfrak{a}^\Lambda = \mathfrak{R}$ für alle $\mathfrak{a}$. Wir schließen diesen

---

[42]) In § 10 der in [38]) zitierten Arbeit bzw. in § 5 der Arbeit: *W. Krull*, Beitr. zur Arithm. kommutativer Integritätsbereiche. VIII., Math. Zeitschr. **48** (1943), S. 1–20.

[43]) Zur Bedeutung der minimalen Primoberideale vgl. *Krull* [1], Nr. 3.

Trivialfall von der Betrachtung aus und verstehen im folgenden unter Σ' stets ein nicht leeres System von Primidealen $\mathfrak{p}_\mu$, das gleichzeitig mit $\mathfrak{p}_{\mu_0}$ immer auch jedes Primunterideal von $\mathfrak{p}_{\mu_0}$ enthält, unter S_μ bzw. $\mathfrak{R}_\mu$ das System $\mathfrak{R}_\mu - \mathfrak{p}_\mu$ aller nicht zu $\mathfrak{p}_\mu$ gehörigen Ringelemente bzw. den zugehörigen Quotientenring, unter Σ die Menge aller S_μ; Λ bedeute stets die Menge aller der ganzen endlichen Ideale $\mathfrak{e}_\sigma$, die in keinem $\mathfrak{p}_\mu \in \Sigma'$ enthalten sind, $\mathfrak{a}^\Lambda$ möge den gleichen Sinn besitzen wie bisher. Gibt es in Σ' bzw. $\mathfrak{R}$ keine unendliche Primoberidealkette $\mathfrak{p}_1 < \mathfrak{p}_2 < \cdots$, so sagen wir, es gelte in Σ' bzw. $\mathfrak{R}$ die *Maximalbedingung für Primideale.*

Satz 28. *Es ist stets* $\mathfrak{a}^\Lambda \leq \bigcap_\mu(\mathfrak{a}\mathfrak{R}_\mu)$. *Besitzt jedes ganze* $\mathfrak{R}$*-Ideal unter seinen minimalen Primoberidealen höchstens endlich viele, die zu* Σ' *gehören, und gilt außerdem in* Σ' *die Maximalbedingung für Primideale, so wird* $\mathfrak{a}^\Lambda = \bigcap_\mu(\mathfrak{a}\mathfrak{R})$ *für jedes* $\mathfrak{a}$.

Beweis. a) Ist $\alpha\mathfrak{e}_\sigma \leq \mathfrak{a}(\mathfrak{e}_\sigma \in \Lambda)$, so gibt es nach Definition von Λ für jedes $\mathfrak{p}_\mu \in \Sigma'$ in $\mathfrak{e}_\sigma$ ein $a_\mu \in \mathfrak{p}_\mu$ und aus $\alpha a_\mu \in \mathfrak{a}$ folgt $\alpha \in \mathfrak{a}\mathfrak{R}_\mu$.

b) Sind die Voraussetzungen des zweiten Teiles von Satz 28 erfüllt, so ist zu zeigen, daß aus $\alpha \in \bigcap_\mu(\mathfrak{a}\mathfrak{R}_\mu)$ die Existenz eines $\mathfrak{e}_\sigma \in \Lambda$ mit $\alpha\mathfrak{e}_\sigma \leq \mathfrak{a}$ folgt. Es sei nun zunächst c_0 irgendein $\mathfrak{R}$-Element, für das $\alpha c_0 \in \mathfrak{a}$. Ist $\mathfrak{c}_0 = (c_0)$ ein $\mathfrak{e}_\sigma$, so sind wir fertig. Im anderen Fall gibt es endlich viele in Σ' liegende minimale Primoberideale $\mathfrak{p}^{(0)}_{\mu_{i0}}$ $(i = 1, \ldots, n_0)$ von $\mathfrak{c}_0$. Wegen $\alpha \in \bigcap_\mu(\mathfrak{a}\mathfrak{R}_\mu)$ existiert weiter für jedes i ein $c_i'^{(0)}$, derart, daß $c_i^{(0)} \in \mathfrak{p}^{(0)}_{\mu_{i0}}$, $\alpha c_i'^{(0)} \in \mathfrak{a}$. Ist das der Bedingung $\alpha\mathfrak{c}_1 \leq \mathfrak{a}$ genügende endliche Ideal $\mathfrak{c}_1 = (c_0, c_1^{(0)}, \ldots, c_{n_0}'^{(0)})$ kein $\mathfrak{e}_\sigma$ aus Λ, so besitzt $\mathfrak{c}_1$ endlich viele, zu Σ' gehörige minimale Primoberideale $\mathfrak{p}'^{(1)}_{\mu_{i1}}$ $(i = 1, \ldots, n_1)$. Jedes $\mathfrak{p}^{(1)}_{\mu_{i1}}$ muß mindestens ein minimales Primoberideal von $\mathfrak{c}_0$ enthalten, und dieses muß nach Definition von Λ in die Reihe $\mathfrak{p}^{(0)}_{\mu_{i0}}$ $(i = 1, \ldots, n_0)$ gehören; aus $\mathfrak{p}^{(1)}_{\mu_{i1}} \geq \mathfrak{p}^{(0)}_{\mu_{k0}}$ folgt ferner angesichts der Art der Konstruktion von $\mathfrak{c}_1$ sofort $\mathfrak{p}^{(1)}_{\mu_{i1}} > \mathfrak{p}^{(\mu)}_{\mu_{k0}}$.

Wegen $\mathfrak{a} \in \bigcap_\mu \mathfrak{R}_\mu$ gibt es nun wieder n_1 Elemente $c_i^{(1)}$ mit $c_i^{(1)} \in \mathfrak{p}^{(1)}_{\mu_{i1}}$, $\alpha c_i^{(1)} \in \mathfrak{a}$, und man kann auf das Ideal $\mathfrak{c}_2 = (c_0, c_1'^{(0)}, \ldots, c_{n_0}'^{(0)}, c_1'^{(1)}, \ldots, c_{n_1}'^{(1)})$ genau dieselben Überlegungen anwenden wie früher auf $\mathfrak{c}_1$. Die Fortsetzung des Verfahrens führt offenbar zu folgender Alternative: Entweder man kommt nach endlich vielen Schritten zu einem Ideal $\mathfrak{c}_\varkappa = \mathfrak{e}_\sigma \in \Lambda$ mit $\alpha\mathfrak{e}_\sigma \leq \mathfrak{a}$; es gehört also α, wie bewiesen werden sollte, zu $\mathfrak{a}^\Lambda$. Oder es ergibt sich die Existenz einer unendlichen Primidealmenge

$$\mathfrak{p}^{(i)}_{\mu_{ik_i}} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots; k_i = 1, 2, \ldots, n_i)$$

aus Σ', bei der jedes $\mathfrak{p}^{(i)}_{\mu_{ik_i}}$ echtes Oberideal mindestens eines $\mathfrak{p}^{(i-1)}_{\mu_{i-1}, k_{i-1}}$ ist, $(i = 1, 2, \ldots)$. Im zweiten Fall aber müßte, wie mühelos nach geläufigem Schema zu zeigen, in Σ' gegen Voraussetzung eine unendliche Primoberidealkette $\mathfrak{p}_1 < \mathfrak{p}_2 < \cdots$ vorhanden sein.

Verknüpft man Satz 27 und 28, so erhält man sofort:

Satz 29. *Hat in* $\mathfrak{R}$ *jedes Ideal nur endlich viele minimale Primoberideale und gilt in* $\mathfrak{R}$ *außerdem die Maximalbedingung für Primideale, so ist jede* Λ*-Operation äquivalent mit einer* Σ*-Operation, d. h. es gibt eine* Σ*-Operation derart, daß* $\mathfrak{a}^\Lambda = \mathfrak{a}^\Sigma$ *ist für jedes* $\mathfrak{a}$.

In der Tat, nach Satz 27 besteht unter der Voraussetzung von Satz 29 bei einer gegebenen Λ-Operation die Menge der $\mathfrak{e}_\sigma \in \Lambda$ gerade aus *allen* endlichen Idealen, die in keinem einzigen Primideal $\mathfrak{p}_\mu$ einer bestimmten Menge Σ' (im auch bei Satz 28 benutzten Sinne der Bezeichnung) enthalten sind. Setzt man ferner $\mathfrak{a}^\Sigma = \bigcap_\mu(\mathfrak{a}\mathfrak{R}_\mu)$, so wird nach Satz 28 durchweg $\mathfrak{a}^\Lambda = \mathfrak{a}^\Sigma$; es folgt dabei insbesondere $\mathfrak{R}^\Sigma = \mathfrak{R}$ aus $\mathfrak{R}^\Lambda = \mathfrak{R}$, so daß die Zuordnung $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}^\Sigma = \bigcap_\mu(\mathfrak{a}\mathfrak{R}_\mu)$ wirklich eine *Σ-Operation* im Sinne der zu Beginn des Paragraphen gegebenen Definition darstellt.

Natürlich läßt sich die Betrachtung umkehren. Ist Σ' irgendeine Menge von Primidealen $\mathfrak{p}_\mu$ derart, daß $\mathfrak{R} = \bigcap_\mu (\mathfrak{a}\mathfrak{R}_\mu)$ wird, so daß man auf die Menge Σ aller S_μ eine Σ-Operation gründen kann, so erweist *diese* Σ-Operation sich als äquivalent mit der Λ-Operation, die durch die Menge aller der $\mathfrak{e}_\sigma$ definiert wird, die in keinem einzigen $\mathfrak{p}_\mu \in \Sigma'$ enthalten sind. Es fragt sich nur, ob *jede* Σ-Operation äquivalent ist mit dieser speziellen Σ-Operation, ob es also keine Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet, wenn man nur solche Mengen Σ betrachtet, bei denen jedes System S_μ gerade aus allen den $a \in \mathfrak{R}$ besteht, die nicht zu einem bestimmten Primideal $\mathfrak{p}_\mu$ gehören. Unter den allgemeinen Voraussetzungen von Satz 29 ist nicht ohne weiteres zu sehen, ob diese Frage immer bejaht werden kann[44]). Wohl aber erhält man auf Grund der bekannten Sätze über „zugehörige Primideale" und isolierte Komponentenideale ein „Ja" als Antwort, wenn man sich auf die *Noetherschen Ringe* beschränkt, für die im übrigen alle Voraussetzungen von Satz 29 erfüllt sind. Berücksichtigt man diese Bemerkung, deren Beweis seines elementaren Charakters wegen hier weggelassen werden kann[45]), so erhält man auf Grund von Satz 29 und der anschließenden Ausführungen über die Möglichkeit seiner Umkehrung:

Satz 30. *Bei einem Noetherschen Ring $\mathfrak{R}$ ist jede Σ-Operation einer Λ-Operation äquivalent und umgekehrt.*

Damit ist wenigstens im einfachsten Fall ein abschließendes Resultat gewonnen.

---

[44]) Daß man bei solchen Fragen sehr vorsichtig sein muß, wenn nicht von vornherein ein plausibler Weg zur Entscheidung zu sehen ist, zeigen gewisse, bis heute noch ungelöste Probleme aus der Theorie der i. K. I., die nach § 5 aufs engste mit der Theorie der Σ-Operationen zusammenhängt. Vgl. *Krull* [1], Nr. 6, S. 16, sowie die Ausführungen von § 4 der in [42]) zitierten Arbeit.

[45]) Die Behauptung folgt unmittelbar aus dem Zusammenhang zwischen i. K. I. und Σ-Operationen, sowie aus den Sätzen über i. K. I., die für alle die Ringe gelten, in denen sich — wie bei den Noetherschen Ringen — jedes Ideal als Durchschnitt von endlich vielen Primäridealen darstellen läßt. Vgl. *Krull* [1], Nr. 6, S. 17.

Mehrfach zitierte Arbeiten.

C. Chevalley [1]: On the theory of local rings. Annals of Math. (2) **44** (1943), S. 690—708. — [2]: Intersections of algebraic and algebroid varieties. Trans. Amer. Math. Soc. **57** (1945).

I. S. Cohen [1]: On the structure and idealtheory of complete local rings. Trans. Amer. Math. Soc. **59** (1946), S. 54—106.

W. Krull [1]: Idealtheorie. Ergeb. d. Math. u. ihrer Grenzgebiete, Bd. **4** (1935). — [2]: Dimensionstheorie in Stellenringen. Journ. Math. **179** (1938), S. 204—226. — [3]: Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche. VI. Der allgemeine Diskriminantensatz. Unverzweigte Ringerweiterungen. Math. Zeitschr. **45** (1939), S. 1—19. — [4]: Zur Arithmetik der endlichen diskreten Hauptordnungen. Journ. f. Math. **189** (1951), S. 118—128.

O. Zariski [1]: The concept of a simple point of an abstract algebraic variety. Trans. Amer. Math. Soc. **62** (1947), S. 1—52. — [2]: Sur la normalité analytique des variétés normales. Univ. Grenoble. Ann. Inst. Fourier **2** (1951), S. 161—164.

Eingegangen 3. April 1952.